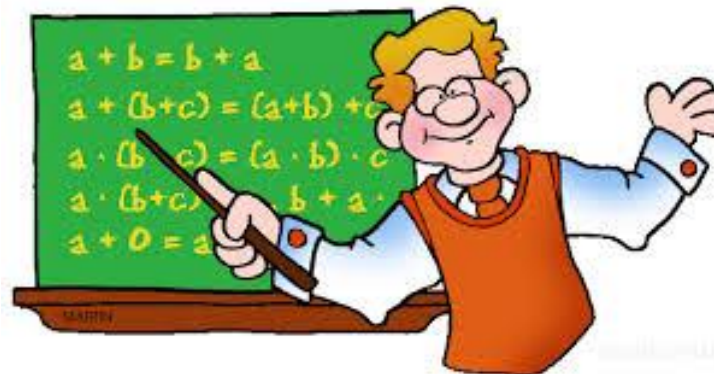


**Министерство общего и профессионального образования  
Ростовской области государственное автономное  
профессиональное образовательное учреждение  
Ростовской области  
Ростовский колледж рекламы, сервиса и туризма  
«Сократ».**

**Электронное учебное пособие к разделу  
«Производная и ее приложения»**

1



## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Профессиональная деятельность преподавателя за последние несколько лет претерпела значительные изменения. Многие проблемы современного образования сегодня напрямую связаны с информационно-коммуникационными технологиями. Компьютерные технологии призваны стать неотъемлемой частью целостного образовательного процесса, значительно повышающей его эффективность.

С каждым годом увеличивается умственная нагрузка на уроках математики, и это заставляет задуматься над тем, как поддержать у учащихся интерес к изучаемому предмету, как научить применять полученные знания и умения в жизни.

В учебных заведениях компьютер становится посредником между преподавателем и обучающимся, позволяет организовать процесс обучения на основе индивидуальной программы. В этом проявляется главное преимущество компьютера в процессе: он работает с каждым студентом в отдельности. Существует много учебных программ, которые можно условно классифицировать так: обучающие, контролирующие, инструментальные. Но готовые учебники не всегда могут доступно преподнести материал, ликвидировать пробел в знаниях. Ощущается недостаток не программного обеспечения на уроках математики, а программно-методических комплексов, включающих в себя компьютерную программу, а также и пособие для учителя, которое содержит не только описание технических возможностей программы, но и применение ее при изучении конкретной темы.

Целью создания электронного учебного пособия «Производная и ее приложения» являлось получение продукта, удобного в пользовании, соответствующего рабочей учебной программе, позволяющего формировать предметные и межпредметные компетенции обучающихся и отвечающей всем требованиям здоровьесберегающих технологий на уроках математики. Данный проект способствует реализации деятельностного подхода в обучении, повышению учебной мотивации, развитию личностных качеств, формирующих самооценку и самодостаточность учащихся. Для достижения поставленной цели автором была выбрана наиболее удобная для этого среда Microsoft PowerPoint. Это позволяет использовать полученный продукт в различных операционных системах.

Цель использования ЭУП: повышение интереса к предмету «Математика» и получение прочных знаний по теме «Производная и ее приложения».

Задачи:

- научить самостоятельной работе с электронным учебным пособием;
- способствовать отработке точности и последовательности при выполнении практических заданий.

Вошедшие в нашу жизнь компьютеры и электронные издания учебного назначения предоставили преподавателям новые возможности для решения задачи индивидуализации обучения. Компьютер может излагать учебный материал последовательно, без лишних слов, наглядно, в интерактивном режиме и, следовательно, в индивидуальном темпе и на разных уровнях проникновения в тему - от минимально необходимого уровня до факультативного. Но качественные электронные учебные пособия (ЭУП) и учебники, которых, заметим, не так много, только начинают пользоваться спросом у преподавателей и студентов.

Использование электронных учебных пособий в образовательном процессе имеет многофункциональный характер, меняющийся в зависимости от дидактических целей урока и отдельных его этапов. Так, повторение или закрепление пройденного материала может быть оптимизировано, если этот процесс пойдет с использованием ЭУП. При этом за одним компьютером может работать как один студент, так и два или три студента примерно одинакового уровня успеваемости. Имеющиеся задания помогут оценить степень усвоения пройденного материала. А если у кого-то возникли сложности при выполнении заданий, то имеется возможность повторить теоретический материал, изложенный в ЭУП в лаконичной форме и с примерами. При изложении нового материала кадры из ЭУП выступают на экране проектора в качестве наглядного иллюстрированного материала к лекции или беседе преподавателя с обучающимися. Электронные учебные пособия используются и при самообразовании. Обучающиеся, пропустившие занятие по каким-либо причинам, могут с их помощью "догнать" своих однокурников в изучении математики.

Наконец, эти пособия являются надежными помощниками при подготовке учащихся к экзаменам и при обучении в форме экстерната.

Электронные учебные пособия используют при:

При изложении материала - слайды, презентации, демонстрации(видеоролики-лекции, в которых используются звук, цвет и анимация);

При практической работе - слайды с текстами задач(упражнения на готовых чертежах, задачи с визуальными подсказками) и практические задания, в которых рассматриваются динамические чертежи (задачи на выявление связей между элементами фигуры, на построение фигур с помощью виртуальных инструментов, на перекраивание и др.);

При контроле и тестировании - задачи на вычисление( с вводом ответа), задания с выбором ответа, табличные тесты и т. д.

Благодаря электронным помощникам: компьютеру или графическому калькулятору - на уроках алгебры стало возможным создание графических образов (рисунков реальных объектов, узоров) как множества точек координатной плоскости. Рисование - увлекательный процесс, который может послужить мотивацией к учебной деятельности на этапе формирования умений распознавать виды изучаемых функций, показывать расположение в координатной плоскости графиков функций в зависимости от значений коэффициентов, строить графики функций на основе преобразования известных графиков, решать некоторые виды задач на координатной плоскости. Процесс создания рисунка с использованием графических соображений будет полезен каждому студенту. Характерной его особенностью является постоянная взаимосвязь алгебраического и геометрического языков, переход от буквенного равенства или неравенства к геометрическому образу или наоборот. Подобные занятия могут оказаться доступными и интересными для студентов, увлекая их возможностью воспроизведения замысла рисунка с помощью графических представлений. Это окажет влияние на их самостоятельность и активность в познавательной деятельности.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ.

Пусть функция  $f(x)$  определена на некотором промежутке,  $x$ - точка этого промежутка и число  $h \neq 0$ , такое, что  $x+h$  также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения при  $h \rightarrow 0$  (если  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  существует) называется производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  и обозначается  $f'(x)$  (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Отметим, что в формуле число  $h$ , где  $h \neq 0$ , может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число  $x+h$  должно принадлежать промежутку, на котором определена функция  $f(x)$ .

Если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.



## ЗАДАЧА 1.

НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ

$$f(x) = x^2$$

Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Если  $h \rightarrow 0$ , то  $2x+h \rightarrow 2x$ , поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Следовательно,  $(x^2)' = 2x$ .

## ЗАДАЧА 2.

НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ

$$f(x) = x^3$$

Найдем сначала разность

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2). \end{aligned}$$

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если  $h \rightarrow 0$ , то  $h^2 \rightarrow 0$  и  $3xh \rightarrow 0$ , поэтому

$$3x^2 + 3xh + h^2 \rightarrow 3x^2, \text{ т.е. } (x^3)' = 3x^2.$$



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ.

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , где  $x \neq x_0$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Поясним это определение предела функции. Число  $A$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , становятся как угодно близкими к числу  $A$ , т.е. значения

$|f(x) - A|$  становятся как угодно малыми. Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число  $\varepsilon$  и убедиться в том, что для всех  $x$ , отличающихся от  $x_0$  меньше чем на некоторое число  $\delta$ , модуль разности между  $f(x)$  и числом  $A$  будет меньше взятого числа  $\varepsilon$ .

**ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ЯВЛЯЕТСЯ ОДНИМ ИЗ ОСОБЫХ ПРЕДЕЛОВ, ИМЕЮЩИХ БОЛЬШОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ.**

**ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ТЕСНО СВЯЗАНО С ПОНЯТИЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ.**

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т.е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги, то эту функцию называют непрерывной на этом промежутке. Приведем примеры функций, которые не являются непрерывными. Например, представим график функции, которая непрерывна на промежутке  $[a;c]$  и  $(c;b]$ , но разрывна в точке  $x=c$  и потому не является непрерывной на всем отрезке  $[a;b]$ . Все элементарные (линейная, квадратичная и т.д.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ.

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то ее называют непрерывной на этом интервале.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция  $y = |x|$  непрерывна при всех значениях  $x$ , но не имеет производной в точке  $x=0$ . Действительно.

1, если  $x > 0$ ,

-1, если  $x < 0$ .

И поэтому разностное отношение  
~~имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .~~

$$\left. \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \right\}$$

не

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x}$$

## ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

$$\left(x^p\right)' = p \cdot x^{p-1} \quad \text{при } p \in \mathbb{R}$$

$$1. (x^3)' = 3x^2$$

$$2. (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$3. \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

$$4. (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

# ПРОИЗВОДНАЯ ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИИ

$$(\text{const})' = 0$$



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.

ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ.

УСТНО.

$$1.(x^6)' = 6x^5$$

$$2.(x^7)' = 7x^6$$

$$3.(x^{11})' = 11x^{10}$$

$$4.(x^{13})' = 13x^{12}$$

$$1.(x^{-2})' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$2.(x^{-3})' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$3.(x^{-4})' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$4.(x^{-7})' = \boxed{\phantom{000}}$$

НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ.

$$1). (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$2). (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$3). (x^{-\frac{2}{7}})' = -\frac{2}{7} x^{-\frac{2}{7}-1} = -\frac{2}{7} x^{-1\frac{2}{7}}$$

$$4). (x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$$



НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ.  
САМОСТОЯТЕЛЬНО.

1.  $(\frac{1}{x^5})' = (x^{-5})' =$

2.  $(\frac{1}{x^9})' = (x^{-9})' =$

3.  $(\sqrt[4]{x})' =$

4.  $(\sqrt[3]{x^2})' =$

5.  $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' =$

6.  $(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})' =$



# ПРОИЗВОДНАЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

$$(kx + b)' = k \quad (k \neq 0)$$

$$1)(2x - 1)' = 2$$

$$1)(4x + 2)' = \square$$

$$2)(3 - 4x)' = -4$$

$$2)(2 - x)' = \square$$

$$3)(x)' = 1$$

$$3)(2x)' = \square$$

$$4)\left(1 - \frac{x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}$$

$$4)\left(3 - \frac{x}{3}\right)' = \square$$

$$5)\left(\frac{2x}{3} + 2\right)' = \frac{2}{3}$$

$$5)\left(\frac{x}{5} + 4\right)' = \square$$

## ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ.

$$F'(G(x)) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

Вычислить производную:

$$1) ((4x - 3)^2)' = 2(4x - 3) \cdot (4x - 3)' = 8 \cdot (4x - 3)$$

$$3) ((1 - 2x)^{-6})' = -6(1 - 2x)^{-7} \cdot (1 - 2x)' = -6 \cdot \frac{1}{(1 - 2x)^7} \cdot (-2) = \frac{12}{(1 - 2x)^7}$$

$$5) ((2x)^3)' = 3(2x)^2 \cdot (2x)' = 6(2x)^2 = 6 \cdot 4x^2 = 24x^2$$

Выполнить самостоятельно:

$$2) (5x + 2)^{-3} =$$

$$4) (2 - 5x)^4 =$$

$$6) (-5x)^4 =$$

Вычислить производную:

$$1) (\sqrt[3]{2x+7})' = ((2x+7)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} (2x+7)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+7)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+7)^{\frac{2}{3}}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$$

$$3) (\sqrt[4]{3x})' = ((3x)^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} (3x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x)^{\frac{3}{4}}} \cdot 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x)^3}}$$

Выполнить самостоятельно:

$$2) (\sqrt[4]{7-3x})' =$$

$$4) (\sqrt[3]{5x})' =$$

Вычислить производную:

$$1) \left( \frac{1}{(2+3x)^2} \right)' = \left( (2+3x)^{-2} \right)' = -2 \cdot (2+3x)^{-3} \cdot 3 = -\frac{6}{(2+3x)^3}$$

$$3) \left( \sqrt[3]{(3x-2)^2} \right)' = \left( (3x-2)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (3x-2)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3x-2)' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}} \cdot 3 = \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$$

$$5) \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}} \right)' = \left( \left( \sqrt[3]{3x-7} \right)^{-1} \right)' = \left( (3x-7)^{-\frac{1}{3}} \right)' = -\frac{1}{3} (3x-7)^{-\frac{4}{3}} \cdot (3x-7)' =$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}} \cdot 3 = -\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}} = -\frac{1}{(3x-7) \cdot \sqrt[3]{(3x-7)}}$$

Выполнить самостоятельно:

$$2) \frac{1}{(3-2x)^3} =$$

$$4) \sqrt[7]{(3-14x)^2} =$$

$$6) \frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}} =$$

## Найти $f'(x_0)$ , если:

$$1) f(x) = x^6, x_0 = \frac{1}{2}$$

$$1) f'(x) = (x^6)' = 6x^5$$

$$2) 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Ответ : } \frac{3}{16}$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$$

$$1) f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ответ : } \frac{1}{4}$$

$$3) f(x) = \sqrt{5-4x}, x_0 = 1$$

$$1) f'(x) = (\sqrt{5-4x})' = \left( (5-4x)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (5-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5-4x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-4x}} \cdot (-4) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$$

$$2) -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{5-4}} = -2$$

$$\text{Ответ : } -2$$

НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ.

$$1)(x^2 + x)' = 2x + 1$$

$$2)(3x^2)' = 6x$$

$$3)(-4x^3)' = -12x^2$$

$$4)(13x^2 + 26)' = 26x$$

$$5)(3x^2 - 5x)' = 6x - 5$$

$$6)(x^4 + 2x^2)' = 4x^3 + 4x$$

$$7)(x^3 + 5x)' = 3x^2 + 5$$

$$8)(2x^3 - 3x + 6x + 1)' = \\ = 6x^2 - 6x + 6$$

$$1)(x^2 - x)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$2)(-17x^2)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$3)(0,5x^3)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$4)(8x^2 - 16)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$5)(5x^2 + 6x - 7)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$6)(x^5 - 3x^2)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$7)(-2x^3 + 18x)' = \boxed{\phantom{000}}$$

$$8)(-3x^3 + 2x^2 - x - 5)' = \\ \boxed{\phantom{000}}$$

Вычислить производную:

$$1) \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)' = (x^2 + x^{-3})' = 2x - 3x^{-4} = 2x - \frac{3}{x^4}$$

$$2) (2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})' = (2x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Выполните самостоятельно:

$$1) x^3 + \frac{1}{x^2} =$$



$$2) 3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x} :$$



Найти  $f'(0)$  и  $f'(2)$

$$1) f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$$


$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$


$$2) f'(x) = (-x^3 + x^2)' = -3x^2 + 2x$$

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -8$$

Выполнить самостоятельно:

$$1) x^3 - 2x =$$


$$2) x^2 + x + 1 =$$




Найти  $f'(1)$

$$1) f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-1} + x^{-2})' = -x^{-2} - 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} - \frac{2}{1^3} = -3$$

$$2) f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}\right)' = (3x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-4} = \frac{-3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{6}{x^4} = \frac{-3}{2x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^4}$$

$$f'(1) = -\frac{3}{2} + 6 = 4\frac{1}{2}$$

Выполнить самостоятельно:

$$1) \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1 =$$



$$2) x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} =$$



## РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ $F'(x)=0$

$$1) f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$$

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$2) f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x - 3)' =$$

$$= 6x^2 + 6x - 12$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

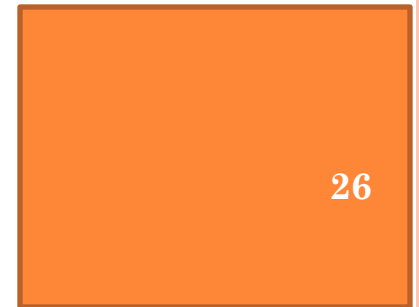
$$x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

## РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.

$$1) -x^2 + 3x + 1$$



$$2) x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$



## ПРОИЗВОДНАЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1) (x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

$$2) (e^x)' = e^x$$

$$3) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$4) (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$6) (\sin x)' = \cos x$$

$$7) (\cos x)' = -\sin x$$

## ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ НА ПРИМЕНЕНИЕ ВСЕХ ФОРМУЛ  
ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ.

НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ

$$1)(e^x + \cos x)' = e^x - \sin x$$

$$2)(e^{2x} - 3 \sin x)' = e^{2x} \cdot (2x)' - 3 \cos x = 2 \cdot e^{2x} - 3 \cos x$$

$$3)(\sin(3x + 1) - e^{2x-1})' = \cos(3x + 1) \cdot (3x + 1)' - e^{2x-1} \cdot (2x - 1)' = \\ = 3 \cdot \cos(3x + 1) - 2 \cdot e^{2x-1}$$

$$4)(\ln(4x - 1) + 2^x)' = \frac{1}{4x - 1} \cdot (4x - 1)' + 2^x \cdot \ln 2 = \frac{4}{4x - 1} + 2^x \cdot \ln 2$$

Выполнить самостоятельно:

$$1) (\sin x - e^x)' = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$2) (4 \cos x - e^{4x})' = \boxed{\phantom{000000000000}}$$

$$3) (\sin(4 - 2x) + 3^x)' = \boxed{\phantom{000000000000000000000000}}$$

$$4) \left( 2 \ln(1 - 2x) + \frac{1}{2} x^2 \right)' = \boxed{\phantom{000000000000000000000000}}$$

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ.

Если  $k > 0$ , то  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  в этом случае функция возрастает и говорят, что прямая направлена вверх.

Если  $k < 0$ , то  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  в этом случае функция  $y = kx + b$  и говорят, что прямая направлена вниз.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x) = k,$$

где  $k$ -угловой коэффициент касательной.



УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ.

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где  $x_0$ - абсцисса точки касания.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

$$1) f(x) = x^2 + x + 1 ; x_0 = 1$$

*Решение :*

$$1. y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$2.a) f(x_0) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$б) f'(x_0) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$$

$$в) f'(x_0) = 2 + 1 = 3$$

$$y = 3 + 3(x - 1)$$

$$y = 3 + 3x - 3$$

$$y = 3x$$

$$\text{Ответ : } y = 3x$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} ; x_0 = -2$$

*Решение :*

$$1. y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$2.a) f(x_0) = -\frac{1}{2}$$

$$б) f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$в) f'(x_0) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$$

$$y = \frac{-1}{2} + \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - 1$$

$$\text{Ответ : } y = -\frac{1}{4}x - 1$$

Самостоятельно:

1)  $y = x^3 + 3x$  ;  $x_0 = 3$



2)  $y = \sin x$  ;  $x_0 = \frac{\pi}{6}$



# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.

Производная широко используется для исследования функций, т.е. для изучения различных свойств функций.

- Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*. Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют *критическими точками этой функции*. Т.о., для того чтобы точка  $x_0$  была точкой экстремума функции  $f(x)$ , *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a;b)$ ,

$x_0 \in (a;b)$ , и  $f'(x_0) = 0$ . Тогда:

1) Если при переходе через стационарную точку  $x_0$  функции  $f(x)$  ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е.  $f'(x) > 0$  слева от точки  $x_0$  и  $f'(x) < 0$  справа от точки  $x_0$ , то  $x_0$ - точка максимума функции  $f(x)$ .

2) Если при переходе через стационарную точку  $x_0$  функции  $f(x)$  ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то  $x_0$ - точка минимума функции  $f(x)$ .

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

ЗАДАЧА.

ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Решение:

1) Найти область определения функции

$$X \in \mathbb{R}$$

2) Найти производную:

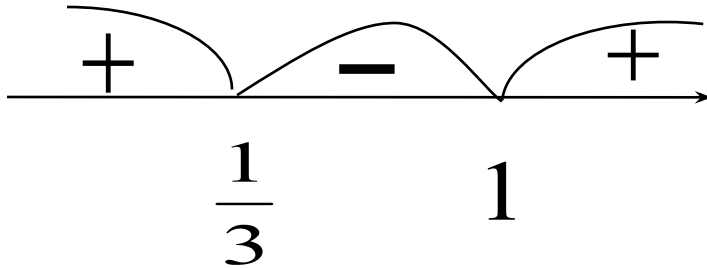
$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$$

3) Найти стационарные точки

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 1$$

#### 4) Найти промежутки монотонности.



при  $x \in (-\infty; \frac{1}{3}]$  и  $x \in [1; +\infty)$ ,  $\phi$  - я возрастает, т.к.  $f'(x) > 0$

при  $x \in [\frac{1}{3}; 1]$ ,  $\phi$  - я убывает, т.к.  $f'(x) < 0$   $x = \frac{1}{3}$

#### 5) Найти точки экстремума

При  $x = \frac{1}{3}$   $\phi$  - я имеет максимум, т.к.  $f'(x)$  меняет знак с "+" на "-"

При  $x = 1$   $\phi$  - я имеет минимум, т.к. производная меняет знак с "-" на "+"


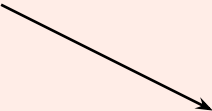

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$  - максимум

$(1; 0)$  - минимум

6) Составить таблицу.

x	$x \in (-\infty; \frac{1}{3}]$	$x = \frac{1}{3}$	$x \in [\frac{1}{3}; 1]$	$x = 1$	$x \in [1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\frac{4}{27}$		0	

7) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Oх

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x = 0; x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$x = 1$$

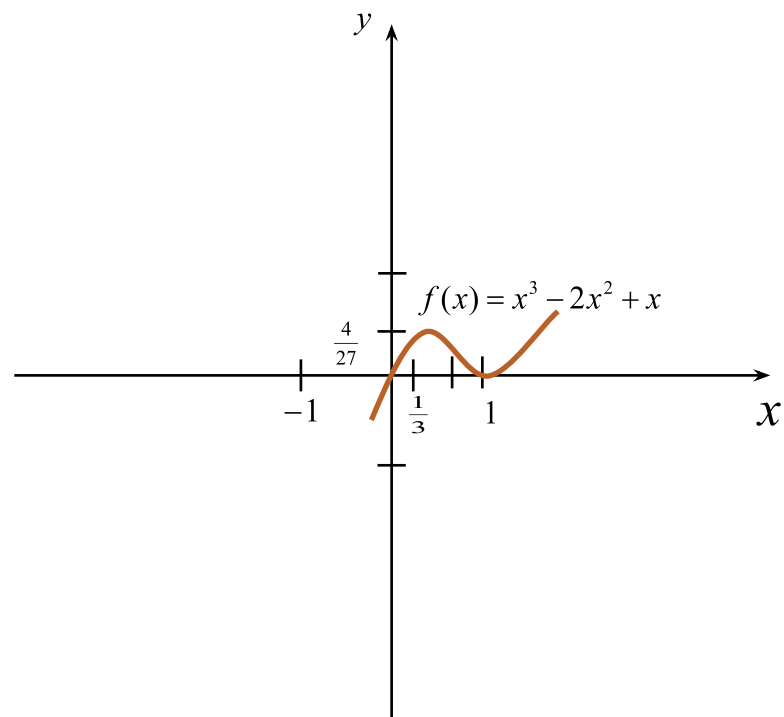
С осью Oу

$$f'(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

$$y = 0$$



8) Построить график



РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.

1 вариант.

$$y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$y = 6x^4 + 4x^6$$

2 вариант.

$$y = x^3 + 6x^2 - 9x$$

$$y = 3x^5 + 5x^3$$



## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М.; изд. «Академия», 2010.
- Башмаков М.И. Задачник Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М.; изд. «Академия», 2012.
- <http://comp-science.narod.ru> - Учителям информатики и математики и их любознательным ученикам (дидактические материалы по информатике и математике)
- <http://mathem.h1.ru> - МАТЕМАТИКА ON-LINE\_- формулы по математике, геометрии, высшей математике и т.д. Так же здесь есть справочная информация по математическим дисциплинам и интересные статьи
- Алимов Ш.А. Алгебра и начало анализа. 10 - 11 кл. изд. «Просвещение», 2008.

**Спасибо за  
внимание.**