тайное становится явным

Авторы проекта:
Борзова Дарья ,
Соглаева Надежда,
8 г класс ,
МОУ лицей №66.

Руководитель:
Гетманцева Лариса Николаевна

Проблемный вопрос

- Какие способы решения квадратных уравнений наиболее рациональные?

Цели исследования

- Рассмотреть способы решений квадратных уравнений.
- Найти наиболее рациональные способы решений.

Ход исследования

- Сформулировать основные понятия.
- Рассмотреть способы решений квадратных уравнений.
- Сравнить способы решений.
- Выбрать наиболее рациональный способ решения.
- Сделать выводы.

Гипотеза

- Все способы решений квадратных уравнений равноценны.

Основные понятия

- <u>*Определение 1.*</u> **Квадратным уравнением** называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0,$

  где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, причём $a \neq 0$.
- Коэффициенты $a, b.\ c$ различают по названиям: a – **первый или старший, коэффициент**; b – **второй коэффициент, или коэффициент при** x; c – **свободный член.**

Основные понятия

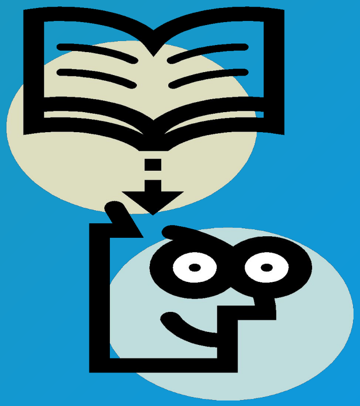
- *Определение 2.* **Полное квадратное уравнение** – это уравнение, у которого коэффициенты *b, c* отличны от нуля. **Неполное квадратное уравнение** – это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов *b, c* равен нулю.

Основные понятия

- Определение 3. Квадратное уравнение называют **приведённым**, если его старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют **неприведённым**, если старший коэффициент отличен от 1.

Виды неполных квадратных уравнений

- 1) в=0, с=0, то $ax^2=0$;
- 2) с=0, в≠0, то $ax^2+вx=0$;
- 3) в=0, с≠0, то $ax^2+c=0$.



Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2=0$

$ax^2=0,$

$x^2=0,$

$x=0.$

Пример:

$8x^2=0,$

$x^2=0,$

$x=0.$

Ответ: 0.

Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2+bx=0$

$ax^2+bx=0,$

$x(ax+в)=0,$

$x=0$ или $ax+в=0,$

$x_1=0,\ x_2=-b/a.$

ПРИМЕР:

$3x^2+9x=0,$

$3x(x+3)=0,$

$x_1=0,\ x_2=-3.$

Ответ: $-3;0.$

Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2 + c = 0$

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 = -c$,

$x^2 = -c/a$.

Если $(-c/a) > 0$, то уравнение имеет 2 корня.

Если $(-c/a) < 0$, , то уравнение не имеет корней.

ПРИМЕР 1: $4x^2 - 16 = 0$,

$4x^2 = 16$,

$x^2 = 4$,

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Ответ: -2;2.

ПРИМЕР 2: $3x^2 + 10 = 0$,

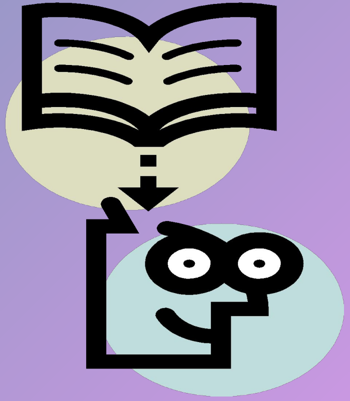
$3x^2 = -10$.

Уравнение не имеет действительных корней.

Для эрудитов

Если вам скажут :

«Квадратное уравнение , дискриминант которого меньше нуля , не имеет решение» , можете блеснуть эрудицией , уточнив : « Не имеет решение в действительных числах , в комплексных же имеет целых два корня».



Решение приведённого квадратного уравнения разложением его на множители

Решить уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 0.$

РЕШЕНИЕ: Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$*, используя способ группировки.*

$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) =$

$= x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(x-3).$

Значит, уравнение можно переписать в виде

$(x-1)(x-3) = 0,$

$x-1 = 0$ *или* $x-3 = 0,$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3.$

Ответ: 1;3.

Решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена

- *ПРИМЕР 1:*

  $x^2 + 10x + 25 = 0,$

  $(x + 5)^2 = 0,$

  $x + 5 = 0,$

  $x = -5.$

  Ответ: -5.

- *ПРИМЕР 2:*

  $x^2 + 8x - 1 = 0,$

  $x^2 + 2x \cdot 4 - 1 = 0,$

  $x^2 + 2x \cdot 4 + 16 = 16 + 1,$

  $(x + 4)^2 = 17,$

  $x + 4 = -\sqrt{17}$ *или* $x + 4 = \sqrt{17},$

  $x_1 = -4 - \sqrt{17},\ x_2 = -4 + \sqrt{17}.$

Графический способ решений квадратных уравнений

Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

1) $a=1$, $в=-2$, $x_0 = -в/2a = 1$,

$y_0 = 1-2-3 = -4$.

Значит, вершиной параболы служит точка (1; -4), а осью параболы служит прямая $x=1$.

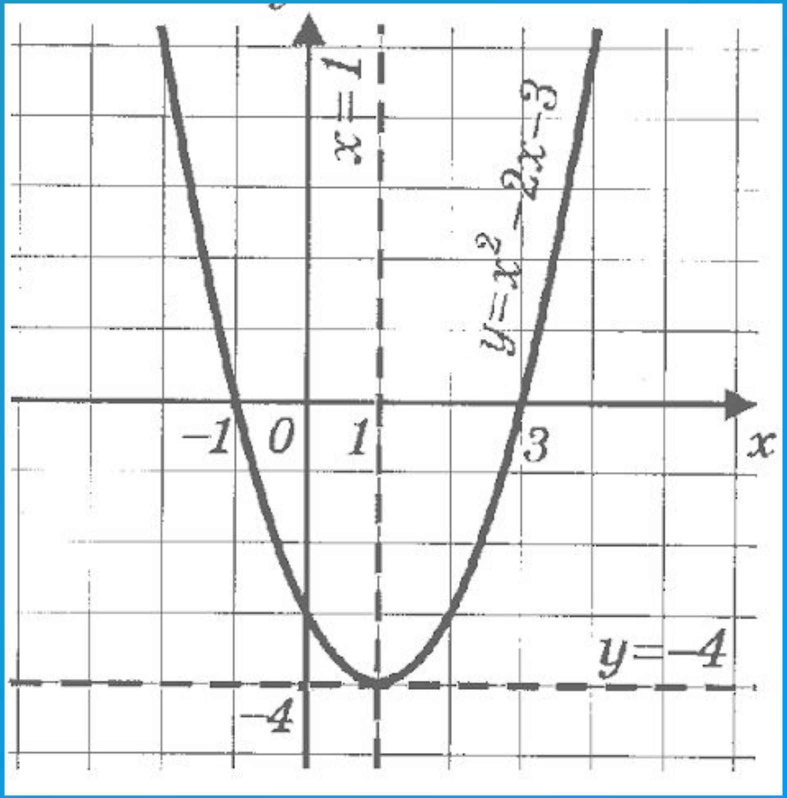
2) Возьмем точки, симметричные относительно оси параболы.

X	-1	0	2	3
y	0	-3	-3	0

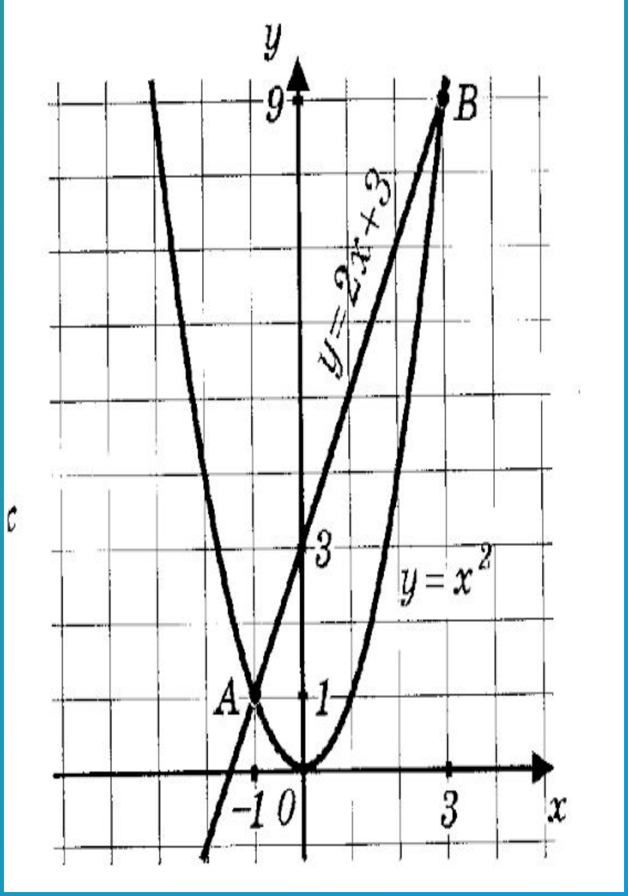
3) Через точки проводим параболу

Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения параболы с осью x.

4) Ответ: −1; 3.



Графический способ решений квадратных уравнений



Решить уравнение
$x^2 - 2x - 3 = 0$.

Преобразуем уравнение к виду $x^2 = 2x + 3$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ *и* $y = 2x + 3$.

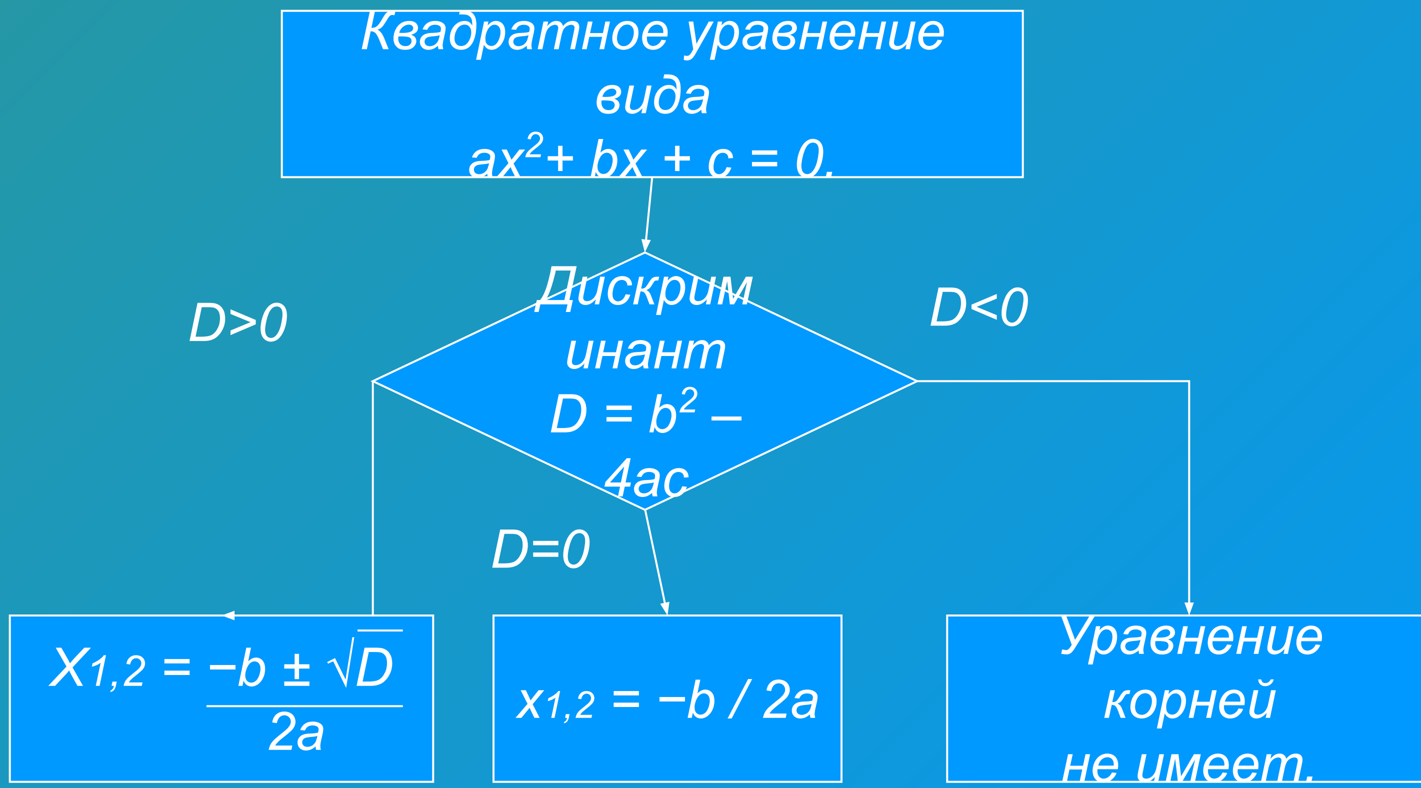
Они пересекаются в двух точках $A(-1; 1)$ *и* $B(3; 9)$. *Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B.*

Ответ : $-1; 3$.

Замечание

- Несмотря на обилие способов графического решения квадратных уравнений, они не дают стопроцентной гарантии решения любого квадратного уравнения.

Алгоритм решения полного квадратного уравнения



Примеры решений полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 1. $x^2 + 3x - 5 = 0.$

РЕШЕНИЕ: $a = 1,\ b = 3,\ c = -5.$

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 29.$

Так как D>0, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находятся по формулам

$$x_1 = \ ;\ \boxed{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}}$$

$$x_2 = \boxed{\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{=3=\sqrt{29}}{2}}$$

Примеры решения полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 2. *Решить уравнение* $-9x^2 + 6x - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на -1, получим $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Здесь $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$.

$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$.

Так как $D = 0$, *то данное уравнение имеет два одинаковых корня.*

Корни находятся по формуле $x_1 = x_2 = -b / 2a = =1/3$.

Примеры решения полных квадратных уравнений

ПРИМЕР 3.

Решить уравнение $2x^2 - x + 3{,}5 = 0.$

РЕШЕНИЕ. *Здесь* $a=2$, $b= -1$, $c=3{,}5.$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 28 = -27.$

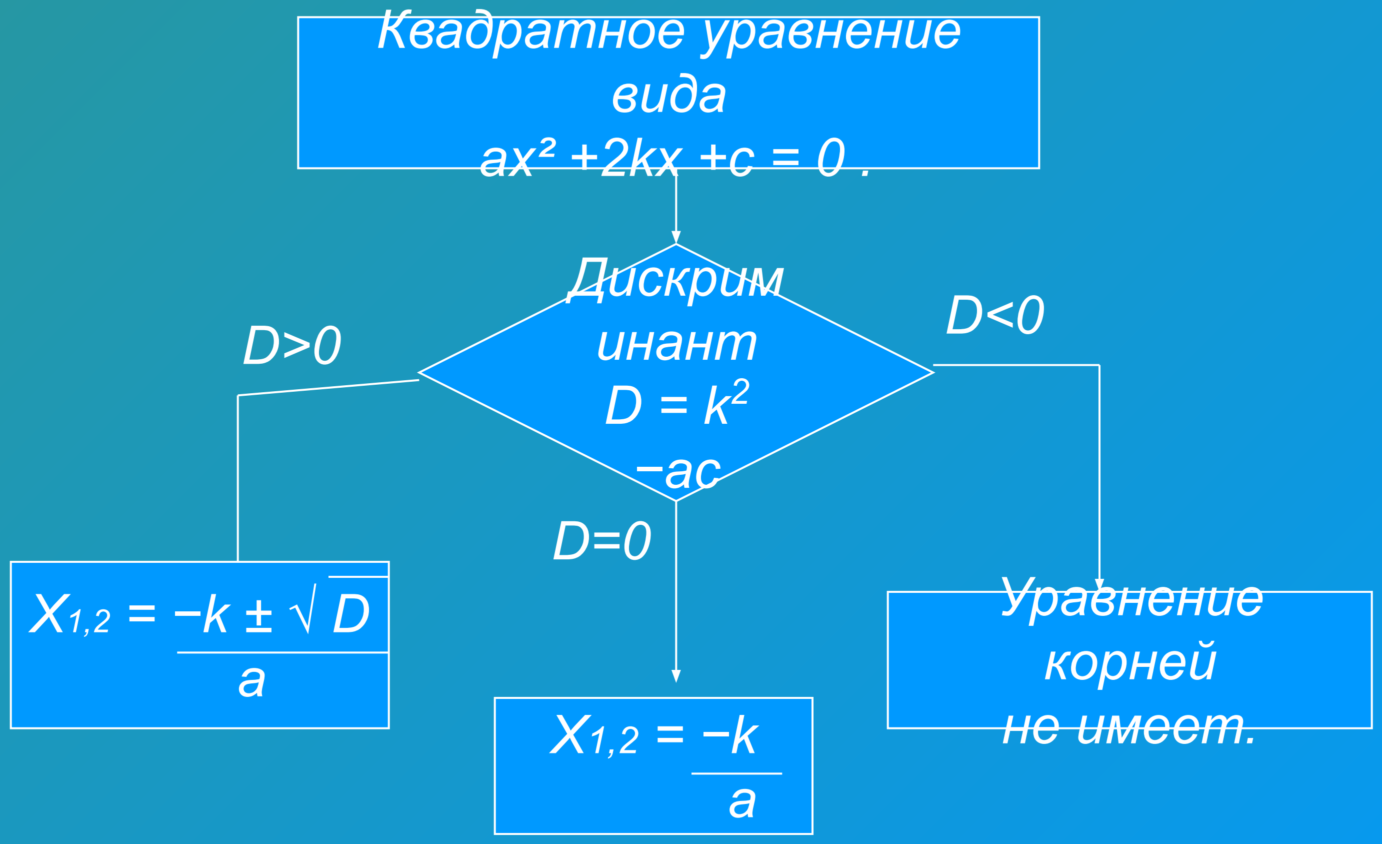
Так как $D<0$, *то данное квадратное уравнение не имеет действительных корней.*

Полезно запомнить

- Слово дискриминант происходит от латинского discriminans - «различающий».

Дискриминант «различает» квадратные уравнения по числу корней.

Ещё одна формула корней квадратного уравнения



Решим квадратные уравнения следующими способами :

а) разложением на множители ;

б) графическим ;

в) с использованием формул.

Решая уравнения, засекли время решения (в минутах) для каждого способа решения .

1 . $2x^2 - 9x = 0$;

2 . $x^2 - 64 = 0$;

3 . $x^2 - 14x + 49 = 0$;

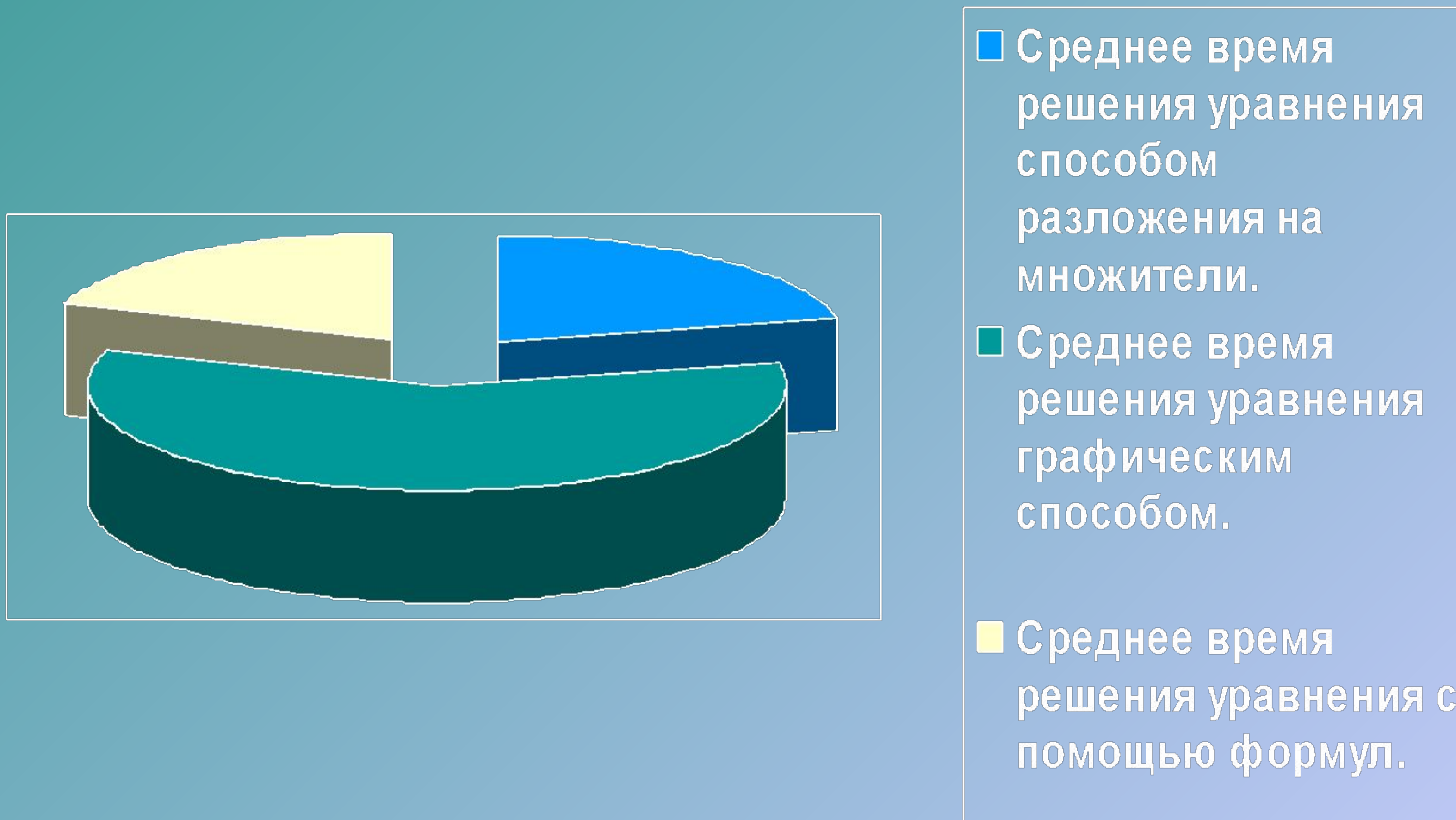
4 . $x^2 + 6x + 8 = 0$;

5 . $4x^2 - 7x - 7{,}5 = 0$;

6 . $2x^2 - 10x + 1 = 0$;

7 . $2x^2 = 3x + 2$.

Результаты решения уравнений



ВЫВОДЫ

Из диаграмм видно , что на решение уравнений графическим способом затрачено времени больше, чем на два других способа решения и не к любому квадратному уравнению его можно применить.

На решение уравнений способом разложения на множители и по формулам затрачено в среднем равное количество времени. Эти способы равноценны. Алгоритм решения квадратного уравнения по формулам дискриминанта является универсальным. Он применим к любому квадратному уравнению. К неполным и приведённым квадратным уравнениям применим способ разложения на множители.

Информационные ресурсы

- Мордкович А. Г. Алгебра. 8 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – 3-е издание, доработанное – М.: Мнемозина, 2001. – 223с.
- Мордкович А. Г. и др. Алгебра 8 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений. – 2-е издание. – М.: Мнемозина, 2001. – 247с.