Теорема Безу. Схема Горнера

Этье́нн Безу́ (1730 – 1783) – французский математик, член Парижской академии наук

Преподавал математику в Училище гардемаринов (1763) и Королевском артиллерийском корпусе (1768).

Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.)
Автор шеститомного«Курса математики» (1764-1769), неоднократно переиздававшегося.

Теорема Безу: **Остаток от деления многочлена *P(x)* на двучлен *(x – a)* равен *P(a)***

Доказательство.

Поделим с остатком многочлен $P(x)$ на двучлен $(x – a)$:

$$P(x) = Q(x)\,(x - a) + R(x)$$

Т.к. степень R меньше степени $(x – a)$, то $R(x)$ – многочлен нулевой степени, т.е.

$R(x) = R$ – число.

При $x = a$, имеем $P(a) = Q(a)\,(a - a) + R(a.$

$P(a) = R(a)$. *чтд*

Теорема Безу: **Остаток от деления многочлена *P(x)* на двучлен *(x – a)* равен *P(a)***

Следствия

1. *Число a является корнем многочлена P(x) тогда и только тогда, когда P(x) делится без остатка на двучлен (x – a)*

   (отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена тождественно множеству корней соответствующего уравнения)

2. *Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами*

   (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми)

3. Пусть α — целый корень приведённого многочлена A(x) с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число A(k) делится на α-k

4. *Если число a является корнем многочлена P(x), то этот многочлен можно представить в виде произведения (x – a) $P_1(x)$, где $P_1(x)$ - многочлен n-1–й степени.*

Приложения

Теорема Безу и следствия из неё позволяют легко находить рациональные корни уравнений с целыми (рациональными) коэффициентами.

$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение:

1. Делители свободного члена: ± 1.

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$

$f(1) = -4;$

$f(-1) = 0.$

Имеем, что число -1 – корень уравнения.

3. По теореме 2 левую часть уравнения можно представить в виде произведения (x+1)P(x), где P(x) – многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен P(x), разделим $x^3 - x^2 - 3x - 1$ на (x+1) «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - x^2 - 3x - 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3 + x^2 \phantom{{}-3x-1} & x^2 - 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-\,-2x^2 - 3x \phantom{{}-1} & \\
-2x^2 - 2x \phantom{{}-1} & \\ \cline{1-1}
-\,-x - 1 & \\
-x - 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Итак, $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1)$.

Из уравнения $(x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$ получаем

$$
\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.
$$

Ответ: -1; $1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$.

Уильям Джордж Горнер (1786 – 1837)

Английский математик

Основные труды по теории алгебраических уравнений.
С его именем связана (1819) схема Горнера деления многочлена на двучлен .

Частный случай: уравнение четвертой степени

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

x_0	Коэффициент при x^4 a_0	Коэффициент при x^3 a_1	Коэффициент при x^2 a_2	Коэффициент при x a_3	Свободный член a_4
	$b_0 = a_0$ коэффициент при x^3	$b_1 = b_0x_0 + a_1$ коэффициент при x^2	$b_2 = b_1x_0 + a_2$ коэффициент при x	$b_3 = b_2x_0 + a_3$ свободный член	$b_4 = b_3x_0 + a_4$ остаток

Делимое = делитель * частное + остаток

$$\underbrace{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}_{\text{многочлен 4-й степени}} = (x - x_0) * \underbrace{(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)}_{\text{многочлен 3-й степени}} + \underbrace{b_4}_{\text{остаток}}$$

Решение уравнений высших степеней (деление многочлена с помощью схемы Горнера)

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления многочлена с помощью **схемы Горнера:**

Если $p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x-a)$, то

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_{n-1} & p_n \\
\hline
a & b_0 = p_0 & b_1 = p_1 + b_0 \cdot a & b_2 = p_2 + b_1 \cdot a & b_3 = p_3 + b_2 \cdot a & \ldots & b_{n-1} = p_{n-1} + b_{n-2} \cdot a & b_n = p_n + b_{n-1} \cdot a
\end{array}
$$

Решить уравнение $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$.

Решение:

Делители свободного члена: $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 6, \quad \pm 12$.

$P(1) = 1 - 1 - 8 + 12 \neq 0,$

$P(-1) = -1 - 1 + 8 + 12 \neq 0,$

$P(2) = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$

Число **2** является корнем уравнения.

Поделим P(x) на x-2

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2 + x - 6), \quad т.е.$$

$$(x-2)(x^2 + x - 6) = 0,$$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0, \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2, -3.

Решите уравнение $x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0$.

Решение:

Делители свободного члена: $\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \pm6.$

P(1)=1+5+5-5-6=0

	1	5	5	-5	-6
1	1	6	11	6	0
-1	1	5	6	0	

$(x-1)(x^3+6x^2+11x+6)=0$

P(-1)=1-5+5+5-6=0

$(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)=0$

$x^2+5x+6=0$

$x_1=-3;\quad x_2=-2$

Ответ: 1; -1; -3; -2.

$$x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0.$$

Решение:

Делители свободного члена: $\pm1;\quad \pm2;\quad \pm3;\quad \pm4;\quad \pm6;\quad \pm12$.

$P(1)=1-4-13+28+12\neq0,$

$P(-1)=1+4-13-28+12\neq0,$

$P(2)=16-32-52+56+12=0,$

т.е. число 2 является корнем уравнения

	1	-4	-13	28	12
2	1	-2	-17	-6	0
-3	1	-5	-2	0	

Имеем $P(x)=(x-2)(x^3-2x^2-17x-6)=0$

P(-3)=0, т.е. число –3 является корнем уравнения

$P(x)=(x-2)(x+3)(x^2-5x-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x+3=0, \\ x^2-5x-2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-3, \\ x=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}, \\ x=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-3,\quad 2,\quad \dfrac{5-\sqrt{33}}{2},\quad \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}.$