

# *Теорема Безу. Схема Горнера*



**Этьенн Безу́ (1730 – 1783) –**  
французский математик, член  
Парижской академии наук

Преподавал математику в Училище  
гардемаринов (1763) и Королевском  
артиллерийском корпусе (1768).

Основные его работы относятся к  
алгебре (исследование систем  
алгебраических уравнений высших  
степеней, исключение неизвестных в  
таких системах и др.)

Автор шеститомного «Курса  
математики» (1764-1769),  
неоднократно переиздававшегося.

**Теорема Безу: Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на двучлен  $(x - a)$  равен  $P(a)$**

Доказательство.

Поделим с остатком многочлен  $P(x)$  на двучлен  $(x - a)$ :

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R(x)$$

Т.к. степень  $R$  меньше степени  $(x - a)$ , то  $R(x)$  – многочлен нулевой степени, т.е.

$R(x) = R$  – число.

При  $x = a$ , имеем  $P(a) = Q(a)(a - a) + R(a)$ .

$$P(a) = R(a). \quad \text{что}$$

## Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$

### Следствия

- 1. Число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится без остатка на двучлен  $(x - a)$   
(отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена тождественно множеству корней соответствующего уравнения)*
- 2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами  
(если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми)*
- 3. Пусть  $\alpha$  — целый корень приведённого многочлена  $A(x)$  с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого  $k$  число  $A(k)$  делится на  $\alpha - k$*
- 4. Если число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$ , то этот многочлен можно представить в виде произведения  $(x - a) P_1(x)$ , где  $P_1(x)$  - многочлен  $n-1$ -й степени.*

### Приложения

Теорема Безу и следствия из неё позволяют легко находить рациональные корни уравнений с целыми (рациональными) коэффициентами.

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Решение:

1. Делители свободного члена:  $\pm 1$ .

$$2. f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$$

$$f(1) = -4;$$

$$f(-1) = 0.$$

Имеем, что число  $-1$  – корень уравнения.

3. По теореме 2 левую часть уравнения можно представить в виде произведения  $(x+1)P(x)$ , где  $P(x)$  – многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен  $P(x)$ , разделим  $x^3 - x^2 - 3x - 1$  на  $(x+1)$  «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 3x - 1 & x + 1 \\ x^3 + x^2 & x^2 - 2x - 1 \\ \hline -2x^2 - 3x & \\ -2x^2 - 2x & \\ \hline -x - 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итак,  $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1)$ .

Из уравнения  $(x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$  получаем

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $-1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$ .



## Уильям Джордж Горнер (1786 – 1837)

Английский математик

Основные труды по теории алгебраических уравнений.

С его именем связана (1819) схема Горнера деления многочлена на двучлен .

## Частный случай: уравнение четвертой степени

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

$x_0$	Коэффициент при $x^4$	Коэффициент при $x^3$	Коэффициент при $x^2$	Коэффициент при $x$	Свободный член
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
	$b_0 = a_0$ коэффициент при $x^3$	$b_1 = b_0x_0 + a_1$ коэффициент при $x^2$	$b_2 = b_1x_0 + a_2$ коэффициент при $x$	$b_3 = b_2x_0 + a_3$ свободный член	$b_4 = b_3x_0 + a_4$ остаток

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Делимое} & & = \text{делитель} & * & \text{частное} & + & \text{остаток} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4} & = & (x - x_0) & * & \underline{(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)} & + & \underline{b_4} \\
 \text{многочлен 4-й степени} & & & & \text{многочлен 3-й степени} & & \text{остаток}
 \end{array}$$

## Решение уравнений высших степеней (деление многочлена с помощью схемы Горнера)

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления многочлена с помощью **схемы Горнера**:

Если  $p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - a)$ , то

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ \hline a & b_0 = p_0 & b_1 = p_1 + b_0 \cdot a & b_2 = p_2 + b_1 \cdot a & b_3 = p_3 + b_2 \cdot a & \dots & b_{n-1} = p_{n-1} + b_{n-2} \cdot a & b_n = p_n + b_{n-1} \cdot a \end{array} \quad |$$



Решить уравнение  $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ .

Решение:

Делители свободного члена:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ .

$$P(1) = 1 - 1 - 8 + 12 \neq 0,$$

$$P(-1) = -1 - 1 + 8 + 12 \neq 0,$$

$$P(2) = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$$

Число 2 является корнем уравнения.

Поделим  $P(x)$  на  $x-2$

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x^2 + x - 6), \text{ т.е.}$$

$$(x - 2)(x^2 + x - 6) = 0,$$

Имеем: 
$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ x = -3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: 2, -3.

Решите уравнение  $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$ .

Решение:

Делители свободного члена:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

$$P(1) = 1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$$

	1	5	5	-5	-6
<b>1</b>	1	6	11	6	0
<b>-1</b>	1	5	6	0	

$$(x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = 0$$

$$P(-1) = 1 - 5 + 5 + 5 - 6 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -2$$

Ответ: 1; -1; -3; -2.

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0.$$

Решение:

Делители свободного члена:  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 3$ ;  $\pm 4$ ;  $\pm 6$ ;  $\pm 12$ .

$$P(1) = 1 - 4 - 13 + 28 + 12 \neq 0,$$

$$P(-1) = 1 + 4 - 13 - 28 + 12 \neq 0,$$

$$P(2) = 16 - 32 - 52 + 56 + 12 = 0,$$

т.е. число 2 является корнем уравнения

	1	-4	-13	28	12
2	1	-2	-17	-6	0
-3	1	-5	-2	0	

$$\text{Имеем } P(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 17x - 6) = 0$$

$P(-3)=0$ , т.е. число  $-3$  является корнем уравнения

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x+3=0, \\ x^2-5x-2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=-3, \\ x=\frac{5+\sqrt{33}}{2}, \\ x=\frac{5-\sqrt{33}}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $-3, 2, \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ .