

06.12.2018

**Тема:**

# **Элементы теории вероятностей**

# I. Событие

По отношению к некоторому испытанию (опыту) событие может быть **случайным** (может произойти, а может и не произойти в ходе этого испытания), **достоверным** (обязательно произойдёт) или **невозможным** (заведомо не произойдёт).

**Элементарные события** — это события, которые могут произойти в одном испытании и которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) обязательно происходит одно из них в результате испытания;
- 2) происходит только одно из них (взаимно исключают друг друга);
- 3) не разделяются на более простые события.

**Несовместные события** — события, которые могут произойти в одном испытании, причём появление одного из них исключает появление другого.

Если в одном испытании могут произойти события, шансы наступления которых одинаковы, то эти события называют **равновозможными**.

## **Примеры:**

1. Установить, достоверным, невозможным или случайным является событие:

- 1) в результате броска игрального кубика появилось 3 очка;
- 2) в Москве наступило 30 февраля;
- 3) на случайно вынутой из полного набора костяшке домино общее число очков меньше 13.

### **Решение.**

- 1) Так как в результате бросания могут появиться: 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очков или 6 очков, то появление 3 очков — *случайное событие*.
- 2) В григорианском календаре (по которому живут в нашей стране) отсутствует дата 30 февраля, поэтому данное *событие* — *невозможное*.
- 3) На костяшках домино самое большое общее число очков — 12 (что меньше, чем 13), значит, данное *событие достоверное*.



## **Примеры:**

2. Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными:

- 1) на стол бросают отлитый из стали тетраэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 4;
- 2) наугад вынимают из коробки, в которой находятся 1 белый и 2 чёрных шара, один шар и определяют его цвет.

### **Решение.**

- 1) Элементарными исходами являются: падение тетраэдра на одну из граней, на которой записано число 1, 2, 3 или 4; так как тетраэдр имеет одинаковые грани (предположительно, литьё из стали не даёт внутренних полостей), то *все исходы равновозможны*.
- 2) Элементарных исходов при определении цвета шара два: появление белого и появление чёрного шара; эти *исходы не являются равновозможными*, так как чёрных шаров больше, чем белых.

## **Примеры:**

3. Определить, являются события  $A$  и  $B$  совместными или несовместными:

- 1)  $A$  — появление 4 очков,  $B$  — появление чётного числа очков в результате одного броска игральной кости;
- 2)  $A$  — появление костяшки «пусто — пусто»,  $B$  — появление костяшки «один — три» в результате изъятия одной костяшки из полного набора домино.

### **Решение.**

- 1) Так как 4 — число чётное, то события  $A$  и  $B$  — совместные.
- 2) Так как данные костяшки различны, а вынимается одна костяшка, то события  $A$  и  $B$  несовместные.

## II. Комбинации событий.

### Противоположное событие

**Суммой (объединением)** событий  $A$  и  $B$ , которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Сумму событий  $A$  и  $B$  обозначают  $A + B$  или  $A \cup B$ .

**Произведением (пересечением)** событий  $A$  и  $B$ , которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении и того и другого события.

Произведение событий  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cdot B$  или  $A \cap B$ .

Событие  $\bar{A}$  называют **противоположным событием**  $A$ , если событие  $\bar{A}$  происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие  $A$ .



## Примеры:

1. Из полного набора домино изымают одну костяшку. Рассматриваются события:  $A$  — вынута костяшка с дублем,  $B$  — на вынутой костяшке присутствует половинка с шестью очками. Установить, в чём состоит событие  $A + B$ ; событие  $AB$ .

### Ответ.

- Событие  $A + B$  состоит в изъятии костяшки либо с дублем, либо содержащей 6 очков.
- Событие  $AB$  состоит в изъятии костяшки «шесть — шесть».

2. Установить, в чём состоит событие  $\bar{A}$ , если событие  $A$  — появление числа очков, не большего 5, в результате одного бросания игрального кубика.

**Решение.** Событие  $A$  состоит в появлении одного из чисел 1, 2, 3, 4 или 5. Все элементарные исходы испытания: появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.  
⇒ Событие  $\bar{A}$  состоит в появлении 6 очков.

### III. Вероятность события

**Вероятностью**  $P(A)$  события  $A$  в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , к числу  $n$  всех элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leq n$$

Если  $V$  — невозможное событие,  $U$  — достоверное событие, то  $P(V) = 0$ ,  $P(U) = 1$ .



## Примеры:

1. На стол бросают игральные кубик и тетраэдр. Найти вероятность того, что на кубике выпадет чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка (на тетраэдре считают очки с грани, касающейся поверхности стола).

### Решение.

Событие  $A$  — на кубике выпало чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка.

Общее число возможных исходов:  $n = 6 \cdot 4 = 24$  (каждая из 6 граней кубика может выпасть одновременно с любой из 4 граней тетраэдра).

Благоприятствующими событию  $A$  исходами будут комбинации чётных чисел на кубике с числом 4 на тетраэдре, т. е.  $m = 3$ .

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Ответ.  $\frac{1}{8}$

2. В ящике лежат 4 белых и 5 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

**Решение.**

Событие  $A$  — все три вынутых шара белые.

Общее число возможных исходов испытания (троек шаров, выбранных из девяти имеющихся):

$$n = C^3_9 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$

Благоприятствующими событию  $A$  исходами будут тройки шаров, выбранных из имеющихся четырёх белых шаров:

$$m = C^3_4 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

**Ответ.**  $\frac{1}{21}$

## IV. Сложение вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Иногда при решении задач проще найти сначала  $P(\bar{A})$ , а затем

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$



## Примеры:

1. Из полного набора домино наугад извлекается одна костяшка. Какова вероятность того, что эта костяшка либо дубль, либо «один — шесть»?

### Решение.

Событие  $A$  — появление дубля, а событие  $B$  — появление костяшки «один — шесть».

В полном наборе домино (28 костяшек) семь дублей:  $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

Костяшка «один — шесть» в наборе единственная:  $P(B) = \frac{1}{28}$

События  $A$  и  $B$  — несовместные:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Ответ.  $\frac{2}{7}$

2. Спортсмен покупает для игры в настольный теннис 4 ракетки. Продавец, не выбирая, берёт с полки 4 ракетки. Найти вероятность того, что среди купленных ракеток будет хотя бы одна с красным покрытием, если на полке лежали 10 ракеток с красным и 6 ракеток с зелёным покрытием.

**Решение.**

Событие  $A$  — среди купленных ракеток есть хотя бы одна с красным покрытием, тогда противоположное ему событие  $\bar{A}$  — среди купленных ракеток нет ни одной с красным покрытием (т. е. все они с зелёным покрытием).

Найдём вероятность события  $\bar{A}$ .

$$n = C^4_{16} = \frac{16!}{4! \cdot 12!}, m = C^4_6 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$
$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{6! \cdot 12!}{2! \cdot 16!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{3}{364}$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{364} = \frac{361}{364}$$

**Ответ.**  $\frac{361}{364}$

## V. Независимые события. Умножение вероятностей

События  $A$  и  $B$  называют независимыми, если выполняется равенство:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Независимые события появляются в независимых испытаниях. Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий  $A$  и  $B$  проверяется с помощью формулы.



# Примеры:

1. Установить, являются ли события А и В независимыми, если:

$$1) P(A) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{4}{5}, P(A \cdot B) = \frac{1}{10}$$

$$2) P(A) = 0,25, P(B) = 0,4, P(A \cdot B) = 0,01$$

**Решение.**

$$1) P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{10} = P(A \cdot B)$$

**⇒ события А и В являются независимыми.**

$$2) P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,1 \neq 0,01 = P(A \cdot B)$$

**⇒ события А и В не являются независимыми.**

2. Вероятность попадания первым стрелком в цель при одном выстреле равна 0,7, а вероятность попадания в цель вторым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Оба стрелка делают по одному выстрелу в цель. Найти вероятность поражения цели обоими стрелками.

**Решение.**

Событие А (попадание первым стрелком в цель при одном выстреле) и событие В (попадание вторым стрелком в цель при одном выстреле) происходят в независимых испытаниях, поэтому события А и В независимые.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

**Ответ: 0,56.**

## VI. Статистическая вероятность

**Относительной частотой** события **A** в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний **M**, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний **N**. При этом число **M** называют частотой события **A**. Относительную частоту события **A** обозначают  $W(A)$ .

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

**Статистической вероятностью**  $P(A)$  события **A** называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний. Таким образом,  $W(A) \approx P(A)$  при большом числе испытаний.



## Пример:

По данным районной поликлиники в январе текущего года среди 150 жильцов некоторого многоквартирного дома 42 жильца переболели гриппом. Найти относительную частоту (выраженную в процентах) заболеваемости гриппом жильцов рассматриваемого дома в январе текущего года.

### Решение.

Событие  $A$  — заболеваемость гриппом жильцов дома в январе (произошло в 42 случаях, т. е.  $M = 42$ ).

Общее число жильцов  $N = 150$ .

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{42}{150} = \frac{7}{25} = 28\%$$

**Ответ: 28%**

06.12.2018

# Домашнее задание

