06.12.2018

Тема:

Элементы теории вероятностей

I. Событие

По отношению к некоторому испытанию (опыту) событие может быть ***случайным*** (может произойти, а может и не произойти в ходе этого испытания), ***достоверным*** (обязательно произойдёт) или ***невозможным*** (заведомо не произойдёт).

Элементарные события — это события, которые могут произойти в одном испытании и которые удовлетворяют следующим условиям:

1) обязательно происходит одно из них в результате испытания;
2) происходит только одно из них (взаимно исключают друг друга);
3) не разделяются на более простые события.

Несовместные события — события, которые могут произойти в одном испытании, причём появление одного из них исключает появление другого.

Если в одном испытании могут произойти события, шансы наступления которых одинаковы, то эти события называют ***равновозможными***.

Примеры:

1. Установить, достоверным, невозможным или случайным является событие:

1) в результате броска игрального кубика появилось 3 очка;
2) в Москве наступило 30 февраля;
3) на случайно вынутой из полного набора костяшке домино общее число очков меньше 13.

Решение.

1) Так как в результате бросания могут появиться: 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очков или 6 очков, то появление 3 очков — *случайное событие*.
2) В григорианском календаре (по которому живут в нашей стране) отсутствует дата 30 февраля, поэтому данное *событие — невозможное*.
3) На костяшках домино самое большое общее число очков — 12 (что меньше, чем 13), значит, данное *событие достоверное*.

Примеры:

2. Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными:
1) на стол бросают отлитый из стали тетраэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 4;
2) наугад вынимают из коробки, в которой находятся 1 белый и 2 чёрных шара, один шар и определяют его цвет.

Решение.

1) Элементарными исходами являются: падение тетраэдра на одну из граней, на которой записано число 1, 2, 3 или 4; так как тетраэдр имеет одинаковые грани (предположительно, литьё из стали не даёт внутренних полостей), то *все исходы равновозможны*.
2) Элементарных исходов при определении цвета шара два: появление белого и появление чёрного шара; эти *исходы не являются равновозможными*, так как чёрных шаров больше, чем белых.

Примеры:

3. Определить, являются события А и В совместными или несовместными:

1) А — появление 4 очков, В — появление чётного числа очков в результате одного броска игральной кости;
2) А — появление костяшки «пусто — пусто», В — появление костяшки «один — три» в результате изъятия одной костяшки из полного набора домино.

Решение.

1) Так как 4 — число чётное, то события А и В — совместные.
2) Так как данные костяшки различны, а вынимается одна костяшка, то события А и В несовместные.

II. Комбинации событий. Противоположное событие

Суммой (объединением) событий А и В, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.
Сумму событий А и В обозначают **A + B** или **A ∪ B**.

Произведением (пересечением) событий А и В, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении и того и другого события.
Произведение событий А и В обозначают **A·B** или **A ∩ B**.

Событие $\bar{A}$ называют **противоположным событию** А, если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Примеры:

1. Из полного набора домино изымают одну костяшку. Рассматриваются события: A — вынута костяшка с дублем, B — на вынутой костяшке присутствует половинка с шестью очками. Установить, в чём состоит событие A + B; событие AB.

Ответ.

- Событие A + B состоит в изъятии костяшки либо с дублем, либо содержащей 6 очков.
- Событие AB состоит в изъятии костяшки «шесть — шесть».

2. Установить, в чём состоит событие $\overline{A}$, если событие A — появление числа очков, не большего 5, в результате одного бросания игрального кубика.

Решение. Событие A состоит в появлении одного из чисел 1, 2, 3, 4 или 5. Все элементарные исходы испытания: появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. $\Rightarrow$ Событие $\overline{A}$ состоит в появлении 6 очков.

III. Вероятность события

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов *m*, благоприятствующих событию A, к числу *n* всех элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{где } m \leq n$$

Если V — невозможное событие, U — достоверное событие, то P(V) = 0, P(U) = 1.

Примеры:

1. На стол бросают игральные кубик и тетраэдр. Найти вероятность того, что на кубике выпадет чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка (на тетраэдре считывают очки с грани, касающейся поверхности стола).

Решение.
Событие А — на кубике выпало чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка.
Общее число возможных исходов : $n = 6 \cdot 4 = 24$ (каждая из 6 граней кубика может выпасть одновременно с любой из 4 граней тетраэдра).
Благоприятствующими событию А исходами будут комбинации чётных чисел на кубике с числом 4 на тетраэдре, т. е. $m = 3$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Ответ. $\frac{1}{8}$

2. В ящике лежат 4 белых и 5 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

Решение.
Событие A — все три вынутых шара белые.
Общее число возможных исходов испытания (троек шаров, выбранных из девяти имеющихся):

$$n = C^3{}_9 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$

Благоприятствующими событию A исходами будут тройки шаров, выбранных из имеющихся четырёх белых шаров:

$$m = C^3{}_4 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Ответ. $\frac{1}{21}$

IV. Сложение вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Иногда при решении задач проще найти сначала $\mathbf{P(\overline{A})}$, а затем

$$\mathbf{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

Примеры:

1. Из полного набора домино наугад извлекается одна костяшка. Какова вероятность того, что эта костяшка либо дубль, либо «один — шесть»?

Решение.
Событие A — появление дубля, а событие B — появление костяшки «один — шесть».
В полном наборе домино (28 костяшек) семь дублей: $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$
Костяшка «один — шесть» в наборе единственная: $P(B) = \frac{1}{28}$
События A и B — несовместные:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Ответ. $\mathbf{\frac{2}{7}}$

2. Спортсмен покупает для игры в настольный теннис 4 ракетки. Продавец, не выбирая, берёт с полки 4 ракетки. Найти вероятность того, что среди купленных ракеток будет хотя бы одна с красным покрытием, если на полке лежали 10 ракеток с красным и 6 ракеток с зелёным покрытием.

Решение.

Событие А — среди купленных ракеток есть хотя бы одна с красным покрытием, тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ — среди купленных ракеток нет ни одной с красным покрытием (т. е. все они с зелёным покрытием).

Найдём вероятность события $\bar{A}$.

$$n = C^4{}_{16} = \frac{16!}{4! \cdot 12!}, m = C^4{}_6 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{6! \cdot 12!}{2! \cdot 16!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{3}{364}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{364} = \frac{361}{364}$$

Ответ. $\frac{361}{364}$

V. Независимые события. Умножение вероятностей

События А и В называют независимыми, если выполняется равенство:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Независимые события появляются в независимых испытаниях. Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий **А** и **Б** проверяется с помощью формулы.

Примеры:

1. Установить, являются ли события А и В независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{1}{8},\ P(B) = \frac{4}{5},\ \ P(A \cdot B) = \frac{1}{10}$

2) $P(A) = 0{,}25,\ P(B) = 0{,}4,\ \ P(A \cdot B) = 0{,}01$

Решение.

1) $P(A)\ \cdot\ P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{10} = P(A \cdot B)$

$\Rightarrow$ события А и В **являются независимыми.**

2) $P(A)\ \cdot\ P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1 \neq 0{,}01 = P(A \cdot B)$

$\Rightarrow$ события А и В **не являются независимыми**.

2. Вероятность попадания первым стрелком в цель при одном выстреле равна 0,7, а вероятность попадания в цель вторым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Оба стрелка делают по одному выстрелу в цель. Найти вероятность поражения цели обоими стрелками.

Решение.

Событие A (попадание первым стрелком в цель при одном выстреле) и событие B (попадание вторым стрелком в цель при одном выстреле) происходят в независимых испытаниях, поэтому события A и B независимые.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$

Ответ: 0,56.

VI. Статистическая вероятность

Относительной частотой события **А** в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний **М**, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний **N**. При этом число М называют частотой события А. Относительную частоту события А обозначают W (A).

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

Статистической вероятностью **P(A)** события **A** называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.
Таким образом, **W(A) ≈ P(A)** при большом числе испытаний.

Пример:

По данным районной поликлиники в январе текущего года среди 150 жильцов некоторого многоквартирного дома 42 жильца переболели гриппом. Найти относительную частоту (выраженную в процентах) заболеваемости гриппом жильцов рассматриваемого дома в январе текущего года.

Решение.
Событие А — заболеваемость гриппом жильцов дома в январе (произошло в 42 случаях, т. е. **M = 42**).
Общее число жильцов N = 150.

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{42}{150} = \frac{7}{25} = 28\%$$

Ответ: 28%

06.12.2018

Домашнее задание