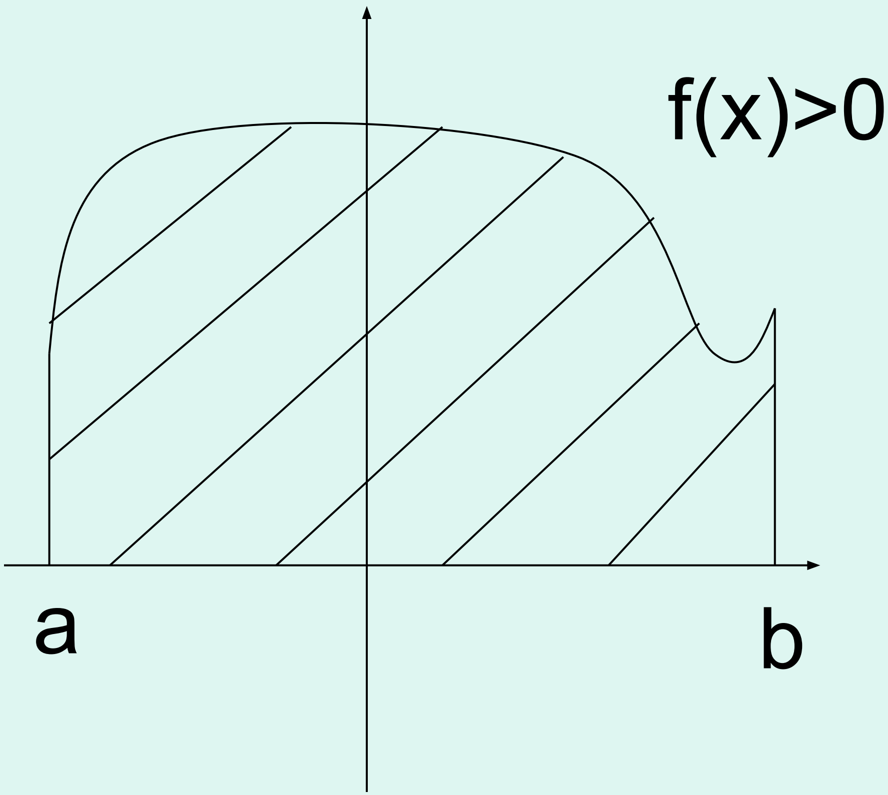
Применение определённого интеграла в геометрических задачах.

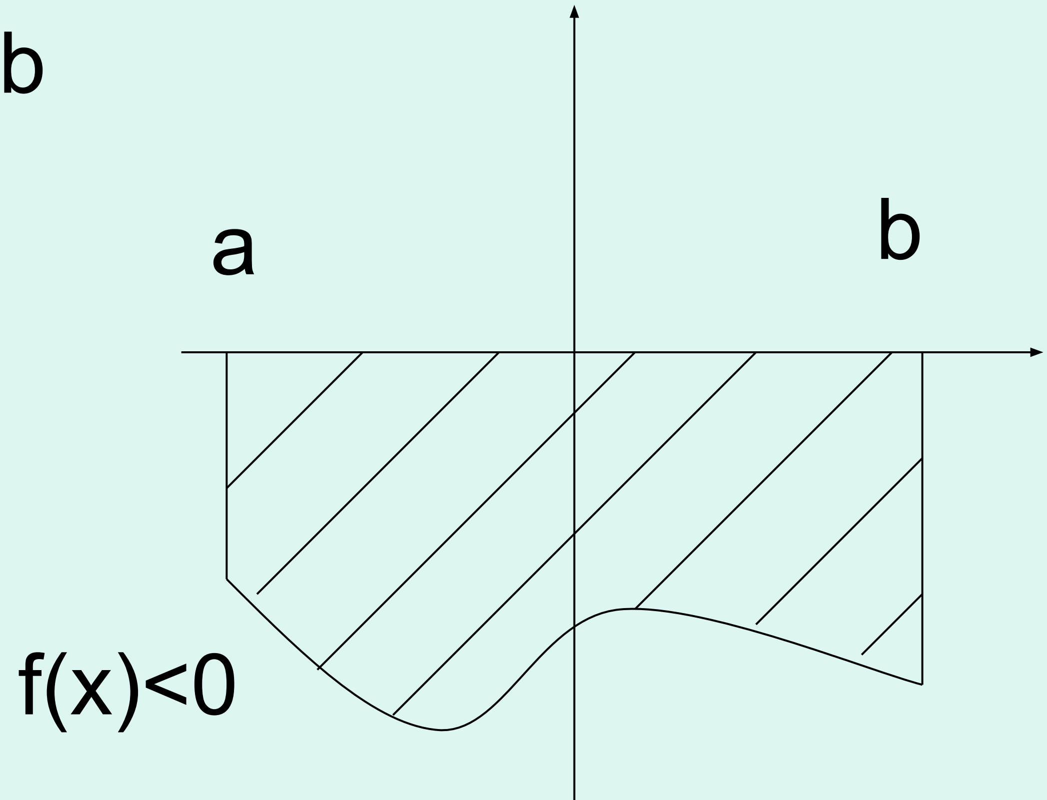
Вычисление площадей плоских фигур

Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и осью ох, называется криволинейной трапецией (с основанием на оси ох).

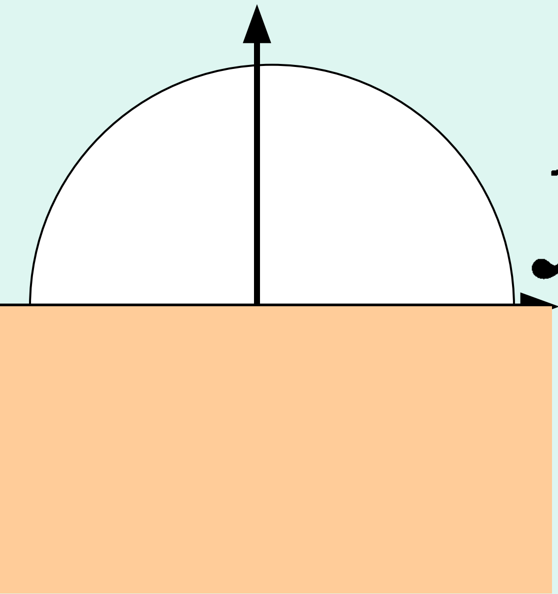


$$S=\int_a^b f(x)dx$$

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



Площадь круга



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$S = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$x = R\sin\alpha; \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$dx = R\cos\alpha\, d\alpha,$$

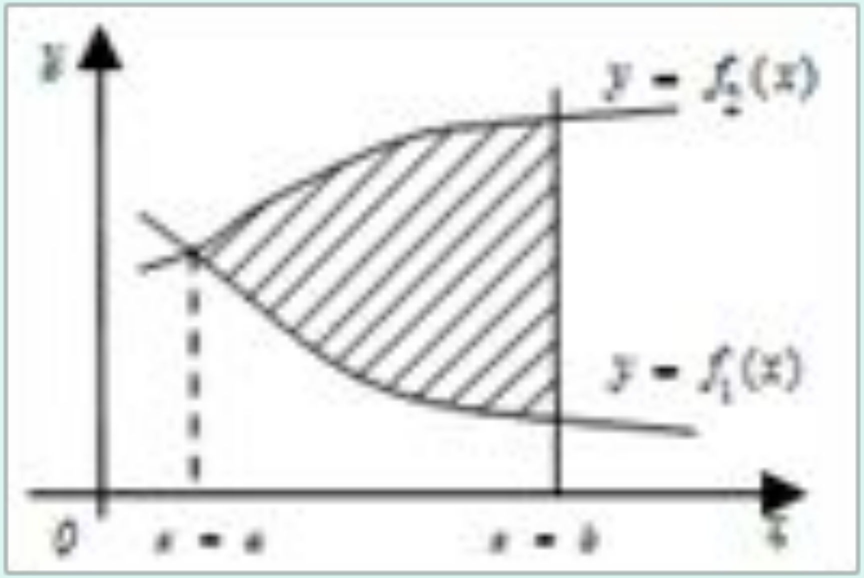
$$\cos\alpha \ge 0$$

$$S = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha}\, R\cos\alpha d\alpha$$

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha$$

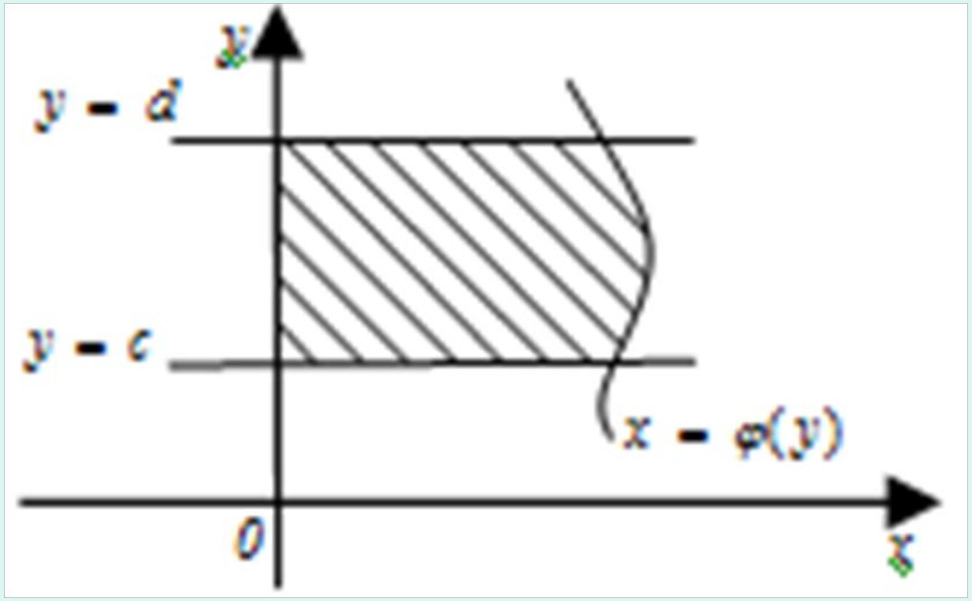
$$S = \pi R^2$$



$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

$$x \in [a;b]$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

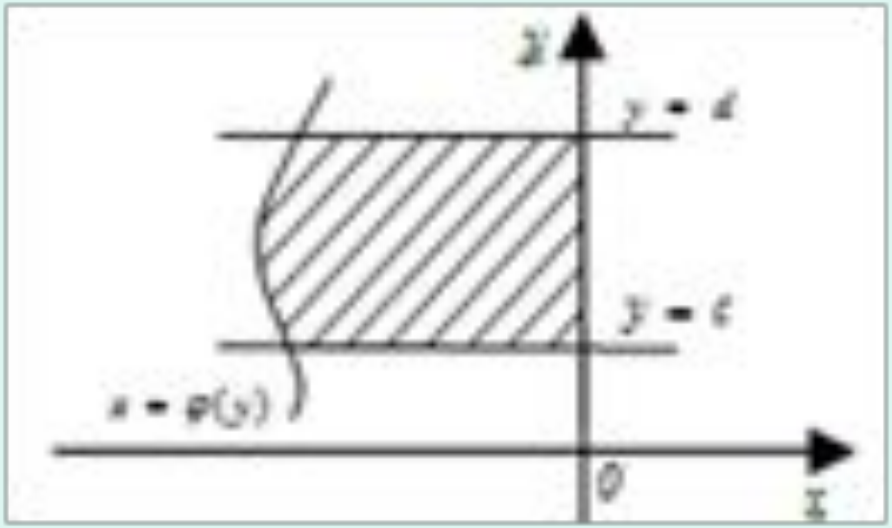


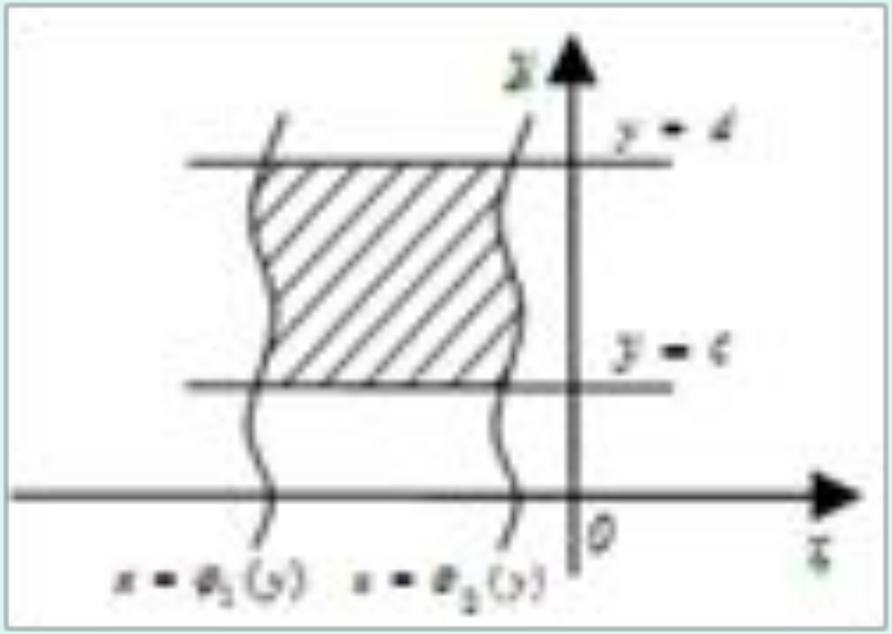
$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)\geq 0$$

$$S=-\int_c^d \varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)<0$$





$$x = \varphi_1(y)$$

$$x = \varphi_2(y)$$

$$\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$$

$$y = d \qquad y = c$$

$$c < d$$

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$$

Вычисление объёмов тел вращения

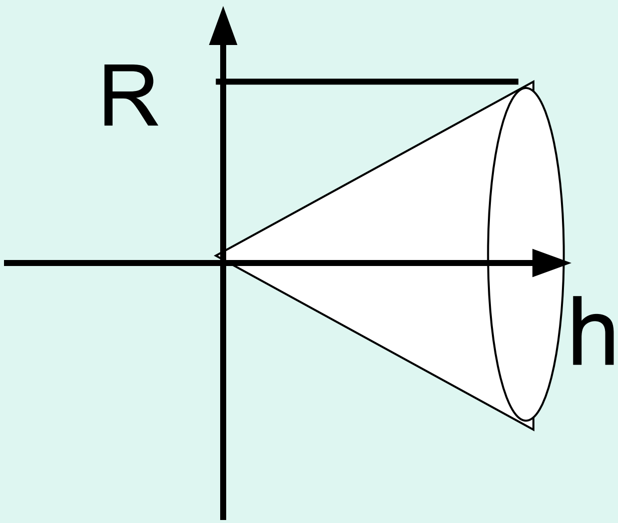
Объём тела, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, *отрезком оси абсцисс* $a \le x \le b$ *и прямыми* $x = a, x = b$ *, вычисляется по формуле :*

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x = \varphi(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле :

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy$$

№ 1. Используя формулу объёма тела вращения, получите формулу для вычисления **объёма конуса.**



$$y = \frac{R}{h}x$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

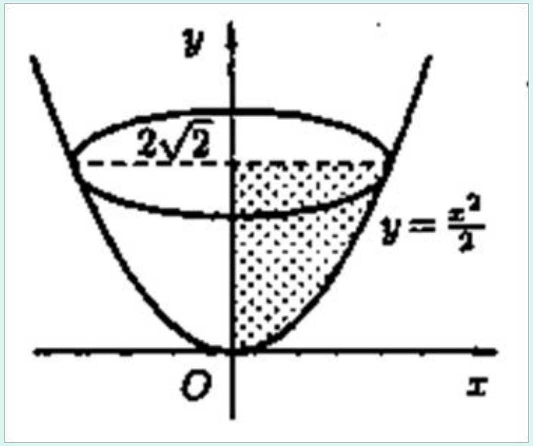
№ 2

Вычислите объём тела, полученного вращением кривой – графика функции $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

№ 3 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad x=0, \quad y = 2\sqrt{2}$$



вокруг оси Oy

$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

$$V = \pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2y}\right)^2 dy = \pi\int_0^{2\sqrt{2}} 2ydy = \pi\, y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$$

Применение определённого интеграла в физике.

Работа силы F

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ОХ под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x = a$ в положение $x = b$ $(a < b)$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

№ 4. К движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой сила f=2x-1,
где x – координата движущейся точки.
Вычислите работу силы F
по перемещению точки от 0 до 3.

$$A = \int_0^3 (2x-1)dx = (x^2 - x)\Big|_0^3 = 6$$

Масса стержня переменной плотности

$$M = \int_a^b \rho(x)dx$$

Координата центра массы

$$x' = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$$

№ 5. Вычислить массу стержня на отрезке от 0 до 2, если его плотность задаётся функцией

$$\rho(x) = x + 1$$

$$M = \int_0^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^2 = 4$$

Путь прямолинейного движения

Путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

№ 6. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с).

$$S = \int_0^4 (2t+4)dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^4 + 4t\Big|_0^4 = 4^2 + 4\cdot 4 = 32$$

Спасибо за внимание!