



# ***Комплексные числа***

# После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

## **Знать:**

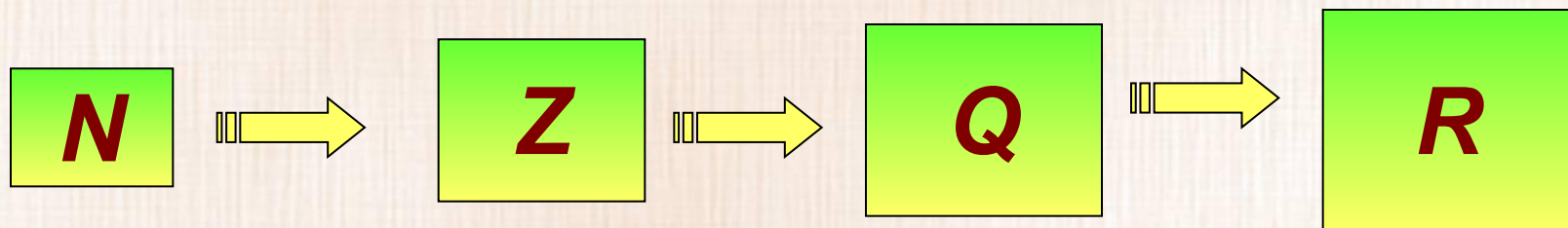
- алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

## **Уметь:**

- производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;
- переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;
- пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;
- в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

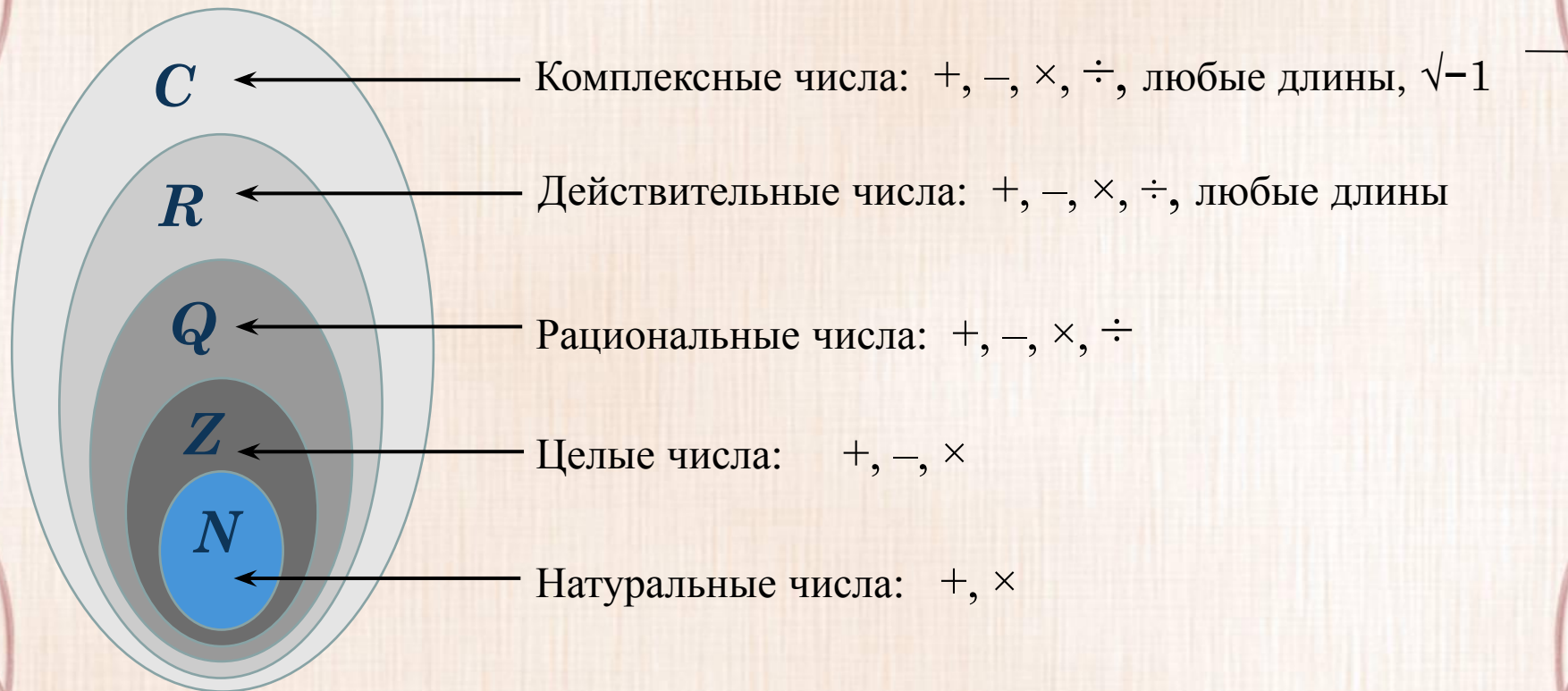
# I. Подготовка к изучению нового материала

Какие числовые множества Вам знакомы?



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

# Алгебраические операции



<b>Числовая система</b>	<b>Допустимые алгебраические операции</b>	<b>Частично допустимые алгебраические операции</b>
<b>Натуральные числа, <math>N</math></b>	<b>Сложение, умножение</b>	<b>Вычитание, деление, извлечение корней</b>
<b>Целые числа, <math>Z</math></b>	<b>Сложение, вычитание, умножение</b>	<b>Деление, извлечение корней</b>
<b>Рациональные числа, <math>Q</math></b>	<b>Сложение, вычитание, умножение, деление</b>	<b>Извлечение корней из неотрицательных чисел</b>
<b>Действительные числа, <math>R</math></b>	<b>Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел</b>	<b>Извлечение корней из произвольных чисел</b>
<b>Комплексные числа, <math>C</math></b>	<b>Все операции</b>	

*Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:*

- 1) Существует квадратный корень из  $-1$ , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен  $-1$ .
- 2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.
- 3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

# Мнимые числа

$$i = -1, i \text{ — мнимая единица}$$

$i, 2i, -0, 3i$  — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием СЗ.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$\begin{aligned} ai + bi &= (a + b)i; & ai - bi &= (a - b)i; \\ a(bi) &= (ab)i; & (ai)(bi) &= abi^2 = -a \end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

# Комплексные числа

**Определение 1.** Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

$i$  – мнимая единица.

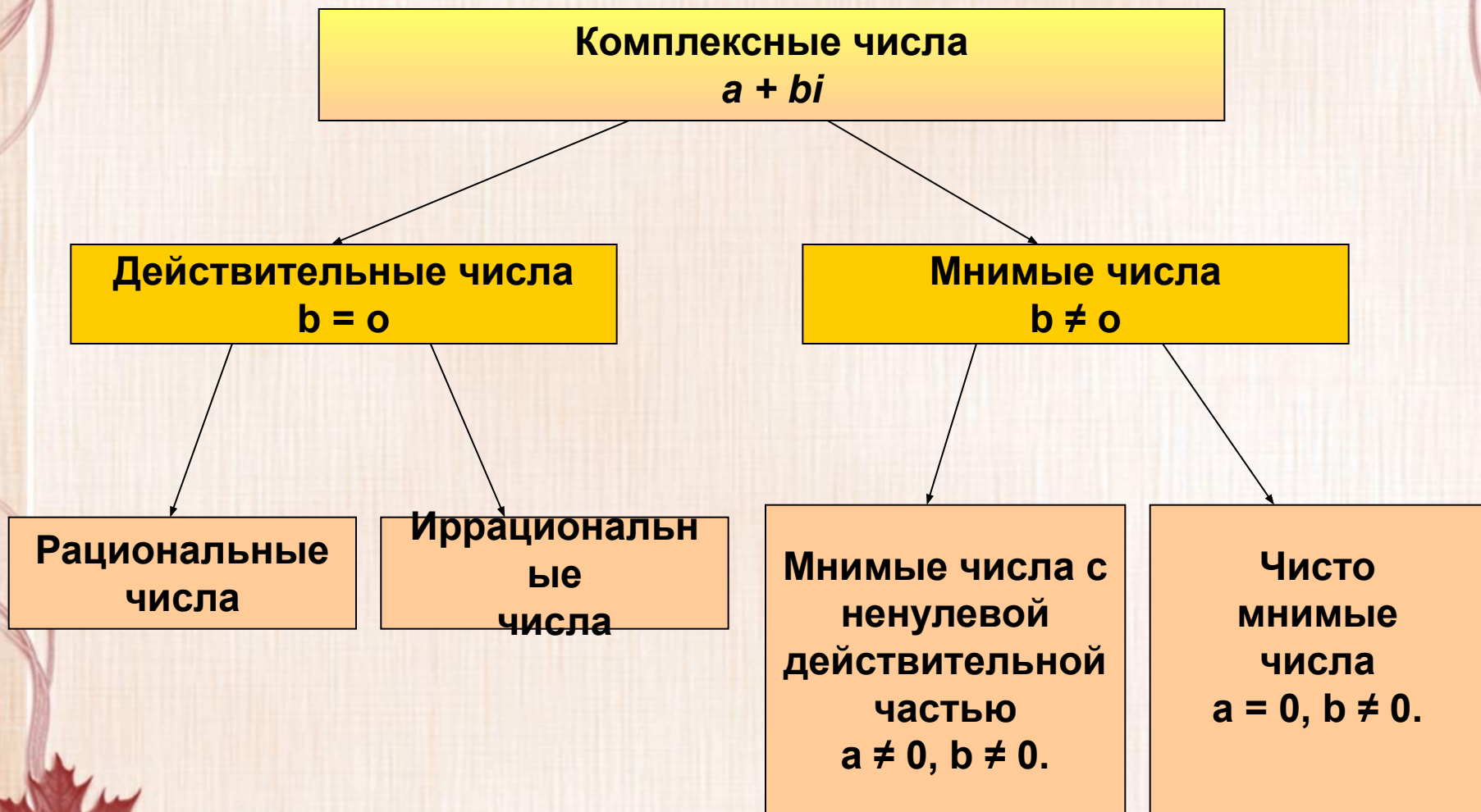
$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

**Определение 2.** Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$



# Классификация комплексных чисел



# Арифметические операции над КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

# Сопряженные комплексные числа

**Определение:** Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное** данному.

Если данное комплексное число обозначается буквой  $z$ , то сопряженное число обозначается  $\bar{z}$  :

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

**Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.**

**Числа  $a + bi$  и  $a - bi$  называются взаимно сопряженными комплексными числами.**

# Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \quad z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

# Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное  $n$ -ой степени комплексного числа  $z$ , равно  $n$ -ой степени числа, сопряженного к числу  $z$ , т.е.

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left( \frac{a + bi}{c + di} \right)} = \frac{\overline{(a + bi)}}{\overline{(c + di)}}$$

# Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа  $i$  является само число  $i$ , а второй степенью – число  $-1$ :

$$i^1 = i, i^2 = -1$$

Более высокие степени числа  $i$  находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном  $n$

$$i^{4n} = 1;$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+3} = -i.$$

# Примеры

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Например:

1.  $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$

2.  $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i;$

3.  $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1.$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Например:

$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$

$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$

# Примеры

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

Например:

1.  $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$

2.  $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

1.  $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$

2.  $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6.$



# Примеры

Деление комплексного числа  $a + bi$  на комплексное число  $c + di \neq 0$  определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если  $c + di = 0$ , так как тогда  $c^2 + d^2 = 0$ , т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например:

$$1). \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

$$2). \quad \frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

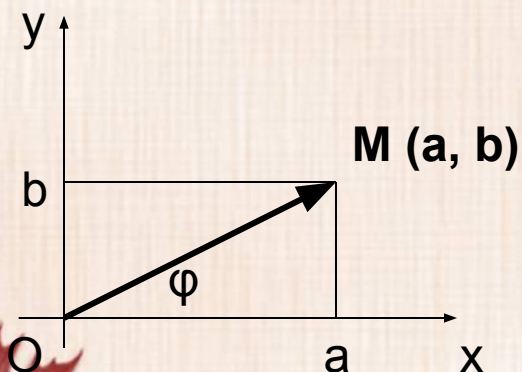
# Геометрическое изображение комплексных чисел.

*Комплексному числу  $z$  на координатной плоскости соответствует точка  $M(a, b)$ .*

*Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы  $\overrightarrow{OM}$*

**Определение:** Модулем комплексного числа  $z = a + bi$  называют неотрицательное число  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,

равное расстоянию от точки  $M$  до начала координат  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\varphi$  – аргумент комплексного числа

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

# Тригонометрическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где  $\varphi$  – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$  - модуль комплексного числа,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

### **Теорема**

**1.**

Если

$$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0 \quad \text{и}$$
$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad \text{то:}$$

а)  $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

б)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

### **Теорема 2 (формула Муавра).**

Пусть  $z$  — любое отличное от нуля  
комплексное число,  $n$  — любое целое число.

Тогда

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

# Извлечение корня из комплексного числа.

- *Теорема.* Для любого натурального числа  $n$  и отличного от нуля комплексного числа  $z$  существуют  $n$  различных значений корня  $n$ -степени.

Если

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right),$$

где  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$