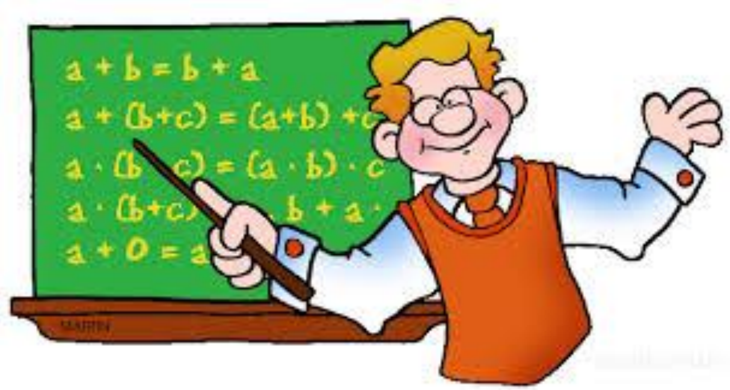
Министерство общего и профессионального образования Ростовской области государственное автономное профессиональное образовательное учреждение

Ростовской области

Ростовский колледж рекламы, сервиса и туризма

«Сократ».

Электронное учебное пособие к разделу «Производная и ее приложения»



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Профессиональная деятельность преподавателя за последние несколько лет претерпела значительные изменения. Многие проблемы современного образования сегодня напрямую связаны с информационно-коммуникационными технологиями. Компьютерные технологии призваны стать неотъемлемой частью целостного образовательного процесса, значительно повышающей его эффективность.

С каждым годом увеличивается умственная нагрузка на уроках математики, и это заставляет задуматься над тем, как поддержать у учащихся интерес к изучаемому предмету, как научить применять полученные знания и умения в жизни.

В учебных заведениях компьютер становится посредником между преподавателем и обучающимся, позволяет организовать процесс обучения на основе индивидуальной программы. В этом проявляется главное преимущество компьютера в процессе: он работает с каждым студентом в отдельности. Существует много учебных программ, которые можно условно классифицировать так: обучающие, контролирующие, инструментальные. Но готовые учебники не всегда могут доступно преподнести материал, ликвидировать пробел в знаниях. Ощущается недостаток не программного обеспечения на уроках математики, а программно-методических комплексов, включающих в себя компьютерную программу, а также и пособие для учителя, которое содержит не только описание технических возможностей программы, но и применение ее при изучении конкретной темы.

Целью создания электронного учебного пособия «Производная и ее приложения» являлось получение продукта, удобного в пользовании, соответствующего рабочей учебной программе, позволяющего формировать предметные и межпредметные компетенции обучающихся и отвечающей всем требованиям здоровьесберегающих технологий на уроках математики. Данный проект способствует реализации деятельностного подхода в обучении, повышению учебной мотивации, развитию личностных качеств, формирующих самооценку и самодостаточность учащихся. Для достижения поставленной цели автором была выбрана наиболее удобная для этого среда Microsoft PowerPoint. Это позволяет использовать полученный продукт в различных операционных системах.

Цель использования ЭУП: повышение интереса к предмету «Математика» и получение прочных знаний по теме «Производная и ее приложения».

Задачи:

- научить самостоятельной работе с электронным учебным пособием;
- способствовать отработке точности и последовательности при выполнении практических заданий.

Вошедшие в нашу жизнь компьютеры и электронные издания учебного назначения предоставили преподавателям новые возможности для решения задачи индивидуализации обучения. Компьютер может излагать учебный материал последовательно, без лишних слов, наглядно, в интерактивном режиме и , следовательно, в индивидуальном темпе и на разных уровнях проникновения в тему - от минимально необходимого уровня до факультативного. Но качественные электронные учебные пособия (ЭУП) и учебники, которых, заметим, не так много, только начинают пользоваться спросом у преподавателей и студентов.

Использование электронных учебных пособий в образовательном процессе имеет многофункциональный характер, меняющийся в зависимости от дидактических целей урока и отдельных его этапов. Так, повторение или закрепление пройденного материала может быть оптимизировано, если этот процесс пойдет с использованием ЭУП. При этом за одним компьютером может работать как один студент, так и два или три студента примерно одинакового уровня успеваемости. Имеющиеся задания помогут оценить степень усвоения пройденного материала. А если у кого-то возникли сложности при выполнении заданий, то имеется возможность повторить теоретический материал, изложенный в ЭУП в лаконичной форме и с примерами. При изложении нового материала кадры из ЭУП выступают на экране проектора в качестве наглядного иллюстрированного материала к лекции или беседе преподавателя с обучающимися. Электронные учебные пособия используются и при самообразовании. Обучающиеся, пропустившие занятие по каким-либо причинам, могут с их помощью "догнать" своих однокурсников в изучении математики.

Наконец, эти пособия являются надежными помощниками при подготовке учащихся к экзаменам и при обучении в форме экстерната.

Электронные учебные пособия используют при:

При изложении материала - слайды, презентации, демонстрации(видеоролики-лекции, в которых используются звук, цвет и анимация);

При практической работе - слайды с текстами задач(упражнения на готовых чертежах, задачи с визуальными подсказками) и практические задания, в которых рассматриваются динамические чертежи (задачи на выявление связей между элементами фигуры, на построение фигур с помощью виртуальных инструментов, на перекраивание и др.);

При контроле и тестировании - задачи на вычисление(с вводом ответа), задания с выбором ответа, табличные тесты и т. д.

Благодаря электронным помощникам: компьютеру или графическому калькулятору - на уроках алгебры стало возможным создание графических образов (рисунков реальных объектов, узоров) как множества точек координатной плоскости. Рисование - увлекательный процесс, который может послужить мотивацией к учебной деятельности на этапе формирования умений распознавать виды изучаемых функций, показывать расположение в координатной плоскости графиков функций в зависимости от значений коэффициентов, строить графики функций на основе преобразования известных графиков, решать некоторые виды задач на координатной плоскости. Процесс создания рисунка с использованием графических соображений будет полезен каждому студенту. Характерной его особенностью является постоянная взаимосвязь алгебраического и геометрического языков, переход от буквенного равенства или неравенства к геометрическому образу или наоборот. Подобные занятия могут оказаться доступными и интересными для студентов, увлекая их возможностью воспроизведения замысла рисунка с помощью графических представлений. Это окажет влияние на их самостоятельность и активность в познавательной деятельности.

Определение производной.

Пусть функция f(x) определена на некотором промежутке, x- точка этого промежутка и число $h\neq 0$, такое,что x+h также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h\to 0$ (если этот предел существует) называется производной функции f(x) в точке x и обозначается f'(x) (читается: «Эф штрих от икс».). Таким образом,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Отметим, что в формуле число h, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x+h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция f(x).

Если функция f(x) имеет производную в точке x, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Задача 1.
Найти производную функции $f(x)=x^2$

Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

Если h→0, то 2x+h →2x, поэтому

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$$

Следовательно, $(x^2)'=2x$.

Задача 2.
Найти производную функции $f(x) = x^3$

Найдем сначала разность

$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 =$

$= h(3x^2 + 3xh + h^2).$

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому

$3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$, т.е. $(x^3)' = 3x^2$.

Определение предела функции в точке.

Число А называется пределом функции f(x) в точке x_0 и обозначается

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

если для любого числа ε>0 существует такое число δ>0,что для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x-x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Поясним это определение предела функции. Число А является пределом функции f(x) при x, достаточно близких к x_0, становятся как угодно близкими к числу А, т.е. значения

$|f(x)-A|$ становятся как угодно малыми. Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между f(x) и числом А будет меньше взятого числа ε.

Производная функции является одним из особых пределов, имеющих большое практическое значение.

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т.е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги, то эту функцию называют непрерывной на этом промежутке . Приведем примеры функций, которые не являются непрерывными . Например, представим график функции, которая непрерывна на промежутке [a;c] и (c;b] ,но разрывна в точке x=c и потому не является непрерывной на всем отрезке [a;b].Все элементарные (линейная, квадратичная и т.д.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

Определение непрерывности функции.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то ее называют непрерывной на этом интервале.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция y=|x| непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке x=0.Действительно.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{если } x>0, \\ -1, \text{если } x<0. \end{cases}$$

И поэтому разностное отношение не имеет предела при x→0.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x}$$

Производная степенной функции

$$\boxed{\left(x^{P}\right)' = P\cdot x^{P-1}}$$ при p$\in$R

$$1.\ (x^{3})' = 3x^{2}$$

$$2.\ (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$3.\ \left(\frac{1}{x^{3}}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^{4}}$$

$$4.\ (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$$

Производная постоянной функции

$$(const)'=0$$

Практические задания.
Вычислить производную.
Устно.

$1.(x^6)' = 6x^5$

$2.(x^7)' = 7x^6$

$3.(x^{11})' = 11x^{10}$

$4.(x^{13})' = 13x^{12}$

$1.(x^{-2})' =$

$2.(x^{-3})' =$

$3.(x^{-4})' =$

$4.(x^{-7})' =$

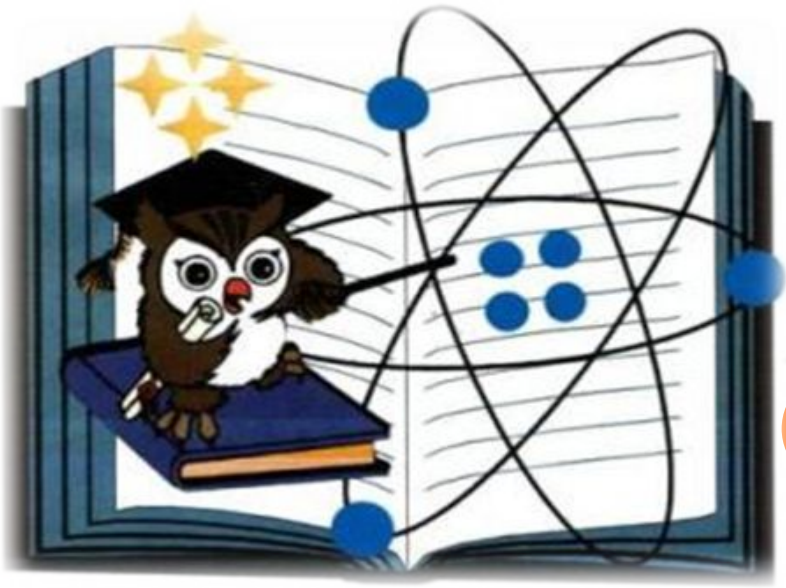
Найти производную функции.

$$1).(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$2).(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$3).(x^{-\frac{2}{7}})' = -\frac{2}{7}x^{-\frac{2}{7}-1} = -\frac{2}{7}x^{-1\frac{2}{7}}$$

$$4).(x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$$



Найти производную функции. Самостоятельно.

$$1.\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' =$$

$$2.\left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' =$$

$$3.(\sqrt[4]{x})' =$$

$$4.(\sqrt[3]{x^2}\ )' =$$

$$5.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$$

$$6.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$$

Производная линейной функции

(кх+в)' =к   (к≠0)

$$1)(2x-1)'=2$$

$$2)(3-4x)'=-4$$

$$3)(x)'=1$$

$$4)(1-\frac{x}{2})'=-\frac{1}{2}$$

$$5)(\frac{2x}{3}+2)'=\frac{2}{3}$$

$$1)(4x+2)'=$$

$$2)(2-x)'=$$

$$3)(2x)'=$$

$$4)(3-\frac{x}{3})'=$$

$$5)(\frac{x}{5}+4)'=$$

Производная сложной функции.

$F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

Вычислить производную:

$$1)\left((4x-3)^2\right)' = 2(4x-3)\cdot(4x-3)' = 8\cdot(4x-3)$$

$$3)\left((1-2x)^{-6}\right)' = -6(1-2x)^{-7}\cdot(1-2x)' = -6\cdot\frac{1}{(1-2x)^7}\cdot(-2) = \frac{12}{(1-2x)^7}$$

$$5)\left((2x)^3\right)' = 3(2x)^2\cdot(2x)' = 6(2x)^2 = 6\cdot 4x^2 = 24x^2$$

Выполнить самостоятельно:

$$2)(5x+2)^{-3} =$$

$$4)(2-5x)^4 =$$

$$6)(-5x)^4 =$$

Вычислить производную:

$$1)(\sqrt[3]{2x+7})' = ((2x+7)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(2x+7)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+7)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+7)^{\frac{2}{3}}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$$

$$3)(\sqrt[4]{3x})' = ((3x)^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}(3x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x)^{\frac{3}{4}}} \cdot 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x)^3}}$$

Выполнить самостоятельно:

$$2)(\sqrt[4]{7-3x})' =$$

$$4)(\sqrt[3]{5x})' =$$

Вычислить производную:

$$1)\left(\frac{1}{(2+3x)^2}\right)'=\left((2+3x)^{-2}\right)'=-2\bullet(2+3x)^{-3}\bullet 3=-\frac{6}{(2+3x)^3}$$

$$3)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(3x-2)^{-\frac{1}{3}}\bullet(3x-2)'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}\bullet 3=\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$$

$$5)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}\right)'=\left(\left(\sqrt[3]{3x-7}\right)^{-1}\right)'=\left((3x-7)^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}(3x-7)^{-\frac{4}{3}}\bullet(3x-7)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}}\bullet 3=-\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}}=-\frac{1}{(3x-7)\bullet\sqrt[3]{(3x-7)}}$$

Выполнить самостоятельно:

$$2)\frac{1}{(3-2x)^3}=$$

$$4)\sqrt[7]{(3-14x)^2}=$$

$$6)\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=$$

Найти f '(x_0),если:

1) $f(x) = x^6, x_0 = \frac{1}{2}$

1) $f'(x) = (x^6)' = 6x^5$

2) $6 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Ответ : $\frac{3}{16}$

2) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$

1) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Ответ : $\frac{1}{4}$

3) $f(x) = \sqrt{5-4x}, x_0 = 1$

1) $f'(x) = (\sqrt{5-4x})' = \left((5-4x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(5-4x)^{-\frac{1}{2}} \bullet (5-4x)' = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{\sqrt{5-4x}} \bullet (-4) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$

2) $-\frac{2}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{5-4}} = -2$

Ответ : -2

Найти производную функции.

$1)(x^2 + x)' = 2x + 1$

$2)\left(3x^2\right) = 6x$

$3)\left(-4x^3\right)' = -12x^2$

$4)(13x^2 + 26)' = 26x$

$5)(3x^2 - 5x)' = 6x - 5$

$6)(x^4 + 2x^2)' = 4x^3 + 4x$

$7)(x^3 + 5x)' = 3x^2 + 5$

$8)(2x^3 - 3x + 6x + 1)' =$

$= 6x^2 - 6x + 6$

$1)(x^2 - x)' =$

$2)\left(-17x^2\right) =$

$3)\left(0{,}5x^3\right)' =$

$4)(8x^2 - 16)' =$

$5)(5x^2 + 6x - 7)' =$

$6)(x^5 - 3x^2)' =$

$7)(-2x^3 + 18x)' =$

$8)(-3x^3 + 2x^2 - x - 5)' =$

Вычислить производную:

$$1)\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)'=\left(x^2+x^{-3}\right)'=2x-3x^{-4}=2x-\frac{3}{x^4}$$

$$2)\left(2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right)'=\left(2x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Выполните самостоятельно:

$$1)x^3+\frac{1}{x^2}=$$

$$2)3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[14]{x}=$$

Найти f ' (0) и f '(2)

$$1)f'(x) = (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$2)f'(x) = (-x^3 + x^2)' = -3x^2 + 2x$$

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -8$$

Выполнить самостоятельно:

$$1)x^3 - 2x =$$

$$2)x^2 + x + 1 =$$

Найти f '(1)

$$1)\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-1}+x^2)=-x^{-2}-2x^{-3}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

$$f'(1)=-\frac{1}{1^2}-\frac{2}{1^3}=-3$$

$$2)\ f'(x)=\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right)'=(3x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-3})'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}+6x^{-4}=\frac{-3}{2\sqrt[2]{x^3}}+\frac{6}{x^4}=\frac{-3}{2x\sqrt{x}}+\frac{6}{x^4}$$

$$f'(1)=-\frac{3}{2}+6=4\frac{1}{2}$$

Выполнить самостоятельно:

$$1)\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1=$$

$$2)x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=$$

Решить уравнение f'(x)=0

$$1)\ f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$$

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$2)\ f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x - 3)' =$$

$$= 6x^2 + 6x - 12$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$Д = 1 - 4 \bullet (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1=3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Решить самостоятельно.

$$1)\ -x^2 + 3x + 1$$

$$2)\ x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

Производная некоторых элементарных функций

$$1)\left(x^{p}\right)'=p\cdot x^{p-1}$$

$$2)\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$

$$3)(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$4)\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a$$

$$5)(\log_{a}x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

$$6)(linx)'=\cos x$$

$$7)(\cos x)'=-linx$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Решение упражнений на применение всех формул вычисления производных.
Найти производную

$$1)(e^x+\cos x)'=e^x-\sin x$$

$$2)(e^{2x}-3\sin x)=e^{2x}\bullet(2x)'-3\cos x=2\bullet e^{2x}-3\cos x$$

$$3)(\sin(3x+1)-e^{2x-1})'=\cos(3x+1)\bullet(3x+1)'-e^{2x-1}\bullet(2x-1)'=$$

$$=3\bullet\cos(3x+1)-2\bullet e^{2x-1}$$

$$4)(\ln(4x-1)+2^x)'=\frac{1}{4x-1}\bullet(4x-1)'+2^x\bullet\ln 2=\frac{4}{4x-1}+2^x\bullet\ln 2$$

Выполнить самостоятельно:

$$1)(\sin x - e^{x})' =$$

$$2)(4\cos x - e^{4x})' =$$

$$3)(\sin(4-2x) + 3^{x})' =$$

$$4)(2\ln(1-2x) + \frac{1}{2}x^{2}) =$$

Геометрический смысл производной.

Если k>0,то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ в этом случае функция возрастает и говорят, что прямая направлена вверх.

Если k<0,то $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ в этом случае функция $y=kx+b$ и говорят, что прямая направлена вниз.

Геометрический смысл производной состоит в том,что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x) = k,$$

где k-угловой коэффициент касательной.

Уравнение касательной к графику функции.

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где x_0- абсцисса точки касания.

Практические задания

$$1)\ f(x)=x^2+x+1\ ;\ \ x_0=1$$

Решение :

$$1.\ y=f(x_0)+f'(x_0)\bullet(x-x_0)$$

$$2.а)\ f(x_0)=1+1+1=3$$

$$б)\ f'(x_0)=(x^2+x+1)'=2x+1$$

$$в)\ f'(x_0)=2+1=3$$

$$y=3+3(x-1)$$

$$y=3+3x-3$$

$$y=3x$$

Ответ : $y=3x$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{x}\ ;\ \ x_0=-2$$

Решение :

$$1.\ y=f(x_0)+f'(x_0)\bullet(x-x_0)$$

$$2.а)\ f(x_0)=-\frac{1}{2}$$

$$б)\ f'(x)=(\frac{1}{x})'=x^{-1}=\frac{-1}{x^2}$$

$$в)\ f'(x_0)=\frac{-1}{2^2}=\frac{-1}{4}$$

$$y=\frac{-1}{2}+(\frac{-1}{4})\bullet(x+2)$$

$$y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{4}x-1$$

Ответ : $y=-\frac{1}{4}x-1$

Самостоятельно:

$$1)\, y = x^3 + 3x\ ;\ x_0 = 3$$

$$2)\, y = \sin x\ ;\ x_0 = \frac{\pi}{6}$$

Применение производной к исследованию функций.

Производная широко используется для исследования функций, т.е. для изучения различных свойств функций.

- Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*. Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют *критическими точками этой функции*. Т.о.,для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции f(x), *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Пусть функция f(x) дифференцируема на интервале (a;b),

$x_0 \in (a;b)$, и $f'(x_0)=0$. Тогда:

1)Если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x)>0$ слева от точки x_0 и $f'(x)<0$ справа от точки x_0, то x_0- точка максимума функции f(x).

2)Если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0- точка минимума функции f(x).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Задача.
Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Решение:

1)Найти область определения функции

X∈R

2)Найти производную:

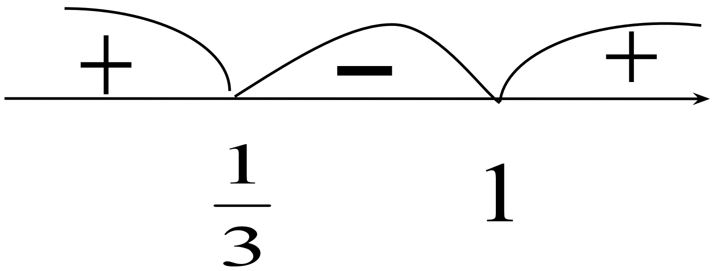
$f'(x)=(x^3-2x^2+x)'=3x^2-4x+1$

3)Найти стационарные точки

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 1$$

4)Найти промежутки монотонности.



$$\text{при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \text{ и } x \in [1; +\infty), \text{ ф-я возрастает, т.к. } f'(x) > 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\text{при } x \in [\frac{1}{3}; 1], \text{ ф-я убывает, т.к. } f'(x) < 0$$

5)Найти точки экстремума

При $x = \frac{1}{3}$ ф - я имеет максимум, т.к. $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-"

При $x = 1$ ф - я имеет минимум, т.к.производная меняет знак с "-" на "+"

$$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 - 2 \cdot (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}) - \textit{максимум}$$

$$(1;0) - \textit{минимум}$$

6)Составить таблицу.

X	$x\in(-\infty;\frac{1}{3}]$	$x=\frac{1}{3}$	$x\in[\frac{1}{3};1]$	$x=1$	$x\in[1;+\infty)$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

7)Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox

$$x^3-2x^2+x=0$$

$$x\cdot(x^2-2x+1)=0$$

$$x=0;\ \ x^2-2x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}$$

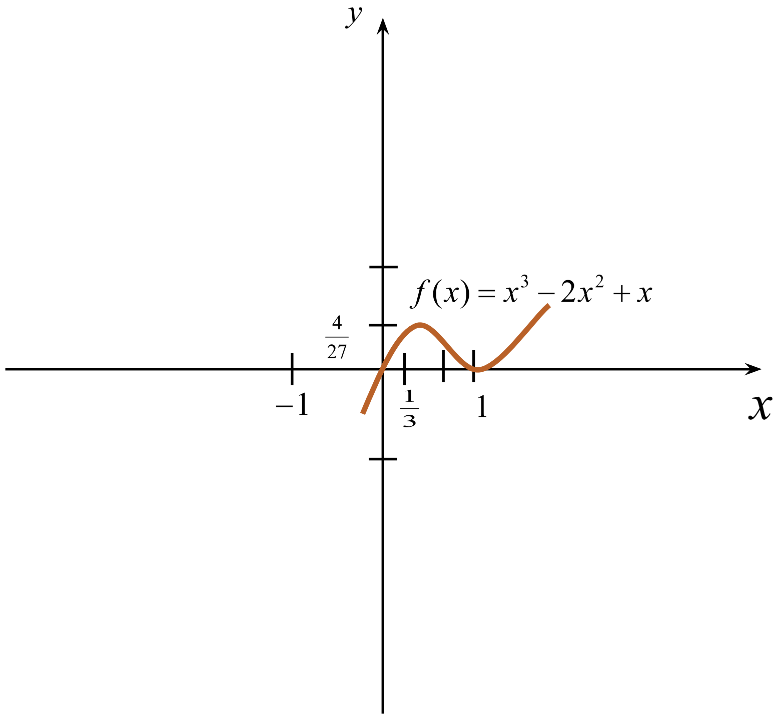
$$x=1$$

С осью Oy

$$f'(0)=0^3-2\cdot0^2+0=0$$

$$y=0$$

8)Построить график



Решить самостоятельно.

1 *вариант.*

$$y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$y = 6x^4 + 4x^6$$

2 *вариант.*

$$y = x^3 + 6x^2 - 9x$$

$$y = 3x^5 + 5x^3$$

Список используемой литературы

- Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М.; изд. «Академия», 2010.
- Башмаков М.И.Задачник Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М.; изд. «Академия», 2012.
- http://comp-science.narod.ru - Учителям информатики и математики и их любознательным ученикам (дидактические материалы по информатике и математике)
- http://mathem.h1.ru - МАТЕМАТИКА ON-LINE - формулы по математике, геометрии, высшей математике и т.д. Так же здесь есть справочная информация по математическим дисциплинам и интересные статьи
- Алимов Ш.А. Алгебра и начало анализа. 10 - 11кл. изд. «Просвещение», 2008.

Спасибо за внимание.