Комплексные числа

После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

Знать:

- алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

Уметь:

- производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;
- переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;
- пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;
- в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

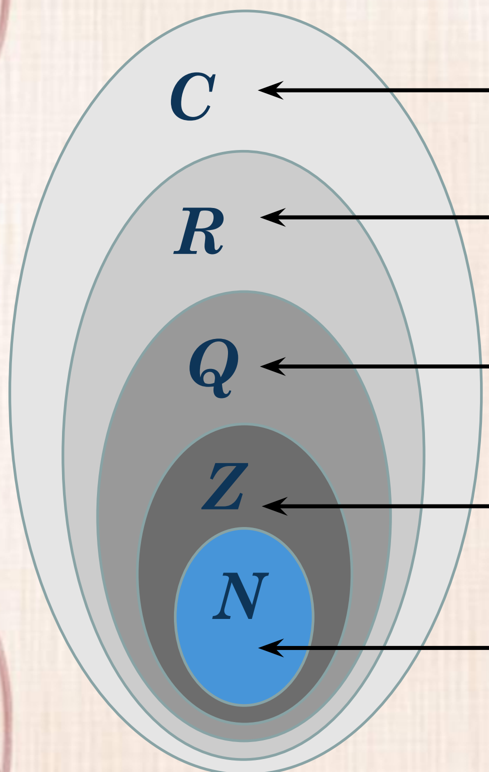
I. Подготовка к изучению нового материала

Какие числовые множества Вам знакомы?

N → **Z** → **Q** → **R**

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Алгебраические операции



Комплексные числа: +, –, ×, ÷, любые длины, $\sqrt{-1}$

Действительные числа: +, –, ×, ÷, любые длины

Рациональные числа: +, –, ×, ÷

Целые числа: +, –, ×

Натуральные числа: +, ×

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

1) Существует квадратный корень из , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен .

2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество С комплексных чисел.

Мнимые числа

i = -1, i – мнимая единица

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = \left(i^2\right)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \qquad ai - bi = (a - b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

Комплексные числа

***Определение 1*. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - \text{мнимая единица}.$$

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

***Определение 2.* Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Классификация комплексных чисел

- **Комплексные числа** ***a + bi***
  - **Действительные числа** **b = o**
    - **Рациональные числа**
    - **Иррациональн ые числа**
  - **Мнимые числа** **b ≠ o**
    - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью** **a ≠ 0, b ≠ 0.**
    - **Чисто мнимые числа** **a = 0, b ≠ 0.**

Арифметические операции над комплексными числами

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Если данное комплексное число обозначается буквой z, то сопряженное число обозначается $\bar{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа *a + bi* и *a - bi* *называются взаимно сопряженными комплексными числами.*

Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \qquad z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное *n*-ой степени комплексного числа z, равно *n*-ой степени числа, сопряженного к числу z, т.е.

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in N$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1$$

.

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -\cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.$$

Примеры

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Например:

1. $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i$;

2. $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i$;

3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1$.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Например:

$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i$;
$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2$.

Примеры

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

Например:

1. $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i$;

2. $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$.

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

1. $5i \bullet 3i = 15i^2 = -15$;
2. $-2i \bullet 3i = -6i^2 = 6$.

Примеры

Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если $c + di = 0$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например:

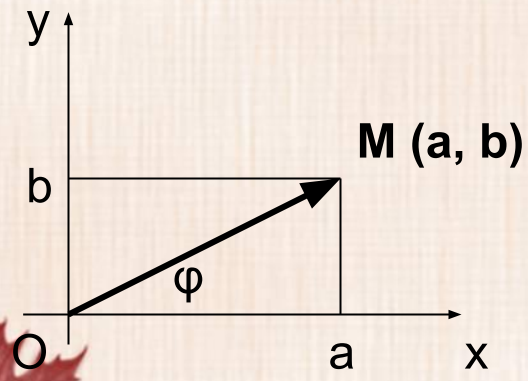
1). $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

2). $$\frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка М(a, b).
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: **Модулем** комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число $\sqrt{a^2+b^2}$, равное расстоянию от точки М до начала координат $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

φ – *аргумент комплексного числа*

$\varphi \in (-\pi; \pi]$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1. Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$ то:

а) $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

б) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, *n* — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа.

- *Теорема*. Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n-степени.

Если

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$