



**Тема: «Способы решения  
тригонометрических  
уравнений»**

**Алгебра 10 класс**

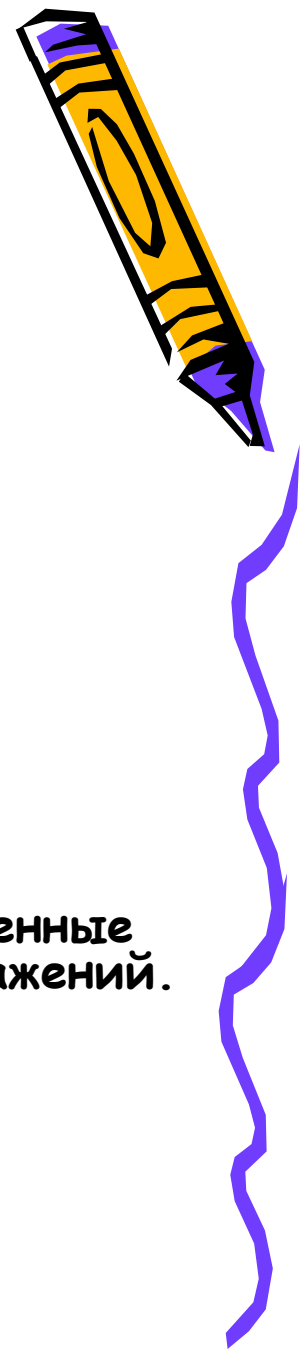


## Знать:

1. Свойства тригонометрических функций.
2. Определения обратных тригонометрических функций.
3. Формулы тригонометрии.
4. Формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

## Уметь:

1. Вычислять значения тригонометрических функций.
2. Вычислять значения обратных тригонометрических функций.
3. Решать простейшие тригонометрические уравнения.
4. Выполнять тождественные преобразования выражений.



# Решение простейших тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	
$\sin x = a,$ $a \in [-1; 1]$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a,$ $a \in [-1; 1]$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a,$ $a \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a,$ $a \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$2 \sin 2x = 1$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$$

$$\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$$



$$1) 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$2) 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$3) \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$$

$$4) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

$$5) 2 \sin 2x + \sin x = 0$$

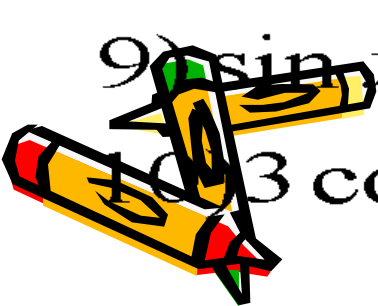
$$6) 2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0$$

$$7) \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

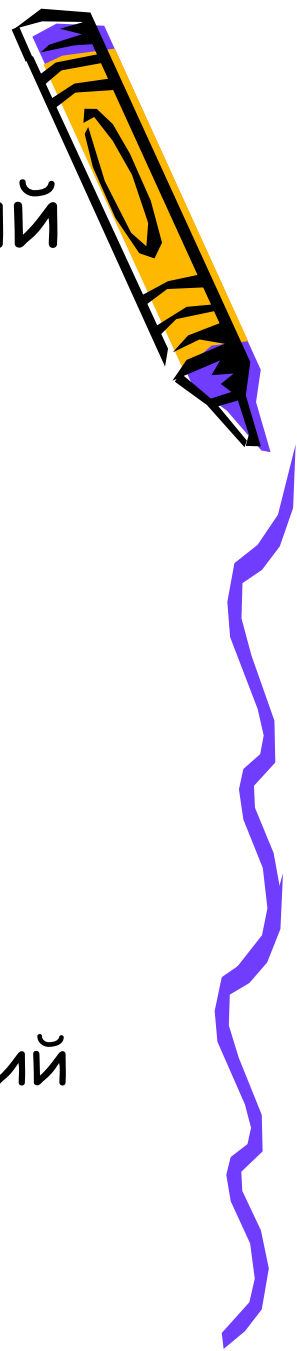
$$8) 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 3x = 1$$

$$9) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$10) 3 \cos x + 4 \sin x = 5$$

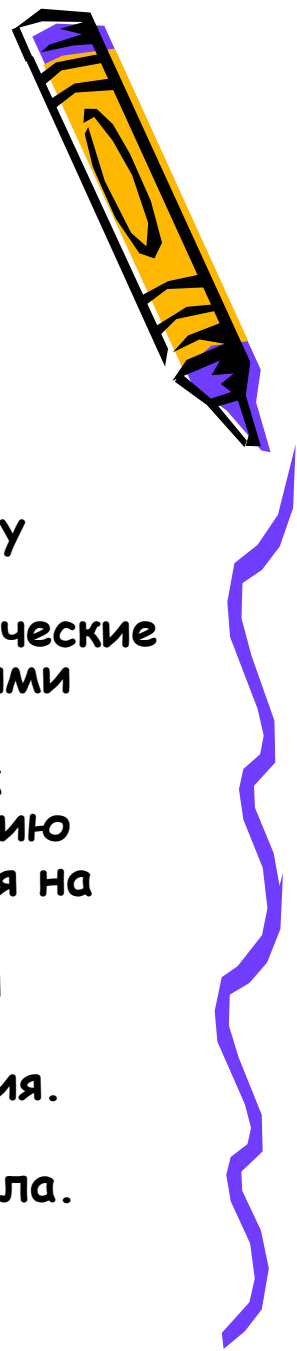


# Методы решения тригонометрических уравнений



- Разложение на множители
- Сведение к алгебраическому уравнению
- Введение вспомогательного угла
- Универсальная подстановка
- Сведение к однородному уравнению
- Использование формул преобразования суммы в произведение и обратно
- Применение формул понижения степени
- Обращение к условию равенства одноименных тригонометрических функций
- Использование свойства ограниченности функций (метод оценки)





## Знать:

1. Способы решения тригонометрических уравнений:
  - сведения к квадратному уравнению
  - разложения на множители
  - понижения степени.
  - однородные уравнения
  - введения вспомогательного угла.



## Уметь:

1. Классифицировать тригонометрические уравнения по способу решения.
2. Решать тригонометрические уравнения следующими способами:
  - способом сведения к квадратному уравнению
  - способом разложения на множители
  - способом понижения степени.
  - однородные уравнения.
  - способом введения вспомогательного угла.

**«Метод решения хорош, если  
с самого начала мы можем  
предвидеть – и  
впоследствии подтвердить  
это, - что, следуя этому  
методу, мы достигнем  
цели.»**

*Лейбниц*  
*ц*





# Сведения к квадратному уравнению

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть  $a = \sin x$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = -1$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}$$

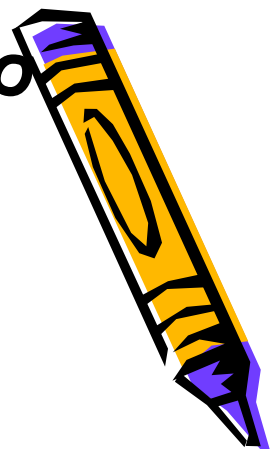
$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2) \sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ:  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$



# Сведения к квадратному уравнению

$$2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$-2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

Пусть  $a = \sin x$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 2$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

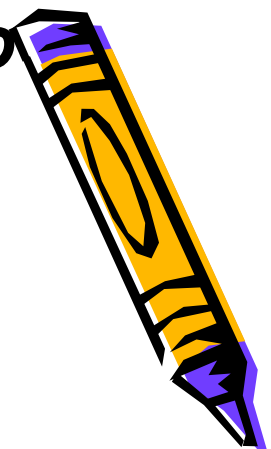
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2) \sin x = -2$$

уравнение решения не имеет, так как

$$|\sin x| \leq 1$$

Ответ:  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$



# Сведения к квадратному уравнению

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$$

$$\operatorname{tg} x * \operatorname{ctg} x = 1, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} x} + 3 \operatorname{ctg} x = 4 \quad | * \operatorname{ctg} x$$

$$1 + 3 \operatorname{ctg}^2 x = 4 \operatorname{ctg} x$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

Пусть  $a = \operatorname{ctg} x$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = 1$$

Выполним обратную замену

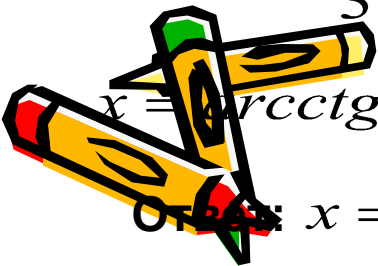
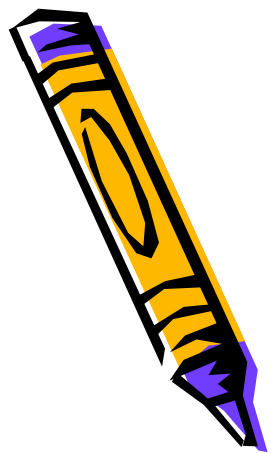
$$1) \operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}$$

$$x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{ctg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ответ:  $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

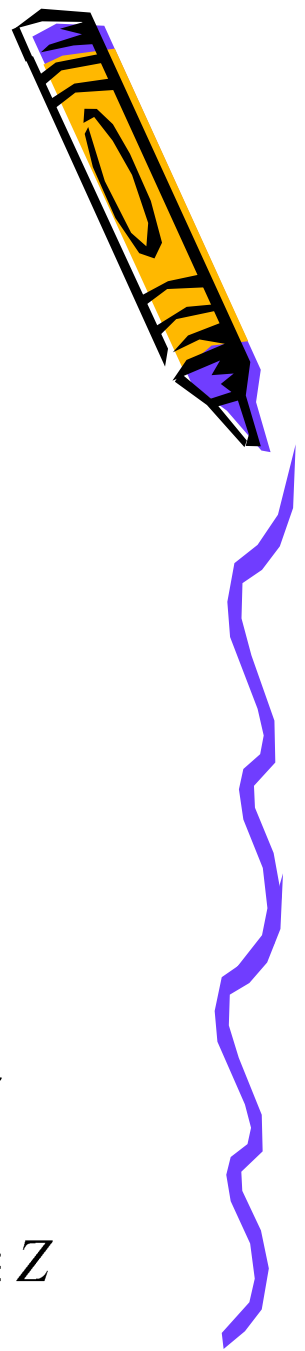


# Алгоритм решения тригонометрических уравнений.

1. Привести уравнение к квадратному, относительно тригонометрических функций, применяя тригонометрические тождества.
2. Ввести новую переменную.
3. Записать данное уравнение, используя эту переменную.
4. Найти корни полученного квадратного уравнения.
5. Перейти от новой переменной к первоначальной.
6. Решить простейшие тригонометрические уравнения.
7. Записать ответ.



# Разложения на множители



$$2 \sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$4 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x(4 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$4 \cos x + 1 = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

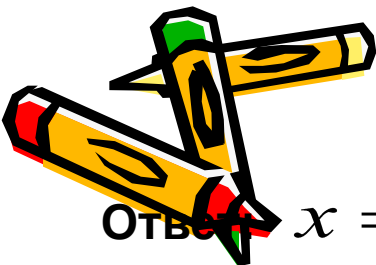
$$4 \cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ  $\rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



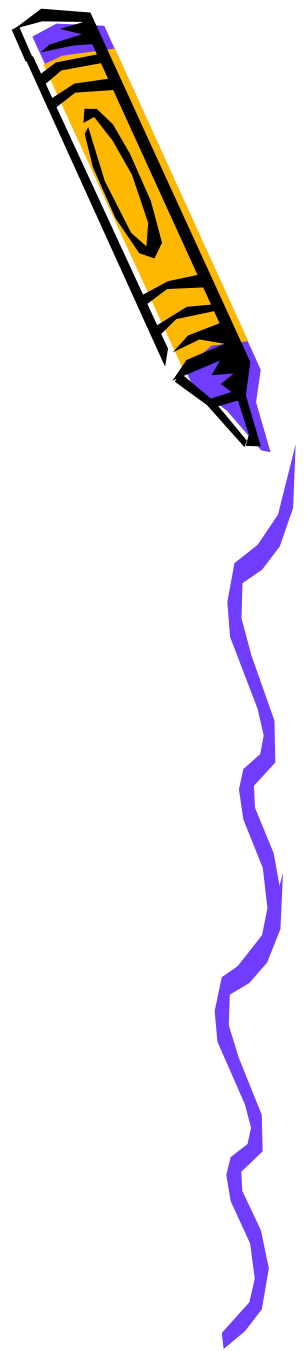
$$\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x - 3 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 3 \cos x = 0$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



# Однородные уравнения

Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к.  $\sin x$  и  $\cos x$  одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на  $\cos x$  (или на  $\sin x$ ). Получим: простое

уравнение  $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$  или  $\operatorname{tg} x = m$ .

Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на  $\cos^2 x$ . Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$



$$\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x - 3 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 3 \cos x = 0 \quad (\div \cos x \neq 0)$$

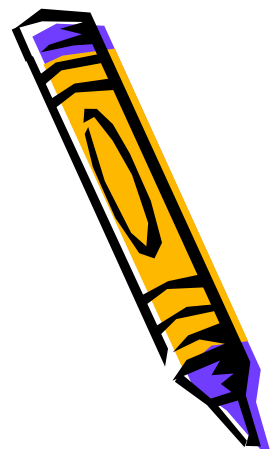
$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 3$$

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$





# Однородные уравнения



$$6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$


$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 \mid \cos^2 x$$

$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$


$$5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$$

# Однородные уравнения



$$5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$$

Пусть  $a = \operatorname{tg} x$

$$5a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$a_1 = -0,4; a_2 = 1$$

$$1) \operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$2) \operatorname{tg} x = -0,4$$

$$x = \operatorname{arctg}(-0,4) + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n, n \in Z$$



ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x = -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n, n \in Z$

# Метод понижения степени

$$2 \sin^2 x - 2 \sin^2 2x + 2 \sin^2 3x = 1$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$2 * \frac{1 - \cos 2x}{2} - 2 * \frac{1 - \cos 4x}{2} + 2 * \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1$$

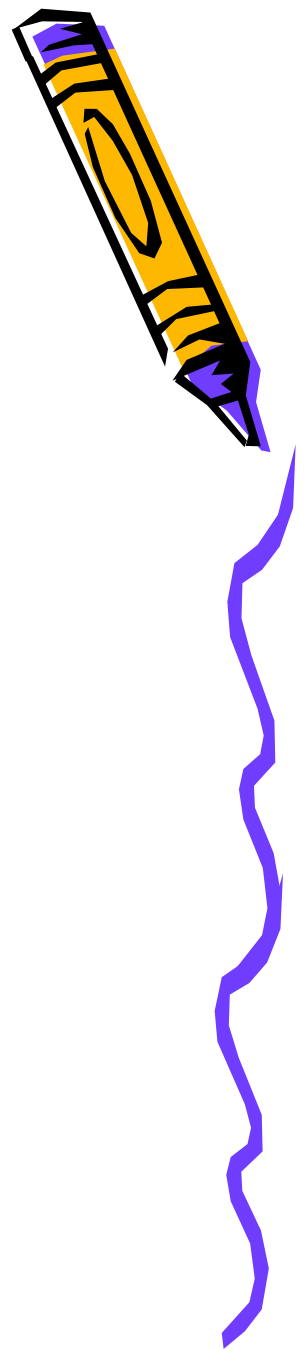
$$1 - \cos 2x - (1 - \cos 4x) + 1 - \cos 6x = 1$$

$$1 - \cos 2x - 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x = 1$$

$$\cos 4x - \cos 2x - \cos 6x = 0$$

$$\cos 4x - (\cos 2x + \cos 6x) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



# Метод понижения степени



$$\cos 4x - 2 \cos 4x \cos 2x = 0$$

$$\cos 4x(1 - 2 \cos 2x) = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2 \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ:  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z},$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

# Метод понижения степени



$$2 \sin^2 x + \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + \cos 2 \cdot 2x = 0$$

$$1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0$$

$$\cos^2 2x - \cos 2x + \cos^2 2x = 0$$

$$2 \cos^2 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \cos 2x - 1) = 0$$

1)  $\cos 2x = 0$  *или* 2)  $2 \cos 2x - 1 = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

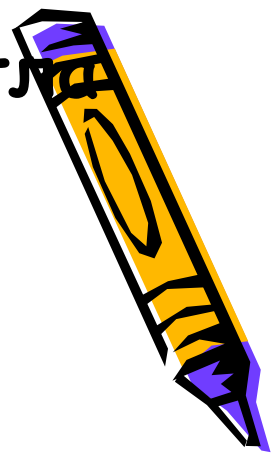


$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$



# Метод введения вспомогательного угла



$$a \cos x + b \sin x = c$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = A > 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x = 1,$$

$$\sin(\varphi + x) = 1$$

$$\varphi + x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



# Метод введения вспомогательного угла

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \quad | : 2$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$\text{Ответ : } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

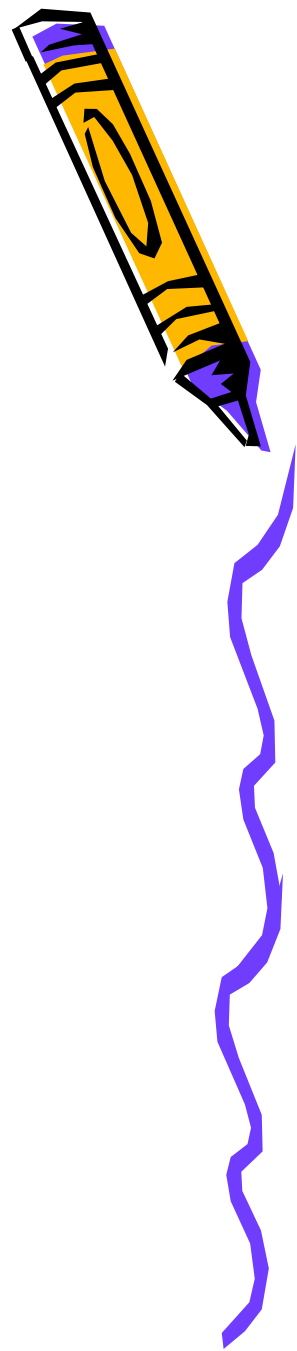


# Правила.

□ Увидел квадрат – понижай степень.

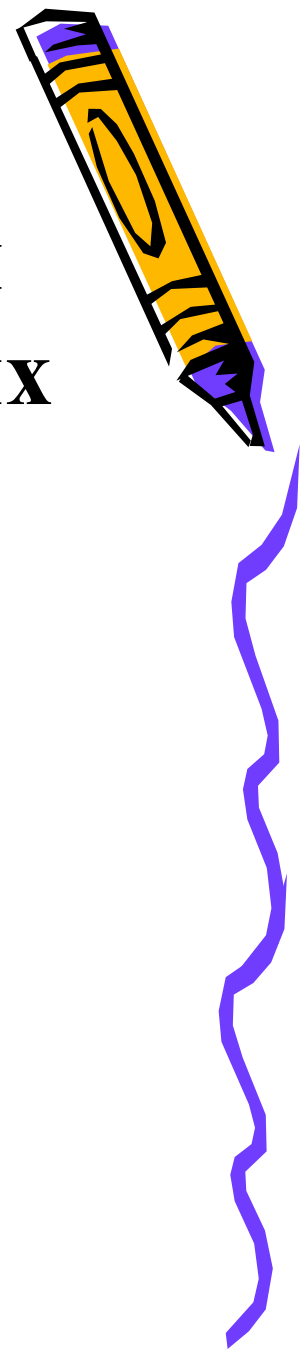
□ Увидел произведение – делай сумму.

□ Увидел сумму – делай произведение.





# Проблемы, возникающие при решении тригонометрических уравнений.





## 1. Потеря корней:

□ делим на  $g(x)$ .

□ опасные формулы (универсальная подстановка).

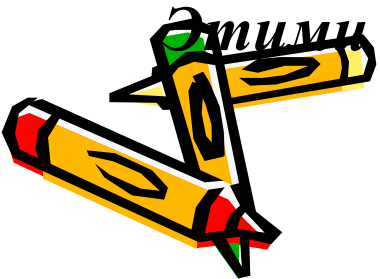
*Этими операциями мы сужаем область определения.*

## 2. Лишние корни:

□ возводим в четную степень.

□ умножаем на  $g(x)$  (избавляемся от знаменателя).

*Этими операциями мы расширяем область определения.*



Можно ли насладиться решением  
уравнения

$$\sin x + \cos x = 1?$$

Да, если стать его исследователем!



# 1 способ: Введение вспомогательного аргумента

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \times \sin(x + \varphi) = 1$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \times \sin(x + \varphi) = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

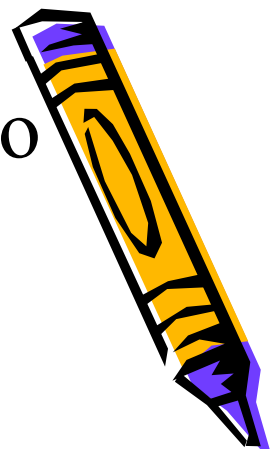
$$x + \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

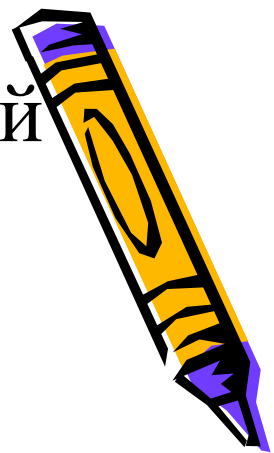
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$$



## 2 способ: Применение универсальной

### ПОДСТАНОВКИ



$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$$

$$\frac{2y}{1 + y^2} + \frac{1 - y^2}{1 + y^2} = 1$$

$$\frac{2y + 1 - y^2}{1 + y^2} = 1$$

$$2y + 1 - y^2 = 1 + y^2$$

$$2y - 2y^2 = 0$$

$$y(y - 1) = 0$$

$$y = 0$$

или

$$y = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Проверка  $x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

Ответ :  $\{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$



**«Мне приходится делить время  
между политикой и уравнениями.**

**Однако уравнения, по-моему,  
гораздо важнее.**

**Политика существует только для  
данного момента, а уравнения будут  
существовать вечно.»**

*А. Эйнштейн*

