Первообразная. Интеграл. Площадь криволинейной трапеции.

(11 класс)

Учитель математики МАОУ
«СОШ№45», Калининграда
Маврина Т.В.

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке, если для всех *x* из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Если $F(x)$– первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке, где C –произвольная постоянная

Таблица первообразных

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\mathrm{tg}\,x+C$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$-\mathrm{ctg}\,x+C$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила нахождения первообразных

Если *$F(x)$*– первообразная для функции *$f(x)$*, а *$G(x)$*– первообразная для функции *$g(x)$*, то *$F(x)+G(x)$*– первообразная для функции *$f(x)+g(x)$*

Первообразная суммы равна сумме первообразных

Если *F(x)*– первообразная для функции *f(x)*, а *а –константа*, то *aF(x)*– первообразная для функции *af(x)*

Постоянный множитель можно выносить за знак первообразной

Если *F(x)* – первообразная для функции *f(x)*, а *k и b*- константы, причем $k \neq 0$

то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ **-первообразная для функции** $f(kx+b)$

Показать, что функция $F(x)=\frac{x^5}{5}+1$

является первообразной для функции

$$f(x)=x^4$$

Решение:

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}+1\right)'=\frac{5x^4}{5}=x^4=f(x)$$

Показать, что функция $F(x) = 1 + \sin 2x$

является первообразной для функции

$$f(x) = 2\cos 2x$$

Решение:

$$F'(x) = \left(1 + \sin 2x\right)' = 2\cos 2x = f(x)$$

Найти первообразные для функции

$$f(x) = 5x^3 + e^{2x+7} - 4\cos x$$

Решение:

$$F(x) = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} e^{2x+7} - 4\sin x + C$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

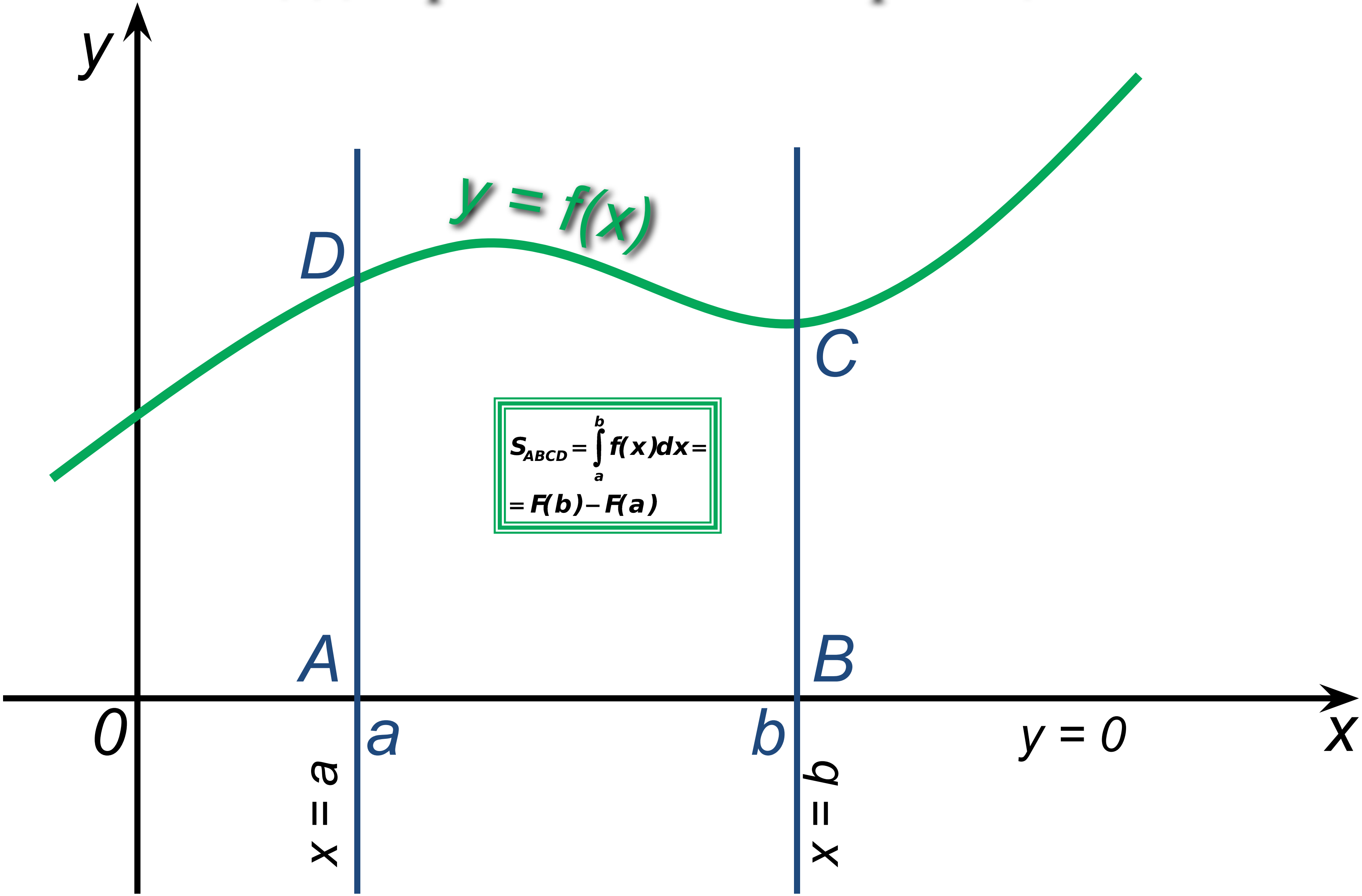
$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

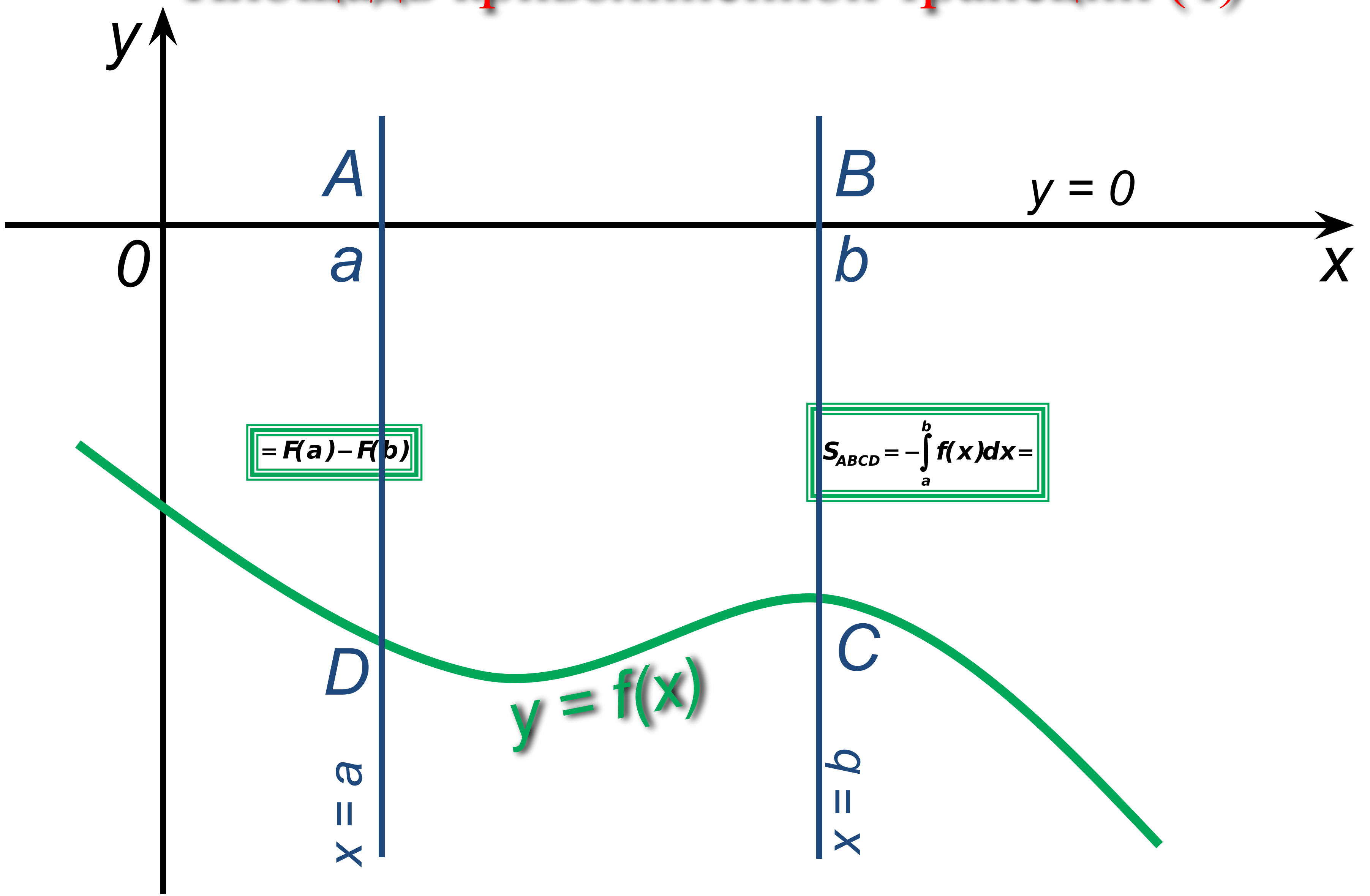
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

Площадь криволинейной трапеции

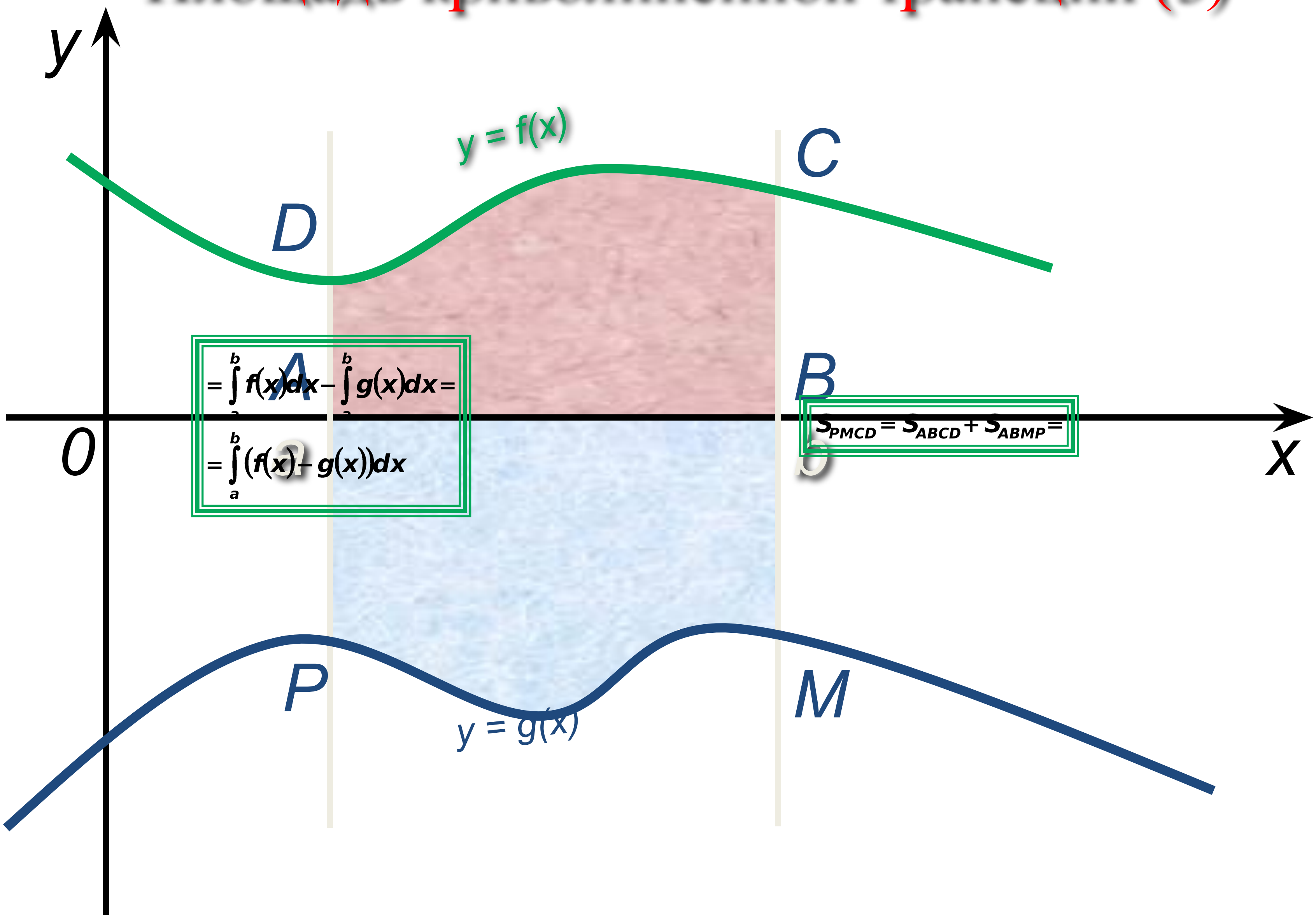


$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Площадь криволинейной трапеции (1)



Площадь криволинейной трапеции (3)



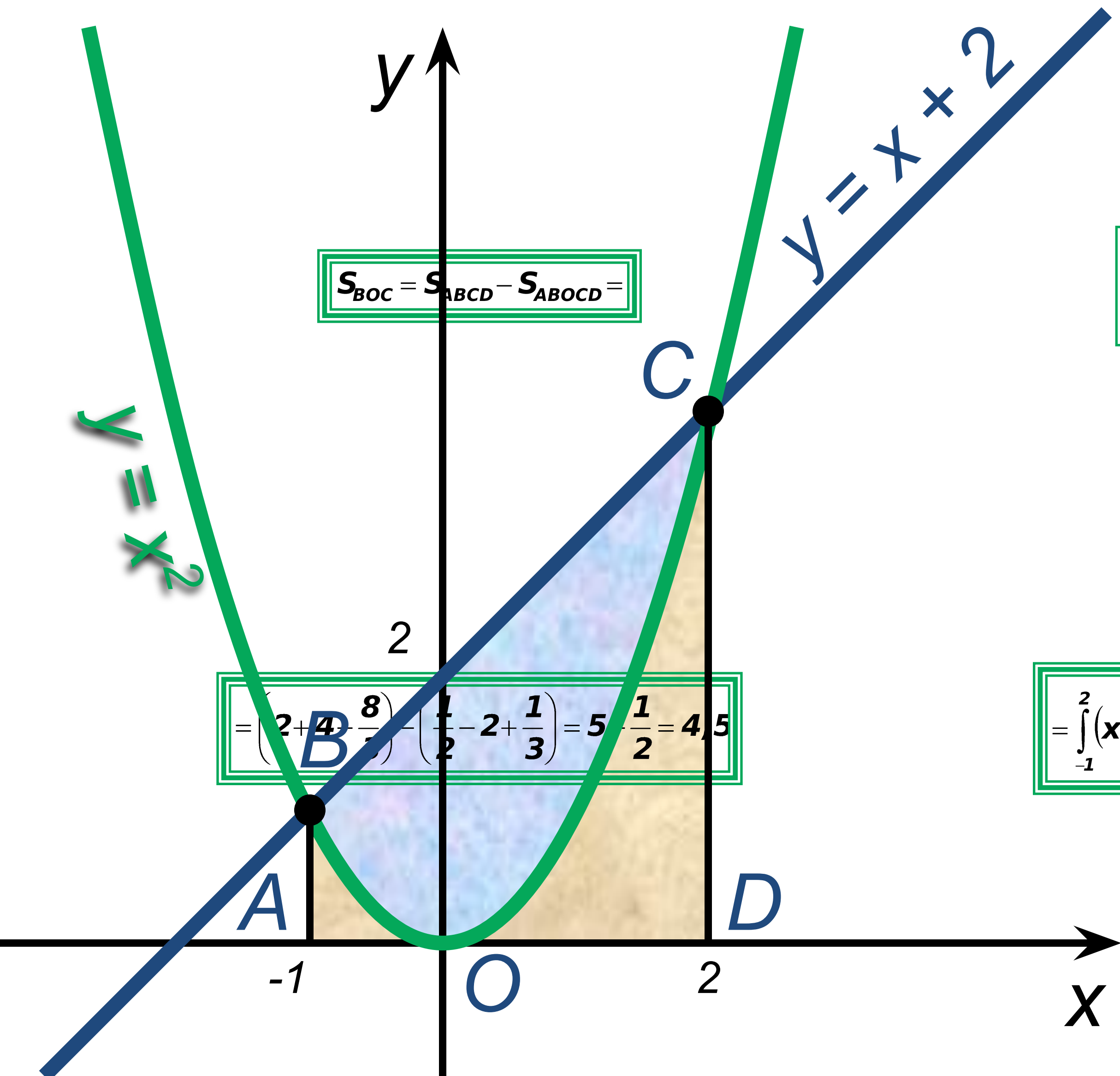
$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример 1:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2)\,dx =$$

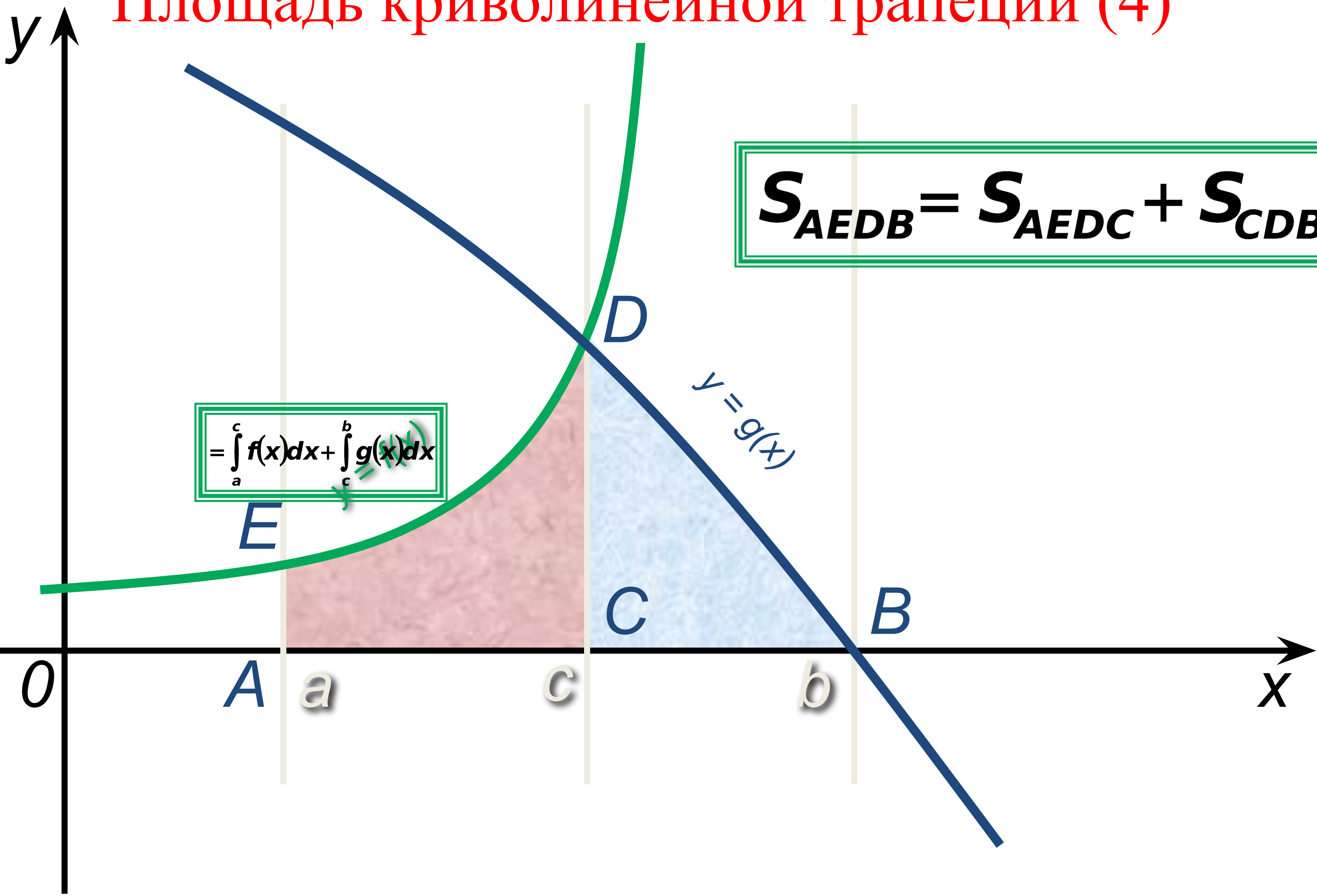
$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)

$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

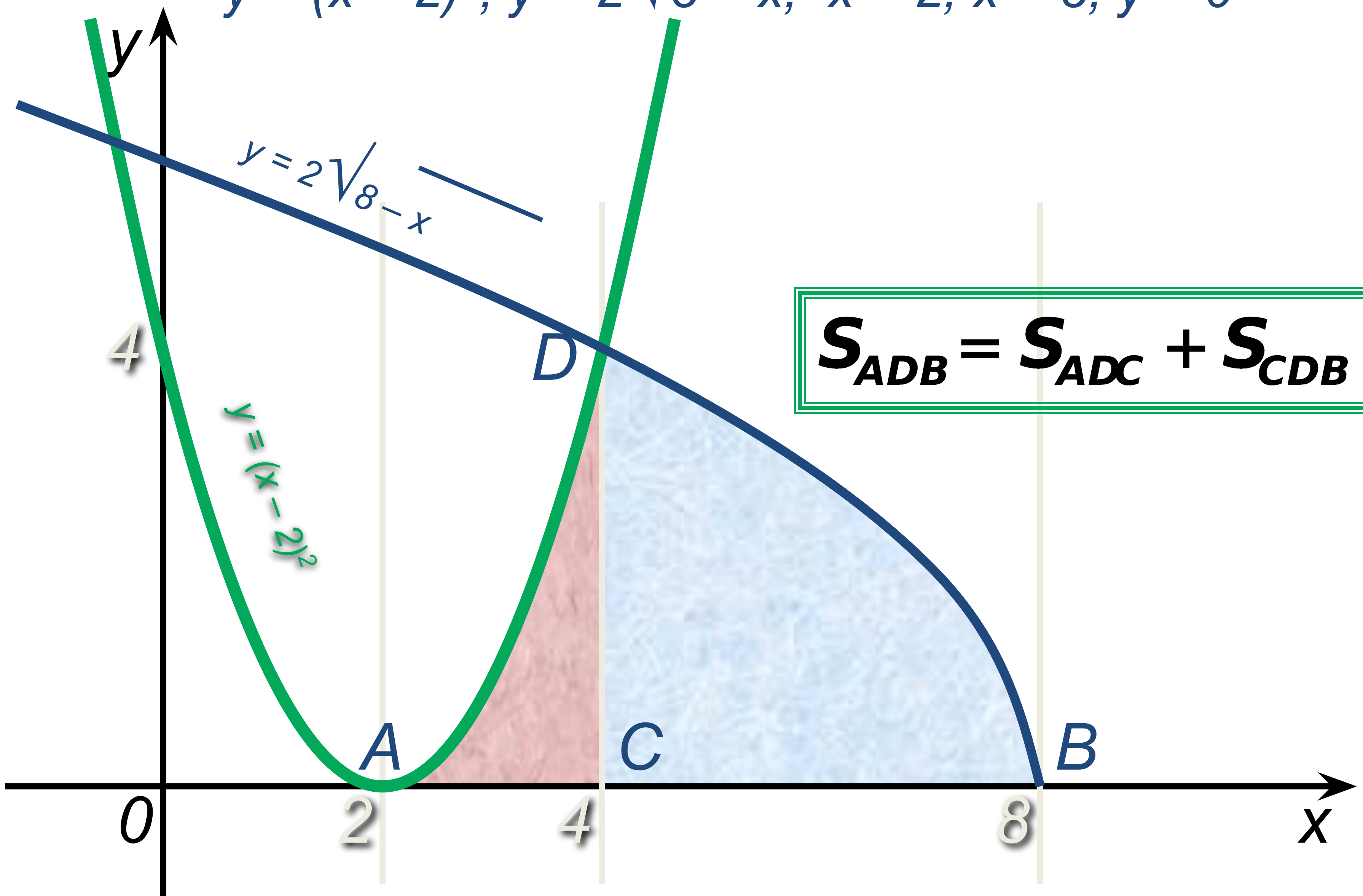
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x - 2)^2$, $y = 2\sqrt{8 - x}$, $x = 2$, $x = 8$, $y = 0$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$