

**Первообразная. Интеграл.
Площадь криволинейной трапеции.**

(11 класс)

Учитель математики МАОУ
«СОШ№45», Калининграда
Маврина Т.В.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке, где C – произвольная постоянная

Таблица первообразных

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	x^n	$a^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	\sqrt{x}	$\frac{1}{x} + C$	$\ln x $
$\sin x + C$	$\cos x$	$e^x + C$	e^x
$-\cos x + C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x + C$	$\frac{1}{x \ln a}$
$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила нахождения первообразных

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$,
а $G(x)$ – первообразная для функции $g(x)$, то
 $F(x)+G(x)$ – первообразная для функции
 $f(x)+g(x)$

**Первообразная суммы равна сумме
первообразных**

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$,
а a – константа, то $aF(x)$ – первообразная
для функции $af(x)$

**Постоянный множитель можно
выносить за знак первообразной**

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$,
а k и b - константы, причем $k \neq 0$

то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ - первообразная для
функции

$$f(kx + b)$$

Показать, что функция $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$

является первообразной для функции

$$f(x) = x^4$$

Решение:

$$F'(x) = \left(\frac{x^5}{5} + 1 \right)' = \frac{5x^4}{5} = x^4 = f(x)$$

**Показать, что функция $F(x) = 1 + \sin 2x$
является первообразной для функции**

$$f(x) = 2 \cos 2x$$

Решение:

$$F'(x) = (1 + \sin 2x)' = 2 \cos 2x = f(x)$$

Найти первообразные для функции

$$f(x) = 5x^3 + e^{2x+7} - 4 \cos x$$

Решение:

$$F(x) = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} e^{2x+7} - 4 \sin x + C$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

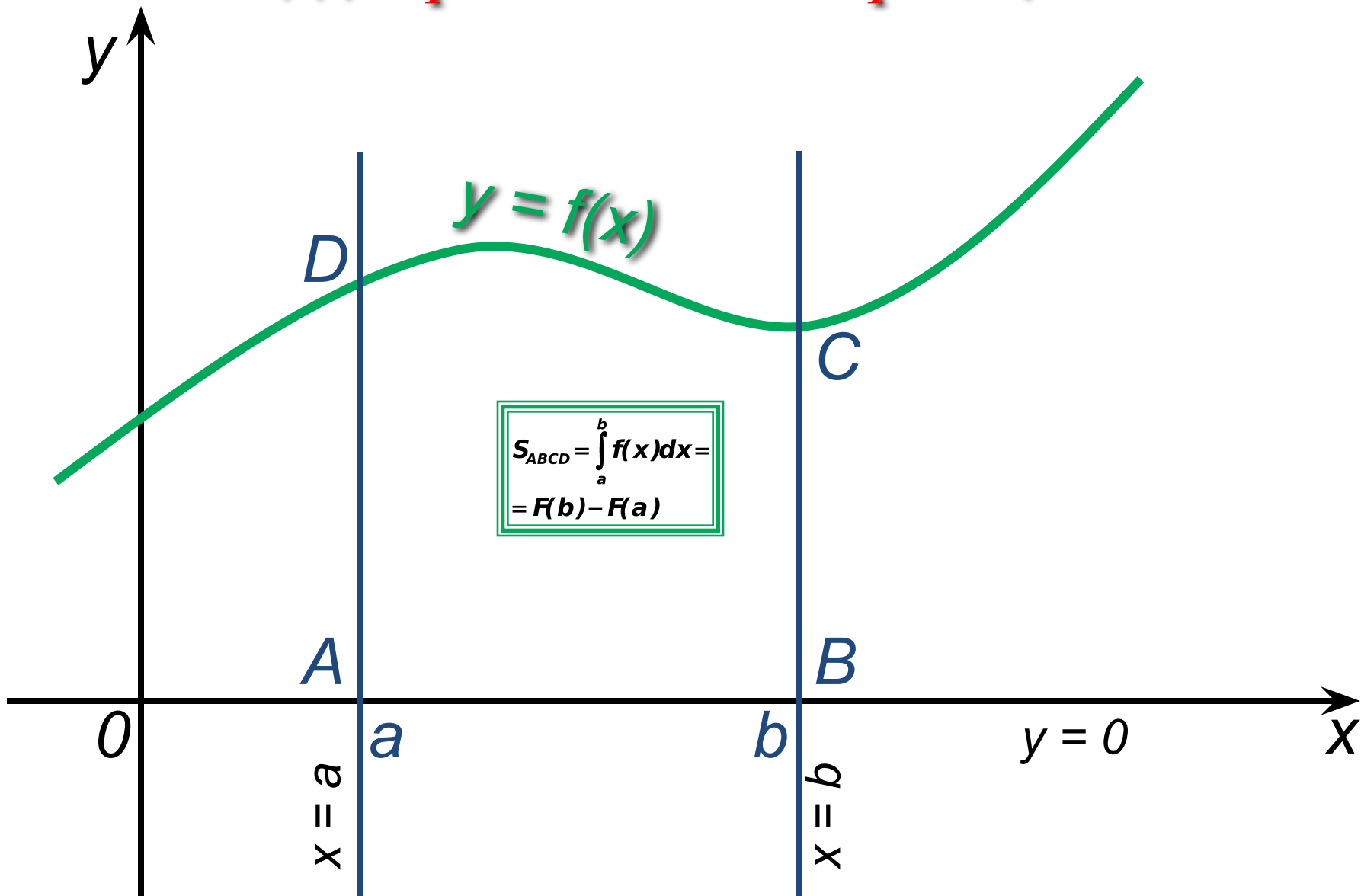
сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,
и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

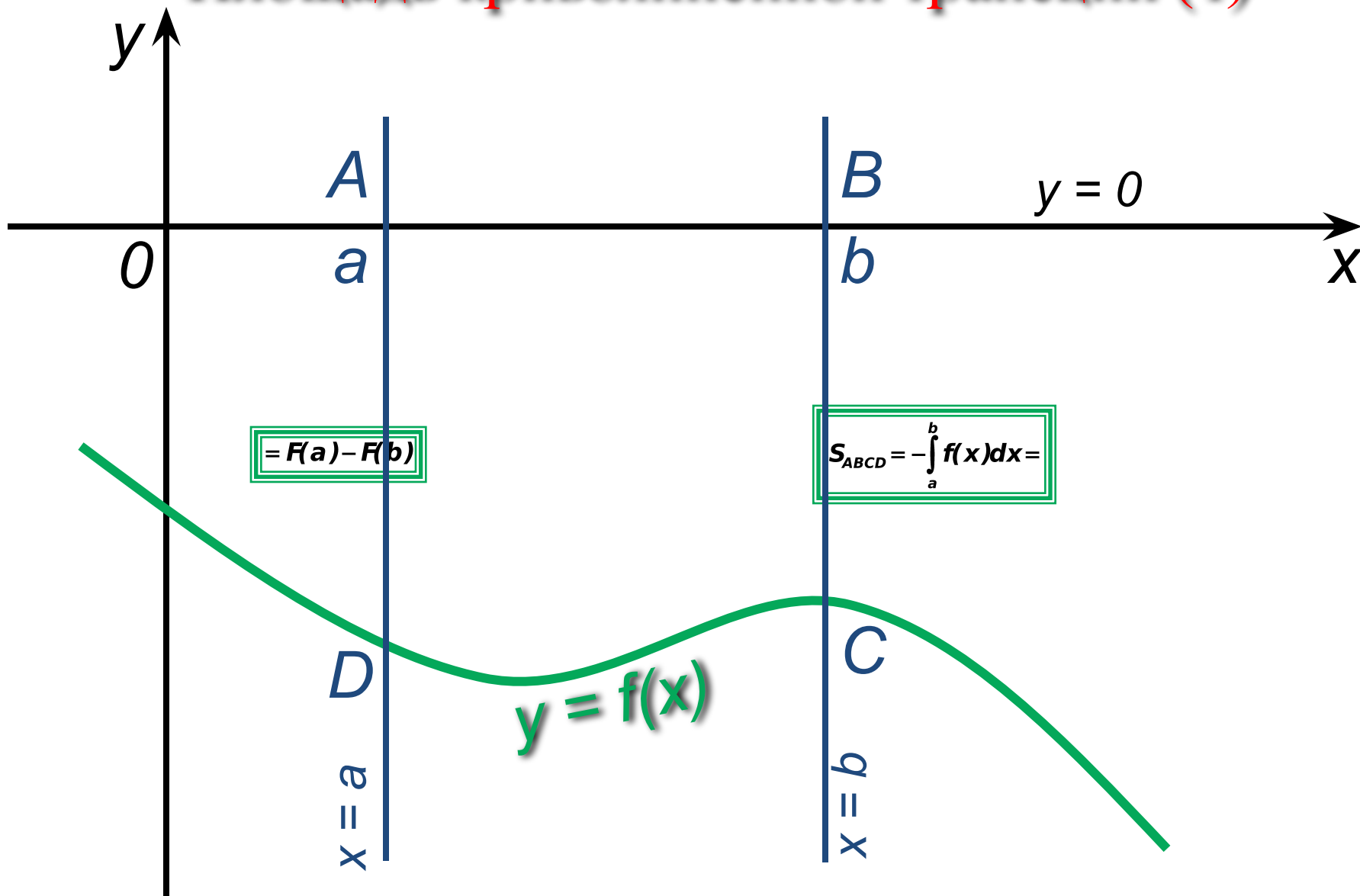
$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 =$$
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3} \Big|_3^{10} =$$
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

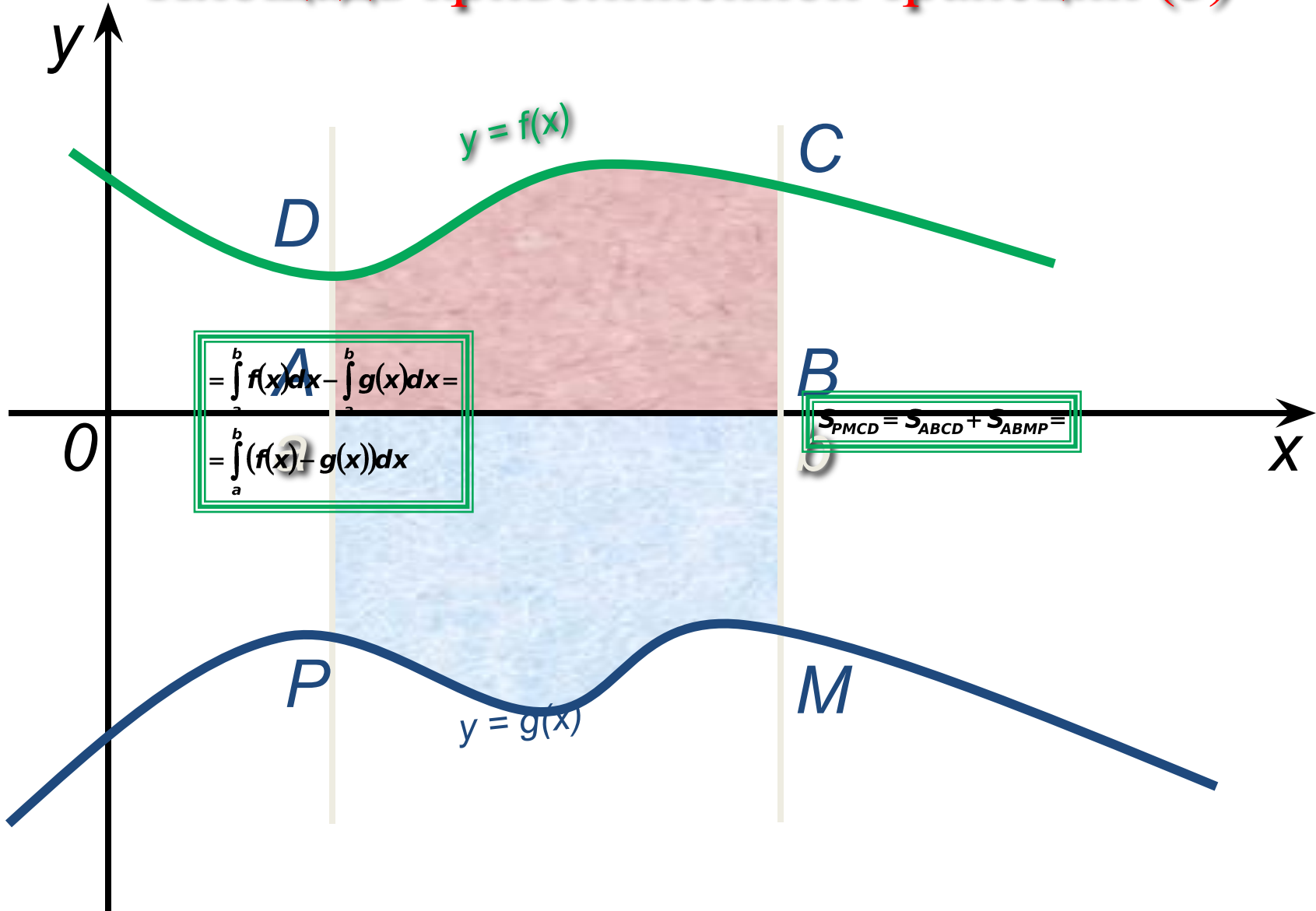
Площадь криволинейной трапеции



Площадь криволинейной трапеции (1)

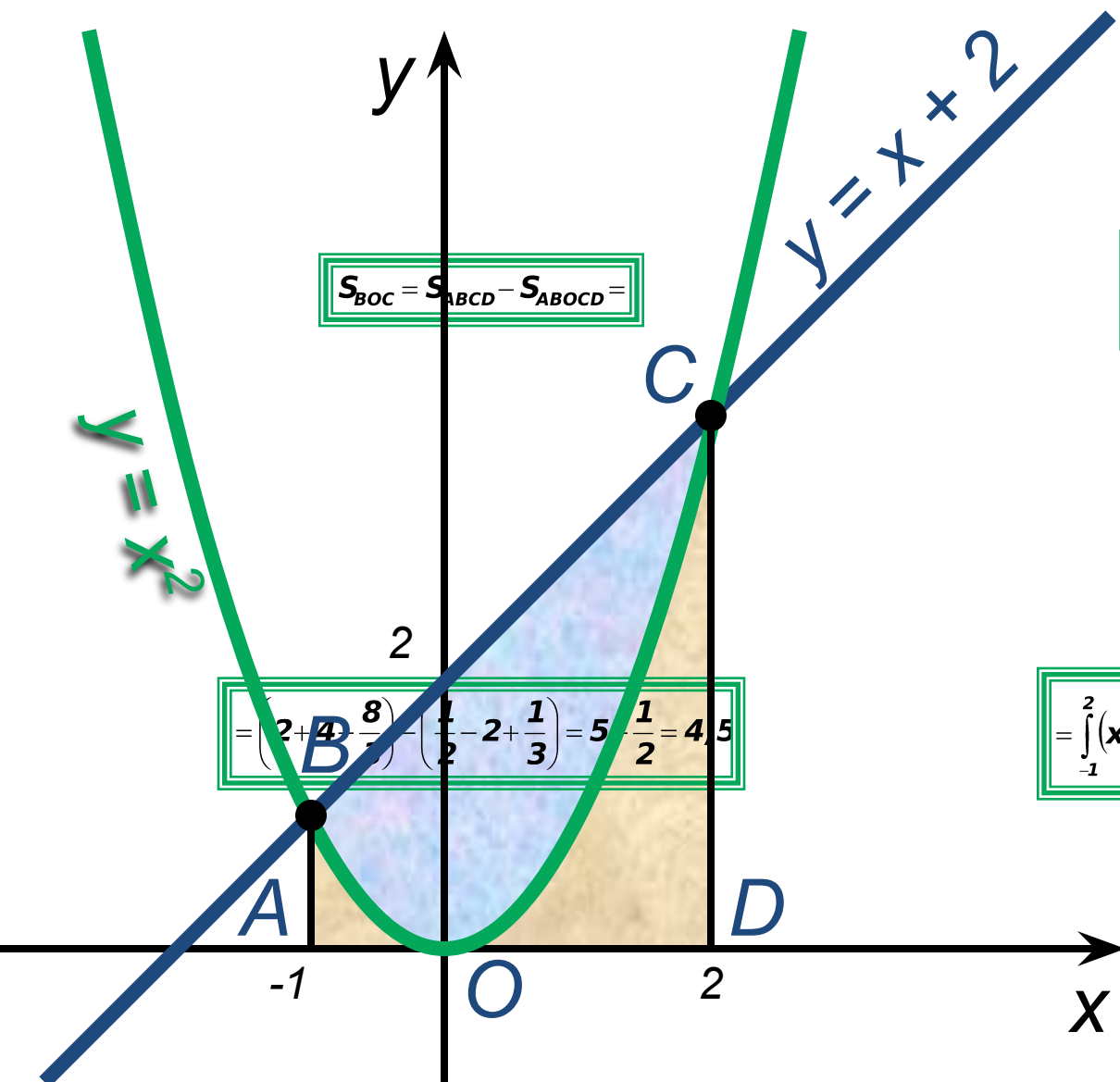


Площадь криволинейной трапеции (3)



Пример 1:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



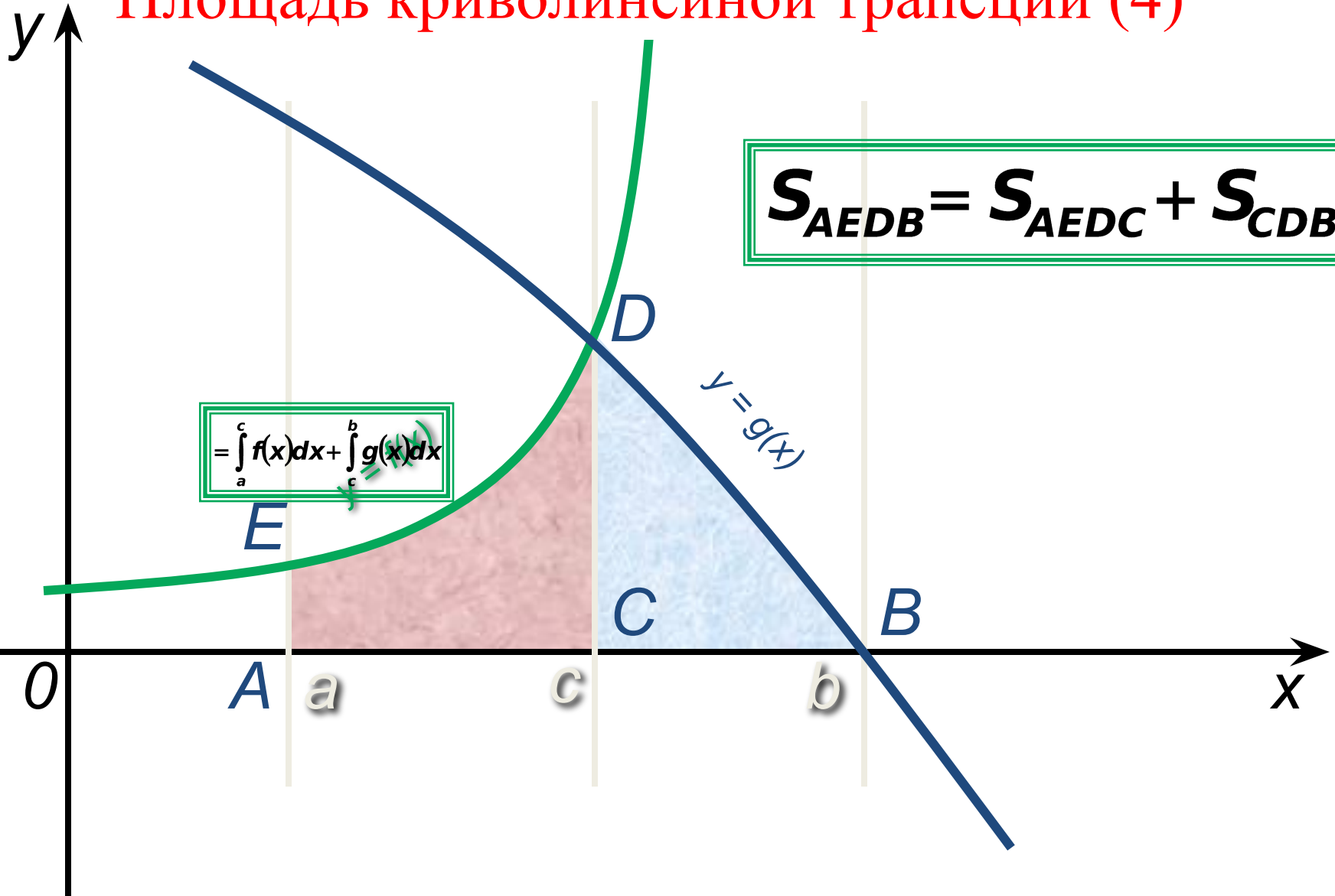
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^2 (x+2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

$$= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

Площадь криволинейной трапеции (4)

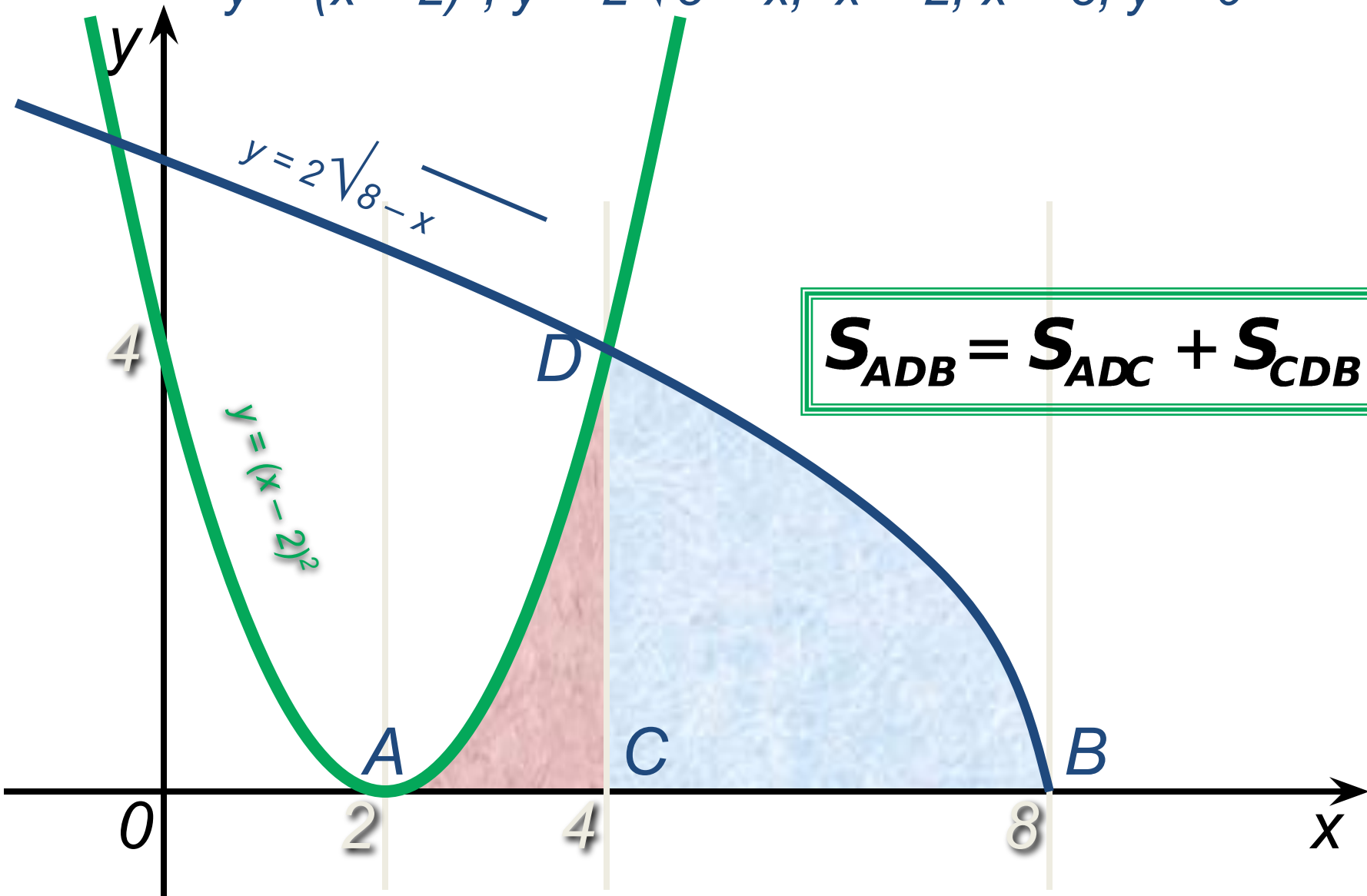


$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$

$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_2^4 - \frac{4(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \Big|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(2 - 2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8 - 8)\sqrt{8 - 8}}{3} - \frac{4(8 - 4)\sqrt{8 - 4}}{3} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$