МАОУ «Телембинская средняя общеобразовательная школа»

НПК «Шаг в будущее»

Секция «Геометрия»

«ПИФАГОРОВЫ И ГЕРОНОВЫ ТРОЙКИ»

Выполнила:
Ученица 9 класса Богдан Ангелина,
Научный руководитель:
Хончинова Надежда Содномовна,
учитель математики.

- Данная тема представляет особую **актуальность**, так как в школьной программе по геометрии эта тема практически не рассматривается, но при решении некоторых видов задач часто встречается.
- **Объект исследования:**
- Пифагоровы и героновы тройки.
- **Предмет исследования:** числа

- **Цель работы**– обосновать теоретическую и практическую значимость пифагоровых и героновых троек в области математики и в жизнедеятельности человека.
- **Задачи:**
- 1)Установить способы получения пифагоровых и героновых чисел.
- 2)Изучить свойства примитивных пифагоровых и героновых троек, составить их таблицу.
- 3)Предложить решения некоторых задач с помощью пифагоровых и героновых троек.
- 4)Выявить практическое применение пифагоровых и героновых троек.

- Пифагоровы числа – тройки натуральных чисел, таких, что треугольник, длины которого пропорциональны (или равны) этим числам, является прямоугольным. По теореме, обратной теореме Пифагора, для этого достаточно, чтобы они удовлетворяли диофантову уравнению x2 + y2 = z2 .
- Таковы, например, числа x=3, y=4,z=5.

Пифагор Самосский

В архитектуре древнемесопотамских надгробий встречается равнобедренный треугольник, составленный из двух прямоугольных со сторонами 9, 12 и 15 локтей.

Пирамиды Фараона Снофру (27 век до н. э.) построены с использованием треугольников со сторонами 20, 21 и 29, а также 18, 24 и 30 десятков египетских локтей.

Способы нахождения пифагоровых троек

Способ первый: Запишем подряд квадраты натуральных чисел, отделив их друг от друга запятой. Под каждой запятой подпишем разность между последовательными квадратами:

1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , 121 , 144 , 169 , 196 ,...

3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 , 19 , 21 , 23 , 25 , 27 ,...

А теперь внимание! В нижней строке есть квадратные числа! Первое из них $9 = 3^2$, над ними $16 = 4^2$ и $25 = 5^2$ - знакомая нам пифагорова тройка (3, 4, 5).

Следующее квадратное число в нижней строке 25, ему соответствуют 144 и 169, отсюда находим вторую известную нам тройку 5, 12, 13. Если продолжить строку квадратных чисел и посчитать соответствующие разности, то во второй строке найдете $49 = 7^2$, этому числу отвечают в строке квадратов $576 = 24^2$ и $625 = 25^2$. И действительно, $7^2 + 24^2 = 25^2$. Это уже третья тройка. Она была известна еще в Древнем Египте. Но, составлять такие последовательности довольно скучное и трудоемкое занятие. По формуле находить такие тройки и проще и быстрее.

Способ второй: Эти формулы были известны уже две с половиной тысячи лет назад. Пусть (x, y, z,) – пифагорова тройка и x –нечетное число. Тогда $y = (x^2-1)/2$ и $z = (x^2+1)/2$. По этому правилу можно получить уже известные нам тройки:

Если $x = 3$, то $y = (3^2-1)/2 = 4$, $z = 3^2+1/2 = 5$, получилась первая тройка (3, 4, 5).

Если $x = 5$, то $y = (5^2-1)/2 = 12$, $z = (5^2+1)/2 = 13$, вторая тройка (5, 12, 13).

Если $x = 7$, то $y = (7^2-1)/2 = 24$, $z = (7^2+1)/2 = 25$, третья тройка (7, 24, 25) и так далее.

Способ третий: Теперь установим правила вычисления всех, а не только некоторых пифагоровых троек. Перепишем уравнение Пифагора следующим образом: $x^2 = z^2 - {}^2$ или $x^2 = (z - y)(z + y)$

Это значит, что число x^2 должно раскладываться на два неравных множителя $(z + y)$ и $(z - y)$, которые мы обозначим так, что получится система:

$z + y = 2m^2$,

$z - y = 2n^2$

$x^2 = z^2 - {}^2$ или $x^2 = (z - y)(z + y)$

Решив эту систему, получим:

$z = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$, тогда подставляя в равенство для x^2, получаем, что $x = 2mn$, где m и n – произвольно взятые взаимно простые натуральные числа, причем $m>n$. Применяя указанные формулы, легко найти все решения уравнения $x2 + y2 = z2$ в натуральных числах. Например: пусть $m = 9$, $n = 7$, где $m>n$.

Решим уравнение по формулам:

$x = 2mn$, $x = 2 * 9 * 7 = 126$;

$y = m^2 - n^2$, $y = 81 - 49 = 32$;

$z = m^2 + n^2$, $z = 81 + 49 = 130$.

Действительно, $126 + 32 = 130$, так как $15876 + 1024 = 16900$

Ответ: 126, 32, 130.

Свойства пифагоровых троек

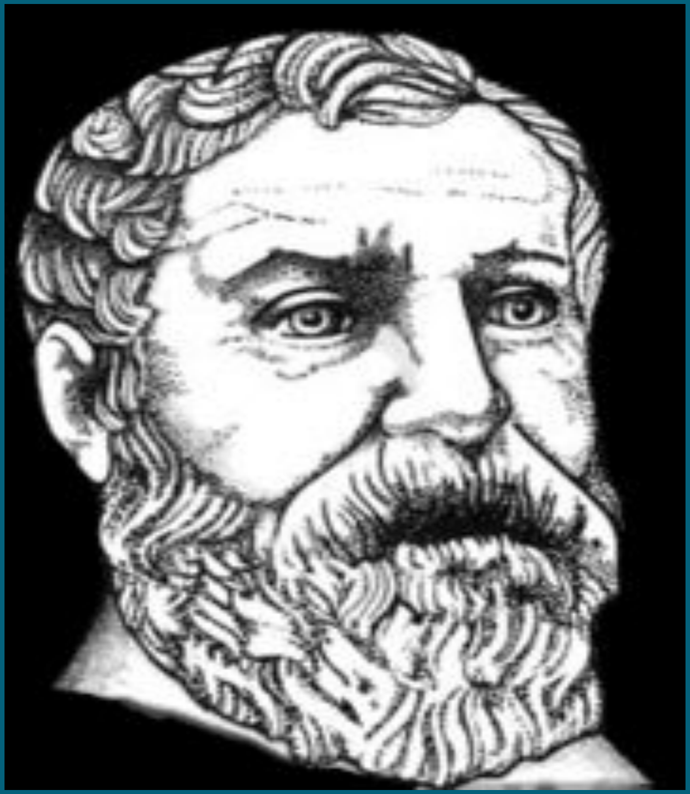
- Рассмотрим некоторые свойства пифагоровых троек.
- **Свойство 1.** Числа, входящие в простейшую пифагорову тройку, попарно взаимно просты.
- Действительно, если два из них, например x и y имеют простой общий делитель p, то из равенства $x^2 + y^2 = z^2$ следует, что на p делится и третье число z. Это противоречит тому, что тройка - простейшая.
- **Следствие.** В простейшей пифагоровой тройке только одно число может быть чётным.
- **Свойство 2.** В простейшей пифагоровой тройке числа x и y не могут быть одновременно нечётными.
- Пифагор нашёл формулы, которые в современной символике могут быть записаны так: $a=2n+1$, $b=2n(n+1)$, $c=2n^2+2n+1$, где n - целое число.
- Эти числа - пифагоровы тройки. Пифагоровы числа обладают рядом любопытных особенностей:
- · Один из катетов должен быть кратен трём.
- · Один из катетов должен быть кратен четырём.
- · Одно из пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

В результате выявления свойств примитивных (простейших) троек, а так же формул Пифагора, можно составить таблицу примитивных пифагоровых троек.

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	4	3	5	8	1	16	63	65
3	2	12	5	13	8	3	48	55	73
4	1	8	15	17	8	5	80	39	89
4	3	24	7	25	8	7	112	15	113
5	2	20	21	29	9	2	36	77	85
5	4	40	9	41	9	4	72	65	97
6	1	12	35	37	9	8	144	17	145
6	5	60	11	61	10	1	20	99	101
7	2	28	45	53	10	3	60	91	109
7	4	56	33	65	10	7	140	51	149
7	6	84	13	85	10	9	180	19	181

Героновы числа

- В тесной связи с пифагоровыми числами находятся героновы числа. Последние получили свое название по имени Герона Александрийского, который дал миру формулу для вычисления площади треугольника по его сторонам.
- Героновой тройкой чисел называют три натуральных числа, выражающих длины сторон треугольника, площадь которого тоже есть натуральное число.



ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Способы нахождения героновых троек

- Чтобы найти все возможные героновы тройки, мы прежде всего примем, что треугольник имеет три рациональные стороны a, b, c и площадь S, которая выражается рациональным числом. В таком случае и все высоты h должны выражаться рациональными числами. Для получения всевозможных треугольников с рациональными сторонами и рациональной площадью достаточно сложить всеми возможными способами два прямоугольных треугольника с рациональными сторонами. Три стороны всякого треугольника после соответствующего умножения дают геронову тройку.

Из пифагоровых-героновы

- Особым видом героновых троек являются такие, в которых два числа равны. Такие тройки получаются сопоставлением чисел пифагоровой тройки с самими этими числами. Из каждой пифагоровой тройки таким образом получаем героновы тройки. Например, пифагоровы числа 5, 3, 4 дают героновы тройки 5, 5, 6 и 5, 5, 8;
- Числа 13, 5, 12 -13, 13, 10 и 13, 13, 24.
- Числа 17. 15, 8 – 17, 17, 30 и 17, 17, 16.

. Практическое применение пифагоровых и героновых троек

- Пифагоровы и героновы тройки имеют огромное практическое применение. Рассмотрим для примера несколько задач:
- ***Задача №1***. Найти cos , tg и ctg , если sin = 24/25, если – угол второй четверти.
- Решение:Исходя из определения cos, tg и ctg острого угла прямоугольного треугольника, учитывая, что числа 7 и 24 – это катеты, а 25 – гипотенуза и, зная, в какой четверти ннаходится угол, записываем: cos = -7/25, tg = - 24/7, ctg = - 7/24.
-

- **Задача №2.** При оформлении фасада дома мозаикой, требуются разноцветные равные прямоугольные треугольники из стекла, с целочисленными сторонами и с катетом 10 см. Требуется определить, какими должны быть другие стороны данных треугольников.
- Решение: Заданный катет – четное число, значит $x = 10 = 2mn$, где $m>n$ и они взаимно простые числа. Возможна единственная комбинация m и n – это 5 и 1. Так как $2*5*1=10$. Остальные стороны равняются $y=m^2-n^2=24$, $z=m^2+n^2=26$. Таким образом, ответ – это треугольники со сторонами 10см, 24 см и 26 см.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Изначально были выявлены базовые теоретические знания, включающие описание общих понятий о пифагоровых и героновых тройках. На базе полученных знаний были выявлены способы их получения и свойства. Теоретическая и практическая значимость исследования состоит в том, что в нем на основе системного подхода представлена роль, которую играет открытие пифагоровых и героновых троек в науке и в жизнедеятельности человека. Несмотря на то, что в школе изучение пифагоровых и героновых троек не отводится много времени, в настоящее время значение их необходимо при решении многих задач. А умы учёных продолжают искать новые варианты доказательств теоремы Пифагора.

Спасибо за внимание!!!