Теория вероятностей

Комбинаторика

Теория вероятностей

Решая задачи по теории вероятностей, мы постоянно используем одну и ту же формулу, которая одновременно является классическим определением вероятности:

$$p = \frac{k}{n}$$

где *k* — число благоприятных исходов, *n* — общее число исходов.

Напомним, что ответом к задачам с кратким ответом могут быть только целые числа или конечные десятичные дроби, поэтому полученную обыкновенную дробь необходимо переводить в десятичную.
Во избежание ошибок следует различать два типа условий. В условиях вида «из 100 сумок 8 дефектных» имеется в виду, что всего сумок 100, из них дефектных — 8, качественных — 92. В условиях вида «на каждые 100 сумок приходится 8 дефектных» предполагается, что всего сумок 108, из них дефектных — 8, качественных — 100.
Приведем пример такого задания.
Задание. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
Решение. По условию из 108 сумок 100 являются качественными. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{100}{108} = \frac{25}{27} = 0,925... \approx 0,93.$$

Ответ: 0,93.

Задача .Изготовили 100 деталей, из которых 97 стандартных и 3 бракованных.
Какова вероятность выбора стандартной детали и выбора бракованной детали?

Ответ: 0,97 ; 0,03

Задача .Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что: а) выпадет четное число очков (А); б) выпадет число очков, кратное 3 (В); в) выпадет любое число очков, кроме 5 (С).

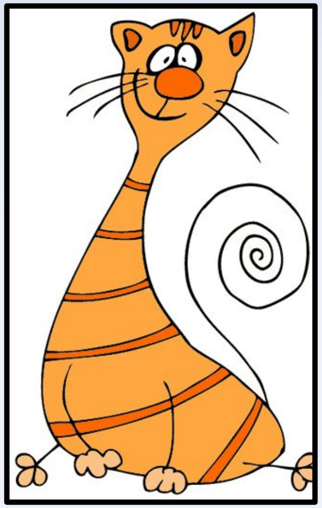
а) На гранях игральной кости имеется три четные цифры (2,4,6), т.е. число искомых исходов m = 3. Число всех возможных исходов n = 6 $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

б) Имеются две цифры, кратные трем (3,6), m = 2, n = 6.

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

в) Искомыми исходами являются цифры 1,2,3,4,6 - всего их пять m = 5, n = 6. $p = \frac{5}{6}$

Задача .Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. Наудачу выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это лицо – мужчина (считать, что мужчин и женщин одинаковое число).



Пусть мужчин и женщин будет одинаковое (согласно условию) произвольное число, например, по10000. Из 10000 мужчин, страдающих дальтонизмом, будет $10000 \cdot 0,05 = 500$, а женщин $10000 \cdot 0,0025 = 25$. Таким образом, из 20000 человек 525 ($n = 525$) страдают дальтонизмом.

Тогда вероятность того, что наудачу выбранное лицо, страдающее дальтонизмом,

мужчина, $p = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}$

На семинар приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России.

Заметим, что поскольку порядок докладов определяется
жеребьевкой, вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России такая же, как вероятность того, что доклад ученого из России окажется первым. То есть эта вероятность не зависит от номера выступления.

В нашей задаче на семинар приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании, то есть всего 10 человек.
Значит, число всех возможных исходов равно 10. Из России приехали 3 ученых, значит, число благоприятных исходов, то есть тех событий, которые нас устраивают, равно 3.
Следовательно, вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России равна $\frac{3}{10}$=0,3

Ответ: 0,3

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Заметим, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции с той же вероятностью, что и доклад любого другого участника конференции. Поэтому вопрос задачи можно переформулировать так: с какой вероятностью любой участник конференции выступит в последний день. Найдем, какое количество докладчиков должно выступить в последний день конференции. Так как всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями, на два последних дня запланировано **75-17х3=24 доклада**. Значит, на последний день запланировано 12 докладов, то есть **количество благоприятных исходов равно 12**. **Число всех возможных исходов равно 75**, так как всего запланировано 75 докладов. Итак, $p=\frac{12}{75}=0,16$ **Ответ: 0,16.**

Вася выбирает трехзначное число. Найти вероятность того, что оно делится на 6. Ответ округлите до сотых.

Выясним количество трехзначных чисел, кратных 6. Наименьшее из них 102, а наибольшее 996.
По формуле n – го члена арифметической прогрессии выясним, что 996 = 102 + 6(n – 1). Отсюда n = 150, тогда вероятность , что Вася выберет нужное число равно $\frac{1}{150} \approx 0{,}006 \approx 0{,}01$.

Паша наудачу выбирает двузначное число. Найдите вероятность того, что оно оканчивается на 7.

Решение:

Всего двузначных чисел – <u>90</u>.
Двузначных чисел, оканчивающихся на 7:
17,27,37,47,57,67,77,87,97 – <u>9</u> чисел.
Вероятность того, что наугад выбранное двузначное число оканчивается на 7, равна:
9:90=0,1

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

"Зафиксируем" Руслана Орлова. Теперь осталось найти вероятность того, что в паре с ним окажется бадминтонист из России. Если мы исключили Руслана Орлова из списка спортсменов (мы его "зафиксировали"), то нам осталось выбрать ему пару из 25 спортсменов, из которых 9 участников из России.

То есть число всех возможных исходов равно 25, а число благоприятных исходов равно 9.

Следовательно, $p=\frac{9}{25}=0{,}36$

Ответ: 0,36

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

Чтобы решить эту задачу, нам нужно вспомнить **правило умножения вероятностей**. Так как результат каждого бросания монеты не зависит от результата бросания монеты в другие разы, мы имеем дело с **независимыми событиями**.

Вероятность того, что произойдут независимые события А и В, равна произведению вероятностей события А и события В. $\mathrm{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$

В нашей задаче орел не выпадет ни разу, если в результате бросания монеты каждый раз будет выпадать решка. Вероятность выпадения решки в каждом случае равна $\frac{1}{2}$.

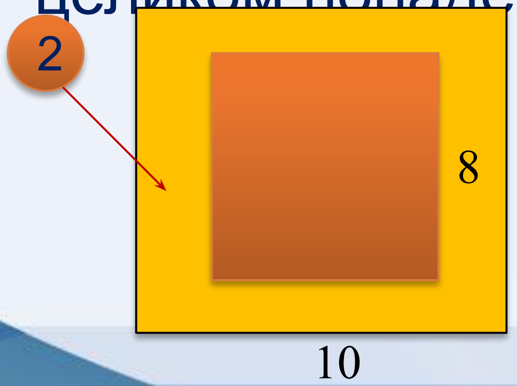
Значит, вероятность того, что решка выпадет в результате всех четырех бросаний равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

Ответ: 0,0625

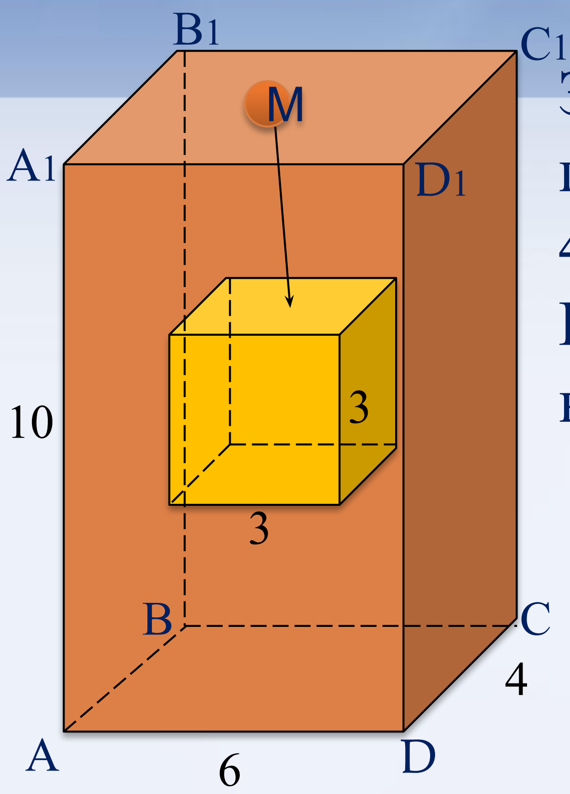
Задача .Если абонент ждет телефонного вызова с 2 до 3 часов, то какова вероятность того, что этот вызов пройдет с 2ч 30мин до 2ч 40мин.?

$$\text{Ответ: } p = \frac{10 \text{ мин}}{60 \text{ мин}} = \frac{1}{6}$$

Задача .На листок бумаги в клетку
со стороной 10 мм падает кружок диаметра 2 мм. Какова вероятность того, что кружок целиком попадет внутрь клетки?



На рисунке заштрихована область, попадание центра кружка в которую дает возможность утверждать, что кружок не заденет ни одной из сторон квадрата. Эта область представляет собой квадрат со стороной 8мм. Искомая вероятность равна $p = \frac{8 \cdot 8}{10 \cdot 10} = 0{,}64$



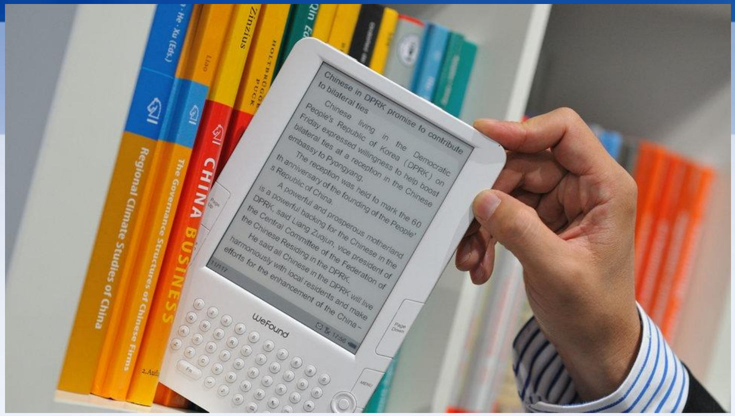
Задача .Внутри прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 4, 6, 10см, наудачу выбирается точка М. Какова вероятность того, что она окажется внутри данного куба, ребро которого 3см?

Пусть событие N – точка оказалась внутри куба с ребром, равным 3см. Будем считать, что исходы испытания распределены равномерно.
Тогда вероятность наступления события N пропорциональна мере этого куба и равна

$$p = \frac{V_{куба}}{V_{пар}}$$

Но объем куба Vкуба = 27см^3, а объем параллелепипеда Vпар. = 240см^3.

Следовательно, $p = \frac{27}{240} = 0{,}1125$



Вероятность того, что электронная книга прослужит больше трёх лет, равна 0,86. Вероятность того, что она прослужит больше пяти лет, равна 0,72. Найдите вероятность того, что она прослужит меньше пяти лет, но больше трёх.

P = 0,86(5 лет)-0,72(3 года)=0,14(больше 3, но меньше 5)

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

P = 0,82-0,51=0,31 (число пассажиров от 10 до 17)

Задача .Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу.
Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Пусть B – событие, состоящее в том, что набрана нужная цифра. Диск телефонного аппарата содержит 10 цифр, следовательно, общее число возможных случаев $n = 10$.
Эти случаи несовместимы, единственно возможны и равновозможны.
Событию B благоприятствует только один случай.
Следовательно, искомая вероятность $p = \frac{1}{10}$

Задача .Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и набрал их наудачу.
Определить вероятность того, что найдены нужные цифры.

- *Число размещений* m различных элементов на n местах $(m \le n)$

(число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если *порядок, в котором они выбраны, имеет значение*)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1);$$

Задача .Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры
и набрал их наудачу. Определить вероятность того,
 что найдены нужные цифры.

Решение.
Пусть благоприятное событие, состоит в том, что набраны две нужные цифры.
Всех равновозможных, единственно возможных
и несовместимых случаев набора двух цифр из 10 столько,
 сколько можно составить различных размещений из 10 цифр по 2, т.е. $A_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!} = 9 \cdot 10 = 90$
Благоприятствует событию только один случай из этих 90.
Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{1}{90}$.

Задача .Даны 5 точек, никакие
3 из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад 2 точки, ученик получит нужную прямую.

Формула $p = \frac{k}{n}$ прекрасно работает до тех пор, пока задачи были легкими, а числа, стоящие в числителе и знаменателе — очевидными. Однако последние пробные экзамены показали, что в настоящем ЕГЭ по математике могут встречаться значительно более сложные конструкции. Отыскание значений *n* и *k* становится проблематичным. В таком случае на помощь приходит комбинаторика.

Комбинаторика

Число сочетаний и факториалы

Пусть имеется *n* объектов (карандашей, конфет, бутылок водки — чего угодно), из которых требуется выбрать ровно *k* различных объектов. Тогда количество вариантов такого выбора называется *числом сочетаний* из *n* элементов по *k*. Это число обозначается C_n^k и считается по специальной формуле.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Выражение *n*! читается как «эн-факториал» и обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Кроме того, в математике по определению считают, что 0! = 1 — подобный бред редко, но все же встречается в задачах по теории вероятностей.

Что дает нам эта формула? На самом деле, без нее не решается практически ни одна серьезная задача. Кроме того, в формуле числа сочетаний очень легко запутаться: где стоит и что обозначает число *n*, а где — *k*. Поэтому для начала просто запомните: меньшее число всегда стоит сверху — точно так же, как и в формуле определения вероятности (вероятность никогда не бывает больше единицы).

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Сочетания


Задача .Даны 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад 2 точки, ученик получит нужную прямую.

Решение.

Пусть событие А – выбор исходной прямой.

Число всех возможных исходов равно количеству прямых, проходящих через заданные 5 точек.

Т.к. прямая определяется парой точек, и порядок точек внутри этой пары не имеет значения, то каждая пара должна отличаться хотя бы одной точкой. Следовательно, надо найти число сочетаний из 5 элементов по 2:

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 1 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

Значит, число всех возможных пар 10, а искомой является только одна пара точек, поэтому $p = \frac{1}{10}$

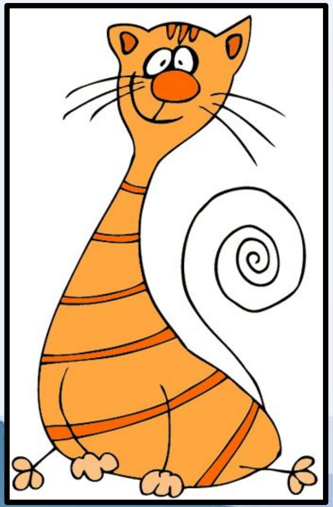
Задача .Декан факультета вызвал через старосту трех студентов из группы, состоящую из 5 не выполнивших задания человек. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех студентов из указанной группы. Какова вероятность того, что к декану явятся именно вызванные им студенты?

Число равновозможных, единственно возможных и несовместимых случаев выбора трех студентов будет столько, сколько можно составить различных сочетаний из 5 элементов по 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$$

а благоприятствует условию только один (m = 1).

Искомая вероятность $p = \frac{1}{10}$



В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

Можно эту задачу решить и таким способом:
Пусть монету бросают *n* раз. Тогда вероятность того, что орел (решка) выпадет ровно *k* раз, можно найти по формуле:

$$p = \frac{C_n^k}{2^n}$$

Где C_n^k — число сочетаний из *n* элементов по *k*, которое считается по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\quad C_4^4 = 1$

$$P = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

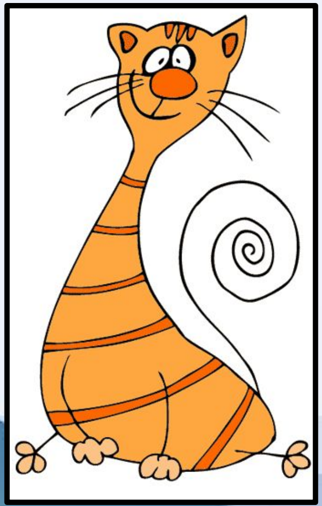
Задача .Буквы а, а, в, к, к, о, х
написаны на отдельных карточках.
Какова вероятность того,
что извлекая все эти карточки
по одной наудачу
(без возвращения обратно),
получим в порядке их выхода
слово *Каховка*?

- *Число перестановок* n различных элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

__Замечание.__ Число 0! во всех формулах считается равным 1;

Событие А – такое расположение карточек с названными буквами, при котором составлено было бы
(в порядке их выхода) слово *Каховка*,
всего равновозможных исходов испытания будет столько, сколько можно сделать перестановок из 7 элементов
$n = P_7 = 7! = 5040$.
Среди них благоприятными будут те, которые образуют слово *Каховка.*
Число их установим так: если бы в этом слове не было повторяющихся букв, то благоприятный исход был бы один.
Однако в слове буквы *а* и *к* встречаются дважды,
и если их поменяем местами, то снова получим это же слово.
Следовательно, благоприятных исходов окажется не один,
а четыре ($m = 4$).
Таким образом, вероятность $p = \frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}$



Задача .В ящик, имеющий два отделения, брошено два шарика. Какова вероятность того, что в каждом отделении будет находиться один шарик?

Можно выделить всего 4 равновозможных, единственно возможных и несовместимых случая:

1) оба шарика попали в первое отделение;

2) оба шарика попали во второе отделение;

3) первый попал в первое отделение, второй – во второе;

4) первый попал во второе отделение, второй – в первое.

Из рассмотренных случаев два благоприятствуют попаданию шаров в различные отделения.

Искомая вероятность $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ответ: 0,5.

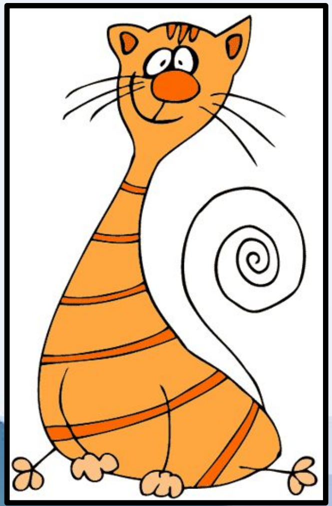
Задача .В библиотечке 25 книг. Наудачу выбирается 3 книги. Какова вероятность того, что будут выбраны нужные книги?

Всего равновозможных, единственно возможных и несовместимых случаев будет столько, сколько можно составить различных размещений из 25 элементов по 3

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = 23 \cdot 24 \cdot 25 = 13800$$

а число случаев, благоприятствующих тому, что будут выбраны нужные три книги, столько, сколько можно составить перестановок из 3 элементов Р3 = 3! = 1·2·3=6.

Искомая вероятность $p = \frac{6}{13800} = \frac{1}{2300}$



Задача .Проверено 100 деталей. Среди них оказалось 80 стандартных. Какова относительная частота появления стандартной детали?

Пусть событие А – при проверке деталь оказалась стандартной.
По определению относительная частота появления этого события

$$W = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Во время вероятностного эксперимента монету бросили 1000 раз, 532 раза выпал орел. На сколько частота выпадения решки в этом эксперименте отличается от вероятности этого события?

Частота события x -- отношение N(x) / N числа N(x) наступлений этого события в N испытаниях к числу испытаний N.
Если орел выпал 532 раза, то решка выпала 1000-532=468
Частота этого события равна

$$\frac{N(x)}{N} = \frac{468}{1000} = 0,468$$

Вероятность выпадения решки равна 0,5. Следовательно, **частота выпадения решки в этом эксперименте отличается от вероятности этого события на** |0,5-0,468|=0,032
Ответ: 0,032

Задача .Естествоиспытатель К.Пирсон подбрасывал монету и записывал полученный результат. Проделав эту операцию 24000 раз, обнаружил, что герб выпадал в 12012 случаях.
Какова относительная частота выпадения герба?

Относительная частота выпадения герба

$$W = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005 \approx 0{,}5$$

Задача .Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

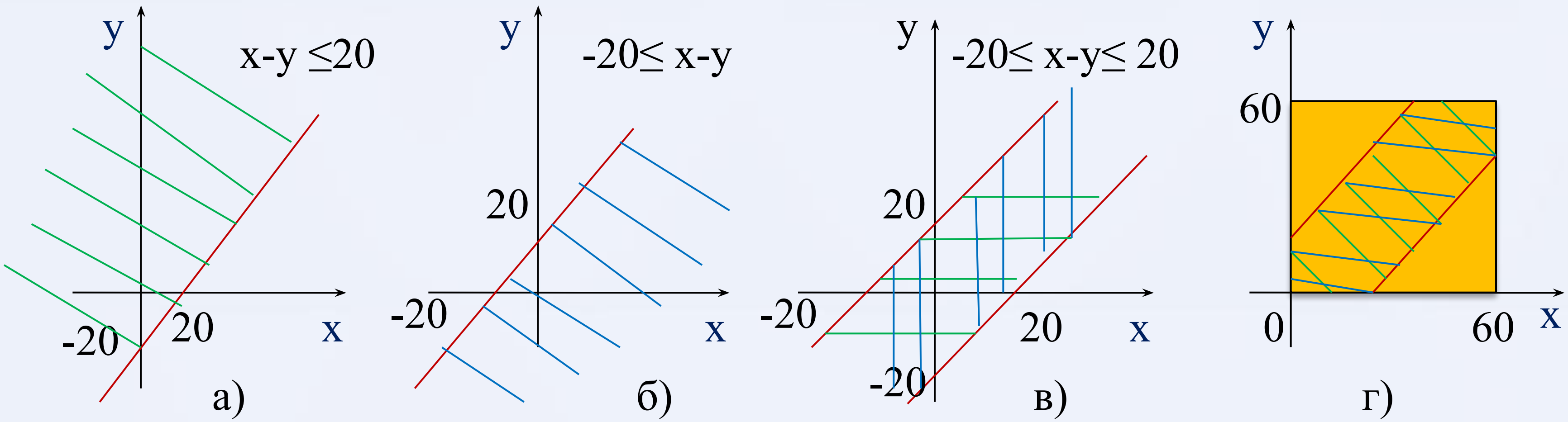
Ответ: 0,05.

Задача .При испытании партии приборов относительная частота годных приборов 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Ответ: 180.

Задача .Два друга Х и У условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами, при этом пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи друзей Х и У, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

Пусть момент прихода друзей Х и У соответственно x и y.
Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно выполнения неравенства $|x-y| \le 20$, или $-20 \le x-y \le 20$.
В прямоугольной системе координат множество точек (x;y), координаты которых удовлетворяют неравенству, образуют полосу (рис.в):



Все возможные исходы изображаются точками квадрата со стороной 60 (минут), а исходы, благоприятствующие встрече, изображаются в заштрихованной области квадрата (рис.г). $S_{фмг} = S_{квадр} - 2S_{\Delta} = 3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 3600 - 1600 = 2000$

Искомая вероятность $p = \frac{S_{фиг}}{S_{квадр}} = \frac{2000}{3600} \approx 0{,}56$

Задача .В урне 5 белых шаров, 3 черных, 2 в полоску и 7 в клетку. Найти вероятность того, что из урны будет извлечен одноцветный шар.

Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: Р (А + В) = Р (А) + Р (В).

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события называются *совместными*.

1 способ

Пусть А – событие, состоящее в извлечении белого шара;
В – черного шара; А+В – одноцветного шара.
Т.к. событию А+В благоприятствует 8 исходов,
а число всех шаров в урне 17, то $p(A+B)=\frac{8}{17}$

2 способ

$p(A)=\frac{5}{17}$; $p(B)=\frac{3}{17}$; $p(A+B)=p(A)+p(B)=\frac{5}{17}+\frac{3}{17}=\frac{8}{17}$

Задача .Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш
по 20 руб., на 10 – по 15 руб., на 15 – по 10 руб.,
на 25 – по 2 руб. и на остальные – ничего.
Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 руб.

Пусть A,B,C – события, состоящие в том,
что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно
20,15 и 10 руб. Т.к. события A,B и C несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = \frac{30}{100} = 0{,}3$$

Задача .В коробке 250 лампочек, из них 100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт, 50 - по 15 Вт. Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки
не превысит 60 Вт.

Пусть А – событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, В – 25 Вт, С – 15 Вт, D – 100 Вт.
События A,B,C,D образуют полную систему, т.к. все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки). Вероятность наступления одного из них есть достоверное событие, т.е. $P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1$.
События «мощность лампочки не более 60 Вт» и «мощность лампочки более 60 Вт» – противоположные.
По свойству противоположных событий
$P(A)+P(B)+P(C) = 1 - P(D)$,
$P(A+B+C) = 1 - \frac{100}{250} = 1 - 0,4 = 0,6$

Задача .В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые.
Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные, В – все 4 галстука будут белые. 4 галстука из 30 галстуков можно выбрать C_{30}^{4} способами, а из 12 - можно выбрать C_{12}^{4} способами.
Поэтому вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P(A) = \frac{C_{12}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{\frac{12!}{4!8!}}{\frac{30!}{4!26!}} = \frac{\frac{9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}{\frac{27\cdot28\cdot29\cdot30}{1\cdot2\cdot3\cdot4}} = \frac{11}{609},$$

аналогично белые $P(B) = \frac{C_{18}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{68}{609}$

Т.к все 4 галстука должны быть одного цвета, то искомая вероятность

$$P = P(A)+P(B) = \frac{11}{609} + \frac{68}{609} = \frac{79}{609} \approx 0,13$$

Ответ: 0,13.

Задача .Вероятность того, что студент сдаст экзамен на отлично, равна 0,2; на хорошо – 0,4; на удовлетворительно – 0,3; на неудовлетворительно – 0,1. Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен.

1 способ.

P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = 0,2+0,4+0,3 = 0,9

2 способ.

Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1, тогда

P(A+B+C) = 1 – P(D) = 1 - 0,1 = 0,9

Ответ: 0,9.

Задача .В ящике 10 лампочек по15 Вт, 10 – по 25 Вт, 15 – по 60 Вт и 25 – по 100 Вт. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт, если известно, что число ватт на взятой лампочке – четное.

Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению этих вероятностей: $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события называются *зависимыми*.

Задача .В ящике 10 лампочек по15 Вт,
10 – по 25 Вт, 15 – по 60 Вт и 25 – по 100 Вт.
Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт,
если известно, что число ватт на взятой лампочке – четное.

Пусть событие А состоит в том, что лампочка имеет мощность более 60 Вт, а событие В – что число ватт является четным.
Но «более 60 Вт» - это в данном случае 100Вт и, значит,
$\mathrm{p(AB)} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$, а «четное число ватт»- это 60 и 100 Вт, т.е.
$\mathrm{p(B)} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.
Искомая вероятность $\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{p(AB)}}{\mathrm{p(B)}} = \frac{5}{12} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$

Задача .В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй – 5 черных и 7 белых. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Пусть А1 – из первой урны извлечен белый шар;
А2 – из второй урны извлечен белый шар.
События А1 и А2 независимы.

$p(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $p(A_2) = \frac{7}{12}$

$p = p(A_1)\cdot p(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{30}$

Найдите вероятность того, что пятизначный цифровой код доступа не содержит нулей

Решение. Вероятность, что код из одной цифры не будет содержать 0 равна $\frac{9}{10} = 0{,}9$. Тогда вероятность, что код из пяти цифр не содержит 0 равна $P = 0{,}9^5 = 0{,}59049 \approx 0{,}59$

Задача. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо.
Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;
Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.
Найти вероятность того, что:
а) оба элемента выйдут из строя;
б) оба элемента будут работать.

Событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие *A* не происходит, называют *противоположным* к событию *A*.

Пусть событие А – выход из строя первого элемента, событие Е – выход из строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).
а) одновременно появление А и Е есть событие АЕ $P(AE) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$
б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию А – выходу этого элемента из строя);
Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию Е

$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \text{ и } P(\bar{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$. $P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$

Задача .В экзаменационные билеты включено по 2 теоретических вопроса и по 1 задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

Полный ответ на билет состоит из произведения двух событий:
Студент одновременно ответит на два вопроса (событие А)
и решит задачу (событие В).

Число всех возможных комбинаций из 56 вопросов по 2

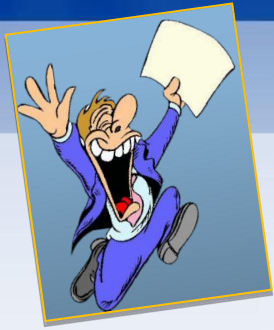
$$C_{56}^{2} = \frac{56!}{2!\,(56-2)!} = \frac{55 \cdot 56}{1 \cdot 2} = 1540$$

Т.к. студент подготовил только 50 вопросов, то число исходов, благоприятствующих событию А, есть

$$C_{50}^{2} = \frac{50!}{2!\,(50-2)!} = \frac{49 \cdot 50}{1 \cdot 2} = 1225;\ \ p(A) = \frac{C_{50}^{2}}{C_{56}^{2}} = \frac{1225}{1540} = \frac{245}{308}$$

Вероятность события В определяется тем, что студент знает 22 задачи из 28 возможных: $p(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$

Т.к. события А и В независимы и должны выполняться одновременно, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{245}{308} \cdot \frac{11}{14} = \frac{2695}{4312} = 0{,}625$



Задача .В Санкт-Петербург – 15 мест на практику, в Киев – 10, в Баку – 5. Какова вероятность того, что определенные три студента попадут в один город?

Событие E – определенные три студента попадут в один город.
Это событие может реализоваться: или в виде события C_1 – указанные 3 студента попадут в С.- Петербург; или в виде события C_2 – попадут в Киев;
или в виде события C_3 – попадут в Баку.
Каждое из этих событий можно рассматривать как совмещение трех событий.
Например, событие C_1 – в С.-Петербург попадут и первый из указанных студентов (событие A_1), и второй студент (событие A_2), и третий из указанных студентов (событие A_3).

Вероятности этих событий

$$P(A_1) = \frac{15}{30};\ P(A_2) = \frac{14}{29};\ P(A_3) = \frac{13}{28};$$

$$P(C_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{15}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28}$$

Аналогично можно рассматривать и события C_2 и C_3.

По правилам сложения и умножения вероятностей

$$P(E) = \frac{15}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{3}{28} = \frac{117}{812}$$

Задача .Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика «четверка» выпадет: а) ровно 3 раза;
б) ровно 2 раза; в) ровно 6 раз;
г) не выпадет ни разу?

Пусть проведена серия независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *А* равна *р* (схема Бернулли). Тогда вероятность того, что в *серии из n испытаний* событие *А появится ровно k* раз, выражается *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

Число n независимых повторений (бросаний) равно 10.
Число k «успехов» равно 3.

Вероятность p «успеха», т.е. вероятность выпадения «четверки» при одном бросании кубика, равна $\frac{1}{6}$, а вероятность «неудачи» равна $\frac{5}{6}$.

а) $P_1 = C_{10}^{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \cdot 0{,}00129 \approx 0{,}155$

б) $P_2 = C_{10}^{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 45 \cdot 0{,}0065 \approx 0{,}29$

в) $P_3 = C_{10}^{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 210 \cdot 0{,}00001 \approx 0{,}0021$

г) $P_4 = C_{10}^{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}16 \approx 0{,}16$

Задача .Найти вероятность того, что при 9 бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза.

«Успех» означает выпадение «орла» и его вероятность p = 0,5.
«Неудача» означает выпадение «решки» и ее вероятность q = 0,5.

Бросания предполагаем независимыми друг от друга. Это частный случай общей схемы Бернулли, в котором n=9, k = 4, p = 0,5, q = 0,5.

По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$

$$P = C_9^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 126 \cdot 0{,}002 \approx 0{,}246$$

Или еще способ решения этой задачи:
Пусть монету бросают *n* раз. Тогда вероятность того, что орел выпадет ровно *k* раз, можно найти по формуле:

$$p = \frac{C_n^k}{2^n}$$

$$P = \frac{C_9^4}{2^9} = \frac{\frac{9!}{4! \cdot 5!}}{512} = \frac{126}{512} \approx 0{,}246$$

Задача .За один выстрел стрелок поражает мишень с вероятностью 0,1.
Найти вероятность того,
что при 5 выстрелах он хотя бы раз попадет в мишень.

Считаем, что все 5 выстрелов производятся независимо друг от друга.
«Успех» означает попадание в мишень при одном выстреле.
Его вероятность p = 0,1. «Неудача» означает выстрел мимо мишени.
Ее вероятность равна q = 1-0,1 = 0,9.
Число k «успехов» отлично от нуля: $k \in \{1,2,3,4,5\}$, n =5, p = 0,1, q = 0,9.
А – событие, заключающееся в том, что при 5 выстрелах будет хотя бы 1 попадание. Тогда $\bar{A}$ – событие, при котором число «успехов» равно нулю т.е. стрелок все 5 раз «промазал».

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_5^0 \cdot (0{,}1)^0 (0{,}9)^5 \cdot = 1 - (0{,}9)^5 \approx 1 - 0{,}5905 \approx 0{,}4095$$

Задача .В следующих испытаниях найдите вероятности «успеха» и «неудачи»:

а) Бросают пару различных монет. «Неудача» – выпадение двух орлов.

б) Бросают игральный кубик. «Успех» – выпадение числа, кратного трем.

в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» – выпадение двух четных чисел.

г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» – среди них нет дамы пик.

Ответы:

а) 0,75 , 0,25

б) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

в) 0,75 , 0,25

г) $\frac{31}{36}$, $\frac{5}{36}$

Задача .Напишите формулы, по которым следует находить вероятность того, что при 4 бросаниях игрального кубика «тройка» выпадет:

а) ровно 2 раза

б) ровно 3 раза

в) ровно 4 раза

г) не выпадет ни разу

д) вычислите вероятности этих событий

Ответы:

а) $P=C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}1157$

б) $P=C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0{,}0154$

в) $P=C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}00077$

г) $P=C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}4822$

Задача .Из набора домино случайно вытаскивают одну «доминошку», записывают сумму очков на ней, и возвращают ее обратно.
Так делают 3 раза.
Найдите вероятность того, что:
а) дубль появляется ровно 1 раз;
б) дубль появляется ровно 2 раза;
в) дубль появляется хотя бы раз;
г) сумма очков на «доминошке» каждый раз больше 9.

Колличество дублей в наборе из 28 «доминошак» равно 7, значит вероятность достать дубль равна $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$, вероятность не достать - $\frac{3}{4}$.

а) $p = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{9}{64} \approx 0{,}4219;$

б) $p = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \cdot \frac{3}{64} \approx 0{,}1406;$

в) $p = 1 - C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 - \frac{27}{64} \approx 0{,}5781;$

г) Таких «доминошак» в наборе 4, значит вероятность достать такую равна $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$; $p = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \approx 0{,}0029$

Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами.

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно n + m способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Задача . В первый ящик положили 5 мобильников, а во второй – 3 мобильника. Сколькими способами можно вытащить один мобильник?

Из 1 ящика можно вытащить пятью способами, а из 2 – тремя способами. Всего существует 5+3 = 8 способов.

Задача . В первом ящике 5 мобильников с зеленым корпусом, а во втором – 3 мобильника с красным корпусом. Сколькими способами можно вытащить один зеленый и один красный мобильник?

Зеленые мобильники можно выбрать пятью способами, красные – тремя способами. Всего 1 зеленый и 1 красный можно выбрать $3 \cdot 5 = 15$ способами.

Задача . Сколько не более чем трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 так, чтобы цифры в числах не повторялись?

Надо узнать, сколько можно составить однозначных, двузначных или трехзначных чисел.

По правилу суммы их будет $N = N_1+N_2+N_3$.

Однозначных чисел будет 5, значит, $N_1 = 5$.

На месте десятков двузначных чисел можно поставить любую из пяти цифр. После каждого такого выбора на месте единиц можно поставить любую из четырех оставшихся цифр, т.к. цифры в числе не должны повторяться. По правилу произведения $N_2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Рассуждая аналогично, получим число различных трехзначных чисел $N_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Следовательно, $N = 5+20+60 = 85$.

Задача .В одной вазе лежит 5 яблок, а в другой -8 мандаринов. Сколькими способами можно выбрать:

а) яблоко или мандарин;

б) яблоко и мандарин?

Ответы:

а) $N = 5+8 = 13$

б) $N = 5 \cdot 8 = 40$

Задача .Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

$N = 17+13 = 30$

Ответ: 30.

Задача .В танцевальном кружке 5 мальчиков и 4 девочки. Руководитель хочет отобрать пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки для участия в соревнованиях.
Сколько он должен посмотреть пар, чтобы выбрать лучшую пару?

$N = 5 \cdot 4 = 20$

Ответ: 20.

Задача . Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать 1 билет из спортлото или автомотолотереи?

Денежно-вещевая лотерея в выборе не участвует, поэтому 10+6=16

Задача .Сколько имеется путей, которыми можно попасть из города А в город С через город В, если из А в В ведут две дороги, а из В и С – три дороги?

$N = 2 \cdot 3 = 6$

Ответ: 6.

Задача .На книжной полке стоят 25 книг по математике,
15 – по физике,
10 – по астрономии.
Сколькими способами можно выбрать 3 книги так, чтобы одна книга была по математике, другая – по физике и третья – по астрономии?

$$N = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 3750$$

Ответ: 3750.

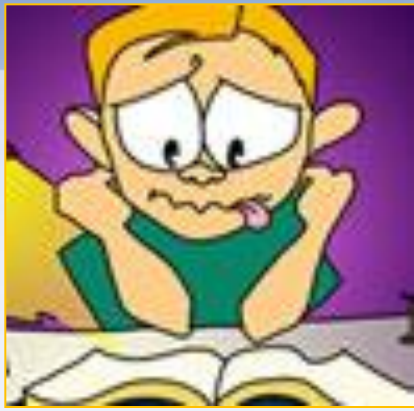
Задача .Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,4,5,9?

Составим таблицу: слева от первого столбца – первые цифры искомых чисел, а выше первой строки – вторые цифры этих чисел (учитывая, что числа – четные, т.е. оканчиваются на 0,2,4).

	0	**2**	**4**
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

5 строк · 3 столбика = 15 чисел

Ответ: 15.



Задача .Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1,4,7, если цифры в числе не повторяются?

При использовании правила умножения применяют схему-дерево возможных вариантов.

Двузначное число

1 цифра числа

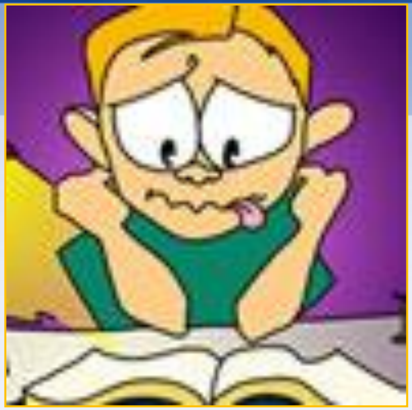
1 4 7

2 цифра числа

4 7 1 7 1 4

14,17 41,47 71,7

Ответ: 6



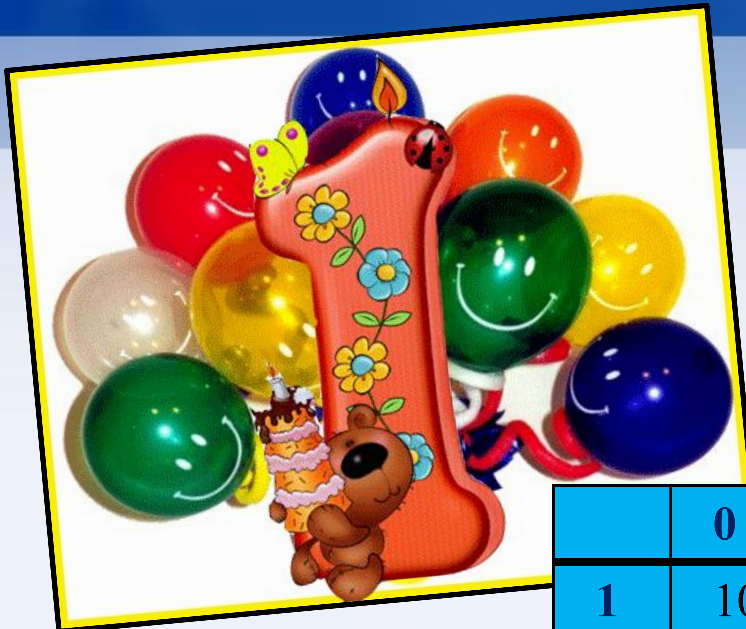
Задача .На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс,
а запить их он может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Вова может выбирать?

Составим таблицу.

	Плюшка	Бутерброд	Пряник	Кекс
Кофе	Кофе, плюшка	Кофе, бутерброд	Кофе, пряник	Кофе, кекс
Сок	Сок, плюшка	Сок, бутерброд	Сок, пряник	Сок, кекс
Кефир	Кефир, плюшка	Кефир, бутерброд	Кефир, пряник	Кефир, кекс

3 строки · 4 столбика = 12 вариантов завтрака

Ответ: 12.



Задача. Сколько двузначных чисел можно записать в десятичной системе счисления?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

9 строк $\cdot$10 столбиков = 90 чисел

Задача. Служитель зоопарка должен дать зайцу 2 различных овоща. Сколькими способами он может это сделать, если у него есть морковь, свекла и капуста?

Завтрак зайца

1 овощ М С К

2 овощ С К М К М С

Варианты МС, МК, СМ, СК, КМ, КС

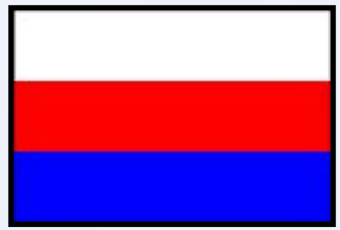
6 вариантов, но блюда МС и СМ, МК и КМ, КС и СК совпадают, поэтому 3 пары блюд *Ответ:* 3.

Задача. Туристическая фирма планирует посещение туристами
в Италии трех городов:
Венеции, Рима и Флоренции.
Сколько существует вариантов такого маршрута?

Варианты ВРФ, ВФР, РВФ, РФВ ФВР, ФРВ

Ответ: 6.

Задача. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трех горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других, флаг?




	Белый	Красный	Синий
Белый		б к с	б с к
Красный	к б с		к с б
Синий	с б к	с к б	


Ответ: 6.

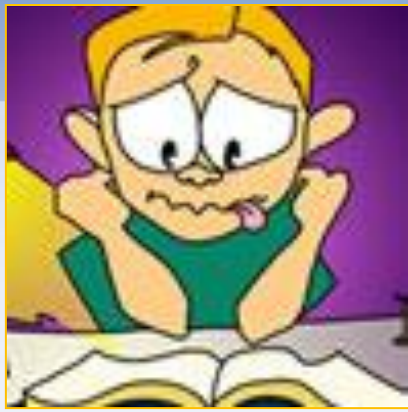
Задача. В коридоре висят три лампочки.
Сколько различных способов освещения коридора?

1 способ. По правилу умножения: $N = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$

2 способ. + горит, **-** не горит

+++	**++-**	**+-+**	**+--**
---	**--+**	**-+-**	**-++**

Ответ: 8.



Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: ***сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?***

$$P_n = n!$$

Задача. В соревнованиях участвовало 4 команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Задача .Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

Задача .Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Задача .Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, возле которого поставлены 12 стульев?

$P_{12} = 12! = 479001600$

Задача .Сколькими способами 7 книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

$P_7 = 7! = 5040$

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?*

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задача .Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Т.к. двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$$

Задача .У нас есть 9 книг из серии «Занимательная математика». Сколькими способами можно подарить 3 из них?

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

Задача .Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

Задача .Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписании на день могут быть включены только три из них?

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

Задача .Сколько вариантов распределения
 трех путевок в санатории различного профиля можно составить
для пяти претендентов?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Задача .В городе проводится
 первенство по футболу.
 Сколько в нем состоится матчей,
 если участвуют
 12 команд?

$$A_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!} = 11 \cdot 12 = 132$$

Задача .Сколько сигналов можно подать 5 различными флажками, поднимая их в любом количестве и в произвольном порядке?

$$A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = \frac{5!}{(5-1)!} + \frac{5!}{(5-2)!} + \frac{5!}{(5-3)!} + \frac{5!}{(5-4)!} + \frac{5!}{(5-5)!} =$$

$$= 5 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?*

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Задача .Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

Т.к. порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то будут размещения с повторениями из 5 элементов по 3, а их число равно $A_5^{-3} = 5^3 = 125$

Код банковского сейфа состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что наудачу выбранный код содержит различные цифры?

Решение. Так как на каждом из шести мест в шестизначном шифре может стоять любая из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всех различных шестизначных номеров по правилу произведения будет $n = 10^6$. Номера, в которых все цифры различны, - это размещения из 10 элементов (10 цифр) по 6. Поэтому число благоприятствующих исходов $m = A_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200$. Искомая вероятность равна $\mathrm{p} = \frac{A_{10}^{6}}{10^6} = \frac{151200}{1000000} = 0{,}1512$

Задача .В тренировках участвовали 12 баскетболистов. Сколько различных стартовых пятерок может образовать тренер?

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

Задача .Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет «5 из 36»?

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!\,(36-5)!} = \frac{36!}{31!\cdot 5!} = 376992$$

Задача .Сколькими способами читатель может выбрать 2 книжки из 6 имеющихся?

$$C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$$

Задача .Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

$$C_{80}^{3} \cdot C_{3}^{1} = \frac{80! \cdot 3!}{3! \cdot 1! \cdot (80-3)! \cdot (3-1)!} = 246480$$

Задача .Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?

$$C_{78}^{2} = \frac{78!}{2!\,(78-2)!} = \frac{77 \cdot 78}{2} = 3003$$

Задача .Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита и трех цифр. Сколько различных номеров автомашин можно составить?

$$A_{33}^{-3} \cdot A_{10}^{-3} = 33^3 \cdot 10^3 = 35937000$$

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *<u>сколькими способами можно выбрать m ($m \le r$) из этих (n·r) предметов?</u>*

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

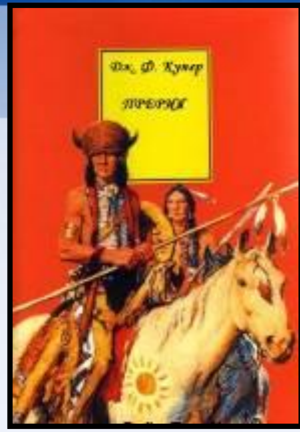
Задача . В кондитерском магазине продают 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, бисквитные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

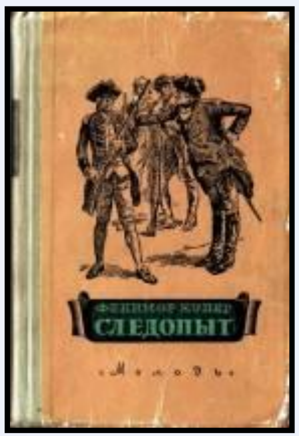
Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$C_4^{-7} = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

Задача .В книжный магазин поступили романы Ф.Купера «Прерия», Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?

$$C_{5}^{-17} = C_{21}^{17} = \frac{21!}{17!\,(21-17)!} = 5985$$





Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: <u>сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.</u>

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Задача . Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Всего 6 букв. Одинаковые буквы n_1«а» = 3, n_2«н» = 2, n_3«с» = 1.

$$\overline{P}_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$$

Задача .Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Всего 9 букв. Одинаковые буквы n_1«и» = 4, n_2«с» = 3, n_3«м» = 1, n_4«п» = 1 .

$$\overline{P}_9(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 2520$$

Задача .На сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи.

а) Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры?

б) Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?

а) $A_{4}^{-9} = 4^{9} = 262144$

б) $C_{4}^{-9} = C_{12}^{9} = \dfrac{12!}{9!\,(12-9)!} = 220$