10 способов решения квадратных уравнений

Подготовила : ученица 9А класса МОУ СОШ №1
Бурмистрова Валерия Геннадьевна.
Руководитель : Иванова Татьяна Викторовна, учитель математики
п. Селижарово СОШ№1

Актуальность этой темы заключается в том, что на уроках алгебры, геометрии, физики мы очень часто встречаемся с решением квадратных уравнений. Поэтому каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения, это также может мне пригодится при решении более сложных задач, в том числе и в 9 классе при сдаче экзаменов.

- **Цель работы:**
  научиться решать квадратные уравнения различными способами.
- **Исходя из данной цели, мною были поставлены следующие задачи:**
- - изучить историю развития квадратных уравнений;
- - выявить наиболее удобные способы решения квадратных уравнений;
- - научиться решать квадратные уравнения различными способами.

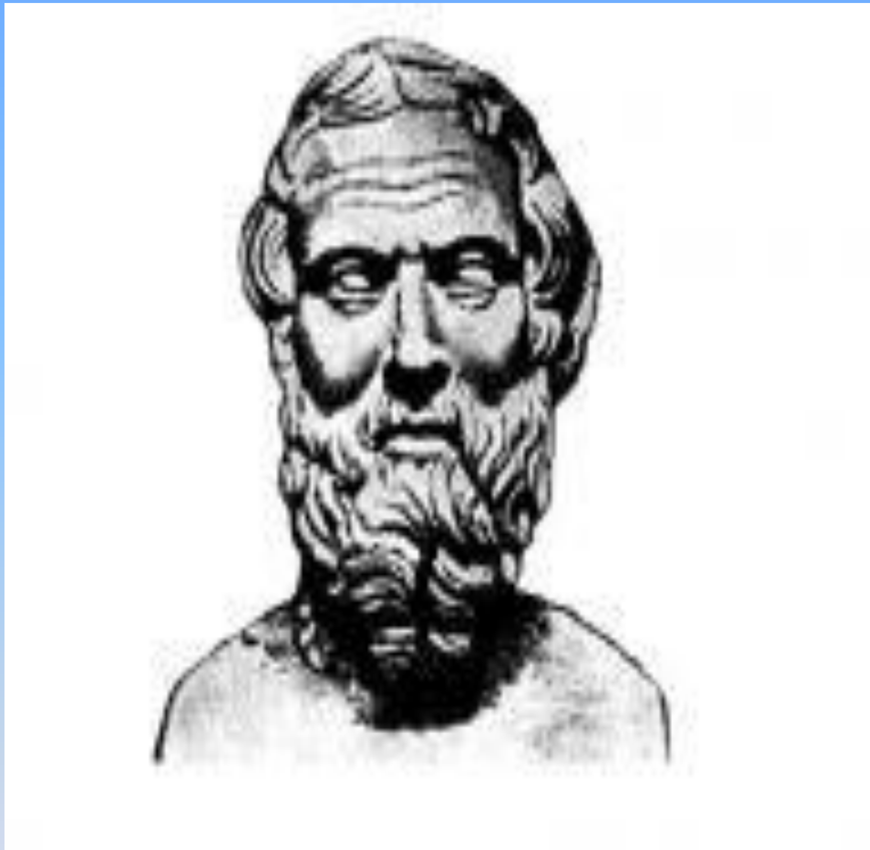
История развития квадратных уравнений.

1) Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков, с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне.

2.Квадратные уравнения в Греции.

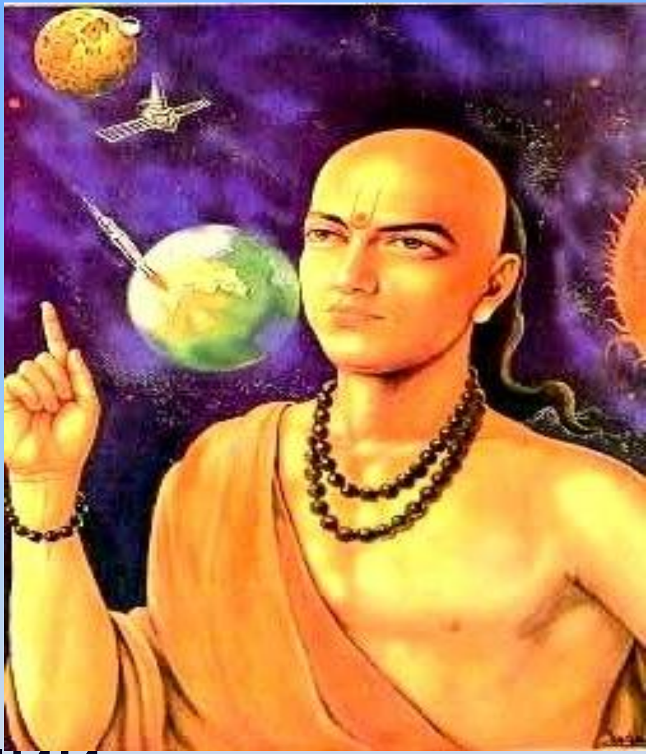
В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.



3)Квадратные уравнения в Индии.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученный, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$ax^2 + bx = c,\ a > 0.$



Квадратные уравнения у ал – Хорезми.

В алгебраическом трактате ал - Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений:

1) ***«Квадраты равны корнями», т.е. ax2 + c = bx.***
2) ***«Квадраты равны числу», т.е. ax2 = c.***
3) ***«Корни равны числу», т.е. ax = c.***
4) ***«Квадраты и числа равны корням», т.е. ax2 + c = bx.***
5) ***«Квадраты и корни равны числу», т.е. ax2 + bx = c.***
6) ***«Корни и числа равны квадратам», т.е. bx + c = ax2.***

Трактат ал - Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

5)Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал - Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Способы решения квадратных уравнений.

- ***<u>1. СПОСОБ</u>*: *Разложение левой части уравнения на множители.***

Решим уравнение *x2 + 10x - 24 = 0*. Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

- **2. СПОСОБ**: ***Метод выделения полного квадрата***.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.
Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 32. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 - 32 - 7 = (x + 3)2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

3. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

на 4а и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- **4. СПОСОБ:** *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. \qquad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при *а =1* имеет вид

$$x_1 x_2 = q,$$
$$x_1 + x_2 = - p$$

а) $x^2 – 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = - 3 < 0$;
$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = - 7$ и $x_2 = - 1$, так как $q = 7 > 0$ и $p= 8 > 0$.

б) $x^2 + 4x – 5 = 0$; $x_1 = - 5$ и $x_2 = 1$, так как $q= - 5 < 0$ и $p = 4 > 0$;
$x^2 – 8x – 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = - 1$, так как $q = - 9 < 0$ и $p = - 8 < 0$.

- **5. СПОСОБ:** *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

- **Пример.**

Решим уравнение $2x^2 – 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 – 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: 2,5; 3.

- **<u>6. СПОСОБ:</u>** *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

<u>А.</u> Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 = - b/a,$$

$$x_1 x_2 = 1 \cdot c/a.$$

По условию $a – b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$x_1 + x_2 = - a + b/a = -1 – c/a,$$

$$x_1 x_2 = - 1 \cdot (- c/a),$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

- **Б.** Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ıожно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

В. Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

Примеры.

А.)Решим уравнение $345x^2 – 137x – 208 = 0$.

Решение. Так как $a + b + c = 0$ $(345 – 137 – 208 = 0)$, то

$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = -208/345$.

Ответ: 1; -208/345.

Б.) Решим уравнение $132x^2 – 247x + 115 = 0$.

Решение. Так как $a + b + c = 0$ $(132 – 247 + 115 = 0)$, то

$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = 115/132$.

Ответ: 1; 115/132.

2) Решим уравнение $2x^2 + 3x +1= 0$. Так как 2 - 3+1=0, значит $x_1= - 1$, $x_2 =-c/a= -1/2$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2 =-1/2$.

7. СПОСОБ: *Графическое решение квадратного уравнения.*

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$x^2 = - px - q.$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.

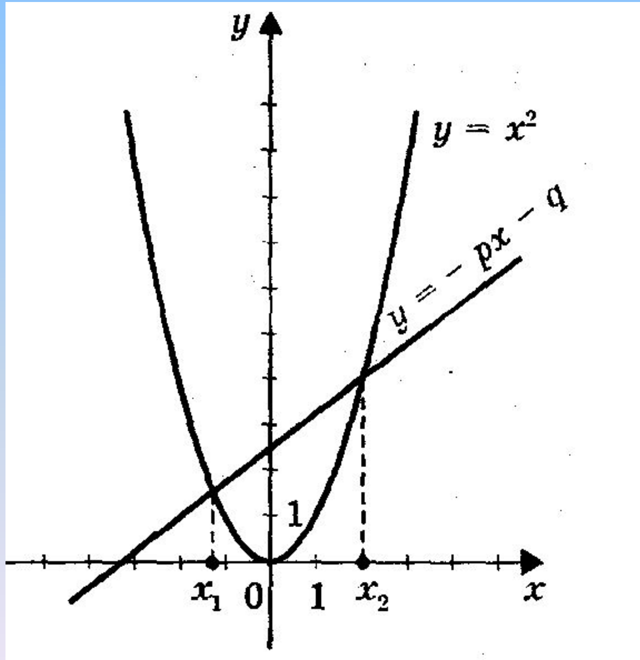


Рис. 1

- **Пример**

1) Решим графически уравнение

$x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде

$x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую

$y = 3x + 4$.

Прямую

$y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам

$M (0; 4)$ и $N (3; 13)$.

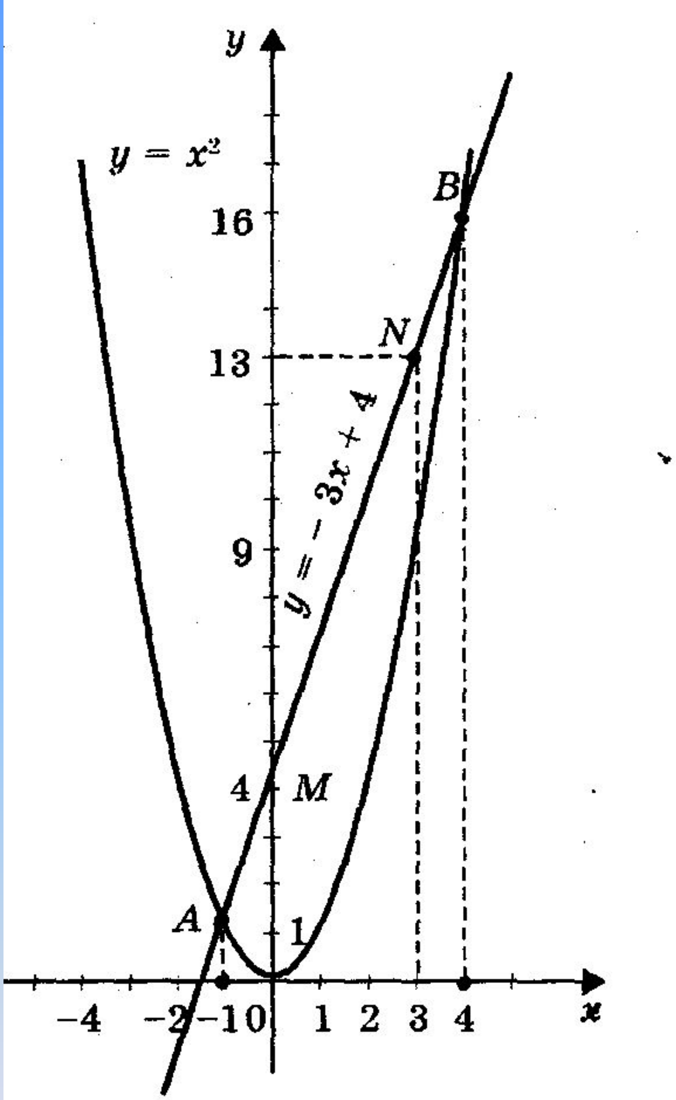


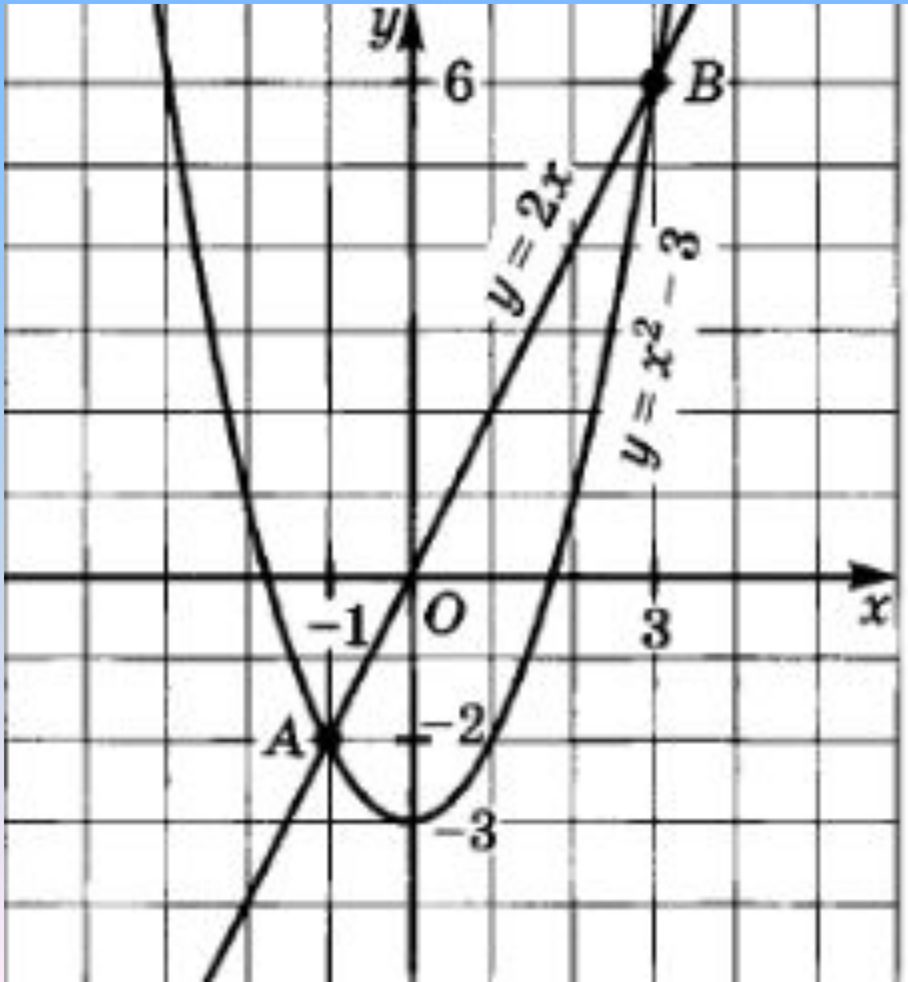
Рис. 2

<u>*Ответ*</u>: $x_1 = - 1$; $x_2 = 4$

Преобразуем уравнения к виду. $x^2 - 3 = 2x$
Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = 2x$

Они пересекаются в двух точках А(-1;-2) и В (3;6).
Корнями уравнения являются абсциссы точек А и В, поэтому.

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$



Разделим почленно обе части уравнения на х, получим:

$$x-2-\frac{3}{x}=0 \qquad x-2=\frac{3}{x}$$

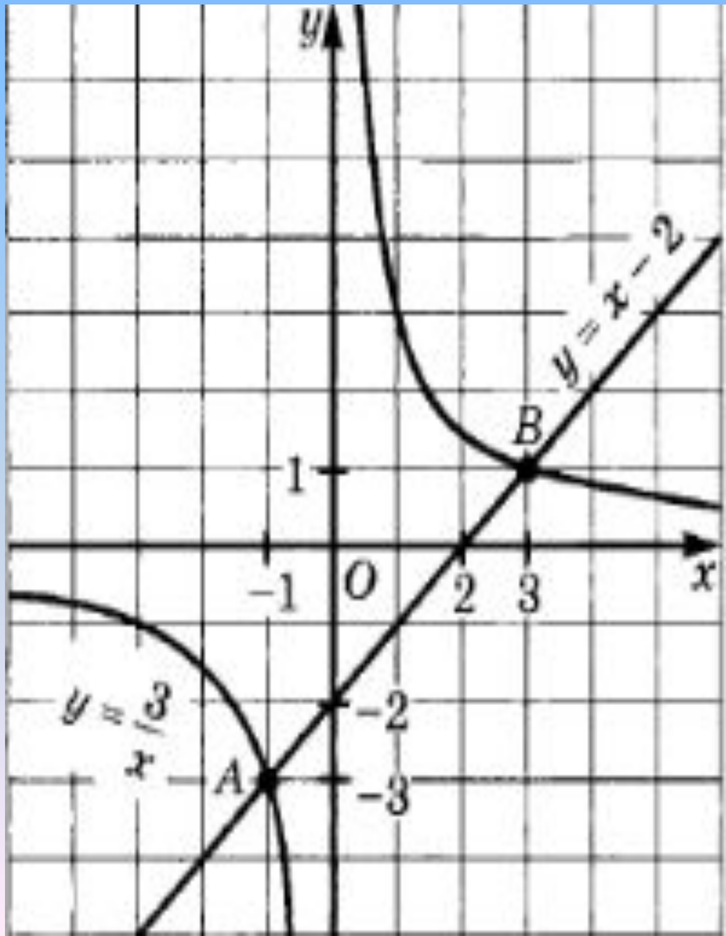
Построим в одной системе

координат гиперболу $y=\frac{3}{x}$ и прямую $y=x-2$

Они пересекаются в двух точках A(-1;-3) и B(3;1).

Корнями уравнений являются абсциссы точек A и B, следовательно,

$$x_1=-1, x_2=3$$



8. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Тогда по теореме о секущих имеем

$OB \cdot OD = OA \cdot OC$,

откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

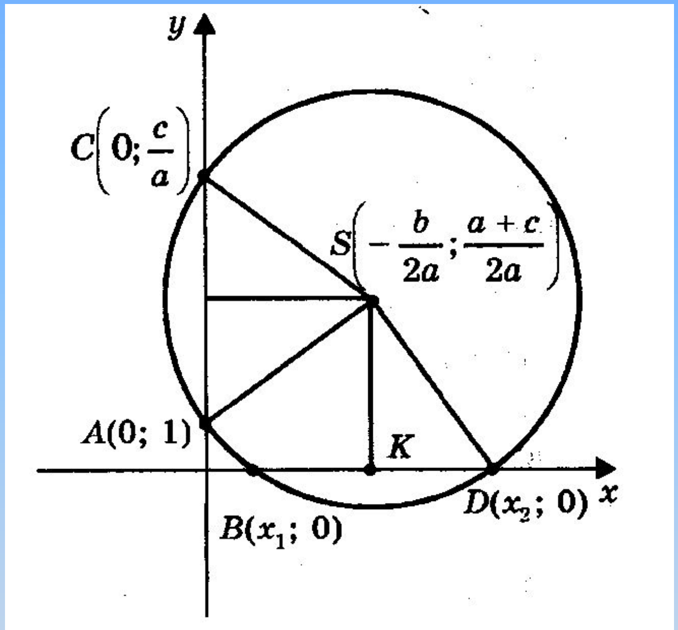


Рис. 5

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

- 1) Радиус окружности больше ординаты центра

(*AS* > *SK*, *или R* > *a* + *c/2a*), окружность пересекает ось Ox в двух точках (6, а рис.) *B*(*x*1; 0) и *D*(*x*2; 0), где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения *ax*2 + *bx* + *c* = 0.

2) Радиус окружности равен ординате центра

(*AS* = *SB*, *или R* = *a* + *c/2a*), окружность касается оси Ox (рис. 6,б) в точке *B* (*x*1; 0), где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB,\ \text{или}\ R < \frac{a+c}{2a}\right)$,

окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае

уравнение не имеет решения.

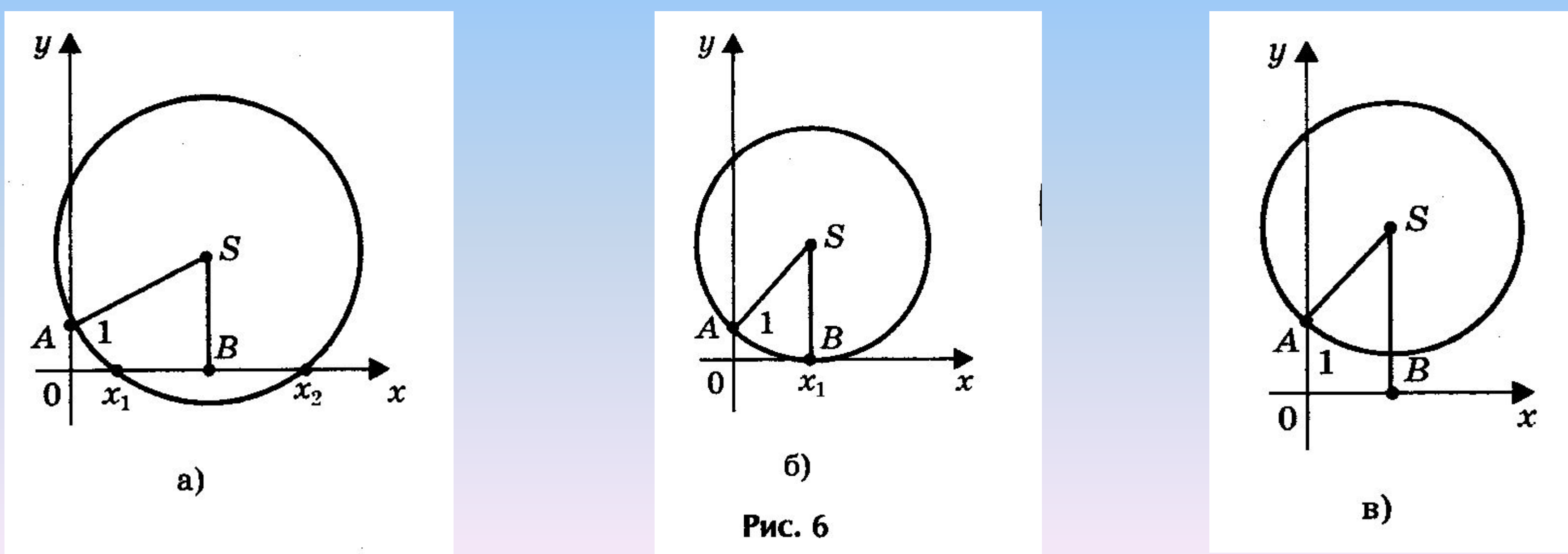


Рис. 6

Пример.

Решим уравнение *$x^2 - 2x - 3 = 0$* (Рис.7)

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

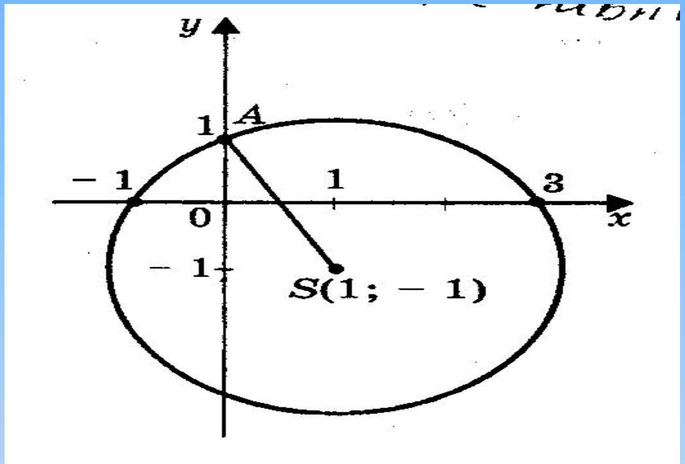


Рис. 7

Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1).

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

- **<u>9. СПОСОБ:</u>** *Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.*

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

Полагая *OC = p, ED = q, OE = a* (все в см.),

Из подобия треугольников *CAH* и *CDF* получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

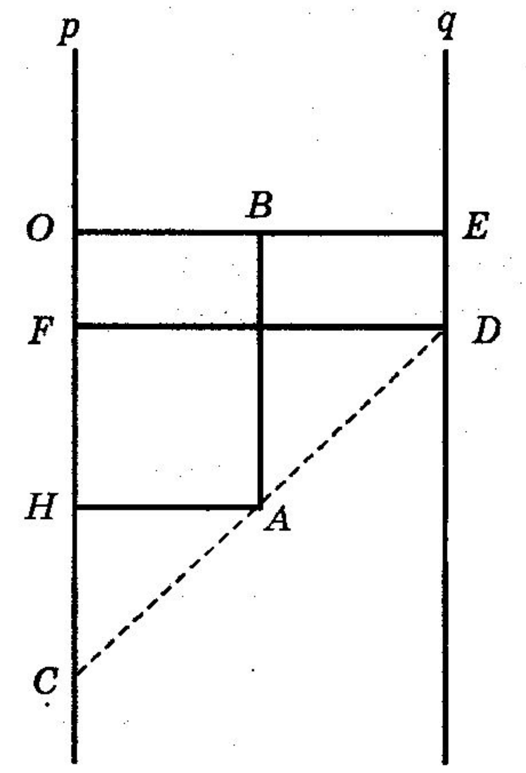


Рис. 11

- **Примеры.**

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$z^2 - 4{,}5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5.$

3) Для уравнения

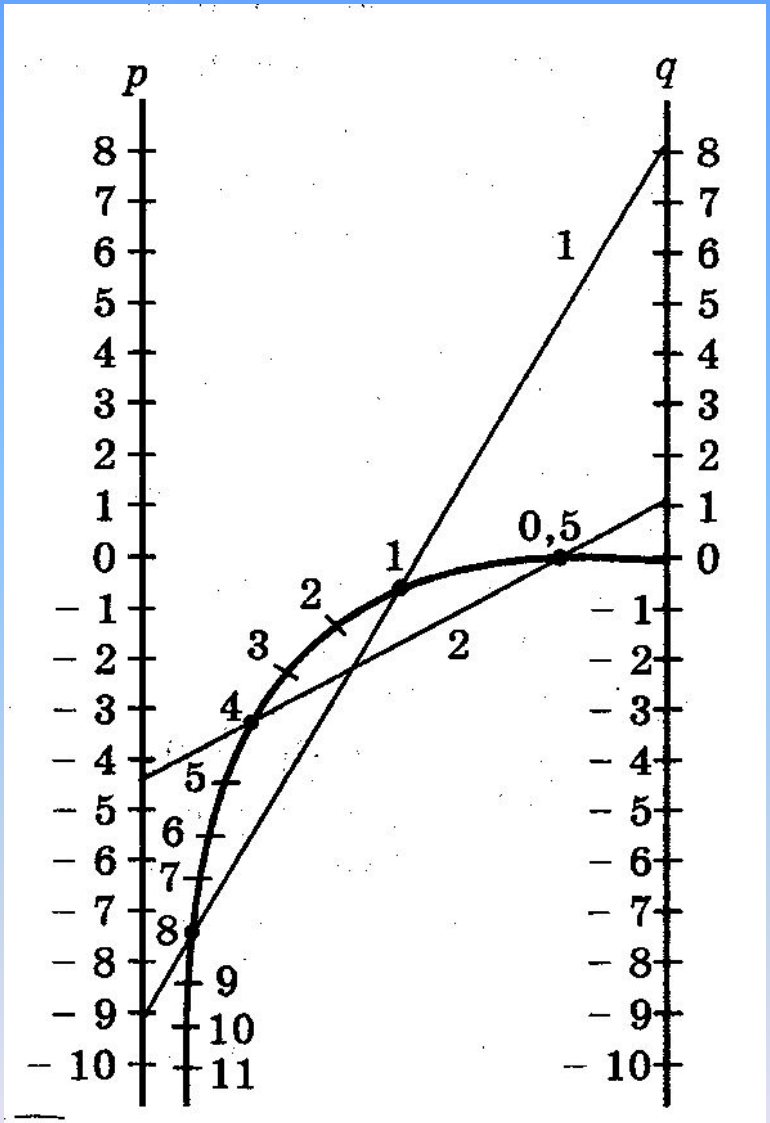
$z^2 - 25z + 66 = 0$

коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение

$t^2 - 5t + 2{,}64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 4{,}4,$ откуда

$z_1 = 5t_1 = 3{,}0$ и $z_2 = 5t_2 = 22{,}0.$



10. СПОСОБ: *Геометрический способ решения квадратных уравнений.*

- **Примеры.**

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом :

«Квадрат и десять корней равны 39»

(рис.15).

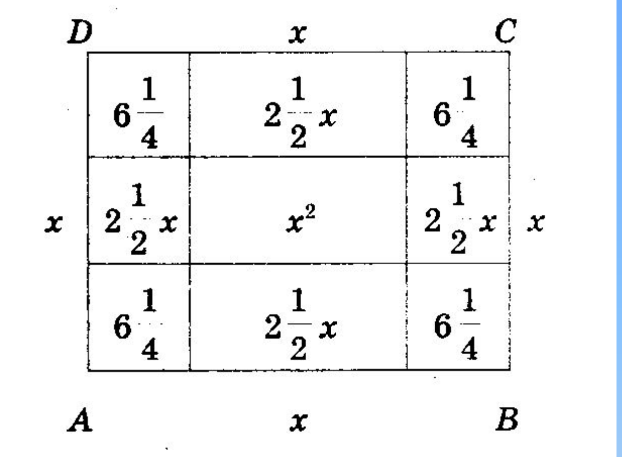


Рис. 15

Для искомой стороны *x* первоначального квадрата получим

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

$y^2 + 6y - 16 = 0.$

Решение представлено на рис. 16,

где $y^2 + 6y = 16$, *или*

$y^2 + 6y + 9 = 16 + 9.$

Решение. Выражения $y^2 + 6y + 9$

и $16 + 9$ геометрически представляют

собой один и тот же квадрат, а исходное

уравнение

$y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ - одно и то же уравнение.

Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$,

или $y_1 = 2$, $y_2 = - 8$ (рис.16).

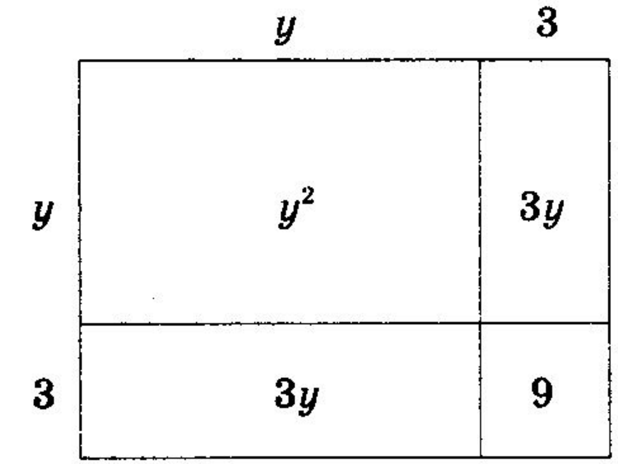


Рис. 16

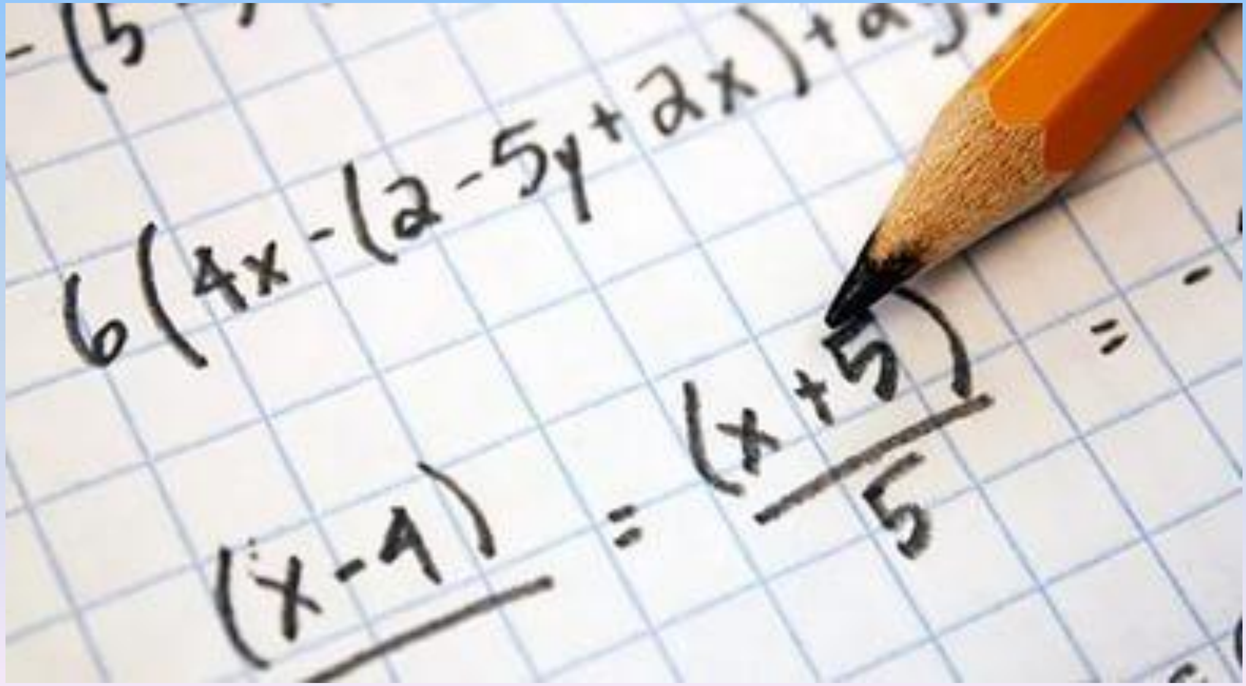
- ***Заключение***

Изучив теорию математики , я решила предложить одноклассникам рассмотреть нестандартные приемы решения квадратных уравнений . В ходе решения квадратных уравнений на элективном курсе ,они высказали мнение ,что эти приемы упрощают решение квадратных уравнений . Если вдруг забудешь формулу корней , то можно применить один из нестандартных приемов решения уравнений. Наиболее интересными показались способы

№ 5 и 7.

В ходе выполнения своей исследовательской работы я считаю, что с поставленной целью и задачами я справилась, мне удалось обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме.
Способов решения квадратных уравнений очень много. Я выделила 10 способов решения квадратных уравнений. Нужно отметить, что не все они удобны для решения . Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на контрольных работах и экзаменах.

Думаю, что моя работа будет тем, кто хотят научиться решать рационально квадратные уравнения и хорошо подготовиться к выпускным экзаменам. Также она будет интересна и учителям математики, так как в своей работе я не только рассмотрела методы решения квадратных уравнений, но и историю их развития.



При решении квадратных уравнений для себя я сделала следующие выводы: Для того, чтобы хорошо решать любое квадратные уравнения необходимо знать:

- формулу нахождения дискриминанта;
- формулу нахождения корней квадратного уравнения;
- алгоритмы решения уравнений данного вида.
- уметь:
- решать неполные квадратные уравнения;
- решать полные квадратные уравнения;
- решать приведенные квадратные уравнения;
- находить ошибки в решенных уравнениях и исправлять их;
- делать проверку.