АЛГЕБРА, 8 КЛАСС

ТЕМА :

«КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Квадратным уравнением называется

уравнение вида $ax^2 + вx + c = 0$,

где x –переменная,

a, $в$ и c некоторые числа,

причем $a \neq 0$

коэффициенты квадратного уравнения

-а – старший коэффициент, b – второй коэффициент,

-с – свободный член

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а ≠ 0, в ≠ 0, с ≠ 0

$2x^2+5x-7=0$

$6x+x^2-3=0$

$X^2-8x-7=0$

$25-10x+x^2=0$

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а ≠ 0, в = 0 или с = 0 или в=с=0

$3x^2-2x=0$

$2x+x^2=0$

$125+5x^2=0$

$49x^2-81=0$

Определите коэф фициенты квадратного уравнения:

1 вариант

а) $6x^2 - x + 4 = 0$

б) $12x - x^2 = 0$

в) $8 + 5x^2 = 0$

2 вариант

а) $x - 6x^2 = 0$

б) $- x + x^2 - 15 = 0$

в) $- 9x^2 + 3 = 0$

1 вариант

а) $a = 6$, $в = -1$, $c = 4$;

б) $a = -1$, $в = 12$, $c = 0$;

в) $a = 5$, $в = 0$, $c = 8$;

2 вариант

а) $a = -6$, $в = 1$, $c = 0$;

б) $a = 1$, $в = -1$, $c = -15$;

в) $a = -9$, $в = 0$, $c = 3$.

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

в=0

$ax^2+c=0$

1. Перенос **c** в правую часть уравнения.

$ax^2 = -c$

2. Деление обеих частей уравнения на **a**.

$x^2 = -c/a$

3. Если $-c/a>0$ - два решения:

$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Если $-c/a<0$ - нет решений

c=0

$ax^2+вx=0$

1. Вынесение **x** за скобки:

$x(ax + в) = 0$

2. Разбиение уравнения на два равносильных:

$x=0$ и $ax + в = 0$

3. Два решения:

$x = 0$ и $x = -в/a$

В=c=0

$ax^2=0$

1. Деление обеих частей уравнения на **a**.

$x^2 = 0$

2. Одно решение: $x = 0$.

РЕШИ НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ :

1 вариант

а) $2x + 3x^2 = 0$

б) $3x^2 – 243 = 0$

в) $6x^2 = -10x – 2x(5 – 3x)$.

2 вариант

а) $3x^2 – 2x = 0$

б) $125 - 5x^2 = 0$

в) $-12x – 6x(2 – 3x) = 18x^2$

Проверь товарища

1 вариант

а) $x(2+3x)=0$,

$x=0$ или $2+3x=0$,

$3x=-2$,

$x=-2/3$.

Ответ: 0 и -2/3.

б) $3x^2=243$,

$x^2=243/3$,

$x^2=81$,

$x=-9$, $x=9$.

Ответ: -9 и 9.

в) $6x^2=-10x-10x+6x^2$,

$6x^2+10x+10x-6x^2=0$,

$20x=0$,

$x=0$.

Ответ: 0.

2 вариант

а) $x(3x-2)=0$,

$x=0$ или $3x-2=0$,

$3x=2$,

$x=2/3$.

Ответ: 0 и 2/3.

б) $-5x^2=-125$,

$x^2=-125/-5$,

$x^2=25$,

$x=-5$, $x=5$.

Ответ: -5 и 5.

в) $-12x-12x+18x^2-18x^2=0$,

$-24x=0$,

$x=0$.

Ответ: 0.

ПАУЗА

- а) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- в) $x^2 - 2x + 3 = 0$
- г) $6x^2 - x + 4 = 0$
- д) $12x - x^2 = 0$
- е) $8 + 5x^2 = 0$
- ж) $5x^2 - 4x + 2 = 0$
- з) $4x^2 - 3x - 1 = 0$
- и) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- к) $x - 6x^2 = 0$
- л) $-x + x^2 - 15 = 0$
- м) $-9x^2 + 3 = 0$

Способы решения полных квадратных уравнений

1. Выделение квадрата двучлена.
2. Формула: $D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
3. Теорема Виета. Только для приведенных квадратных уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

корнями квадратного уравнения

- **Называются - все значения переменной, при которых уравнение обращается в верное равенство**

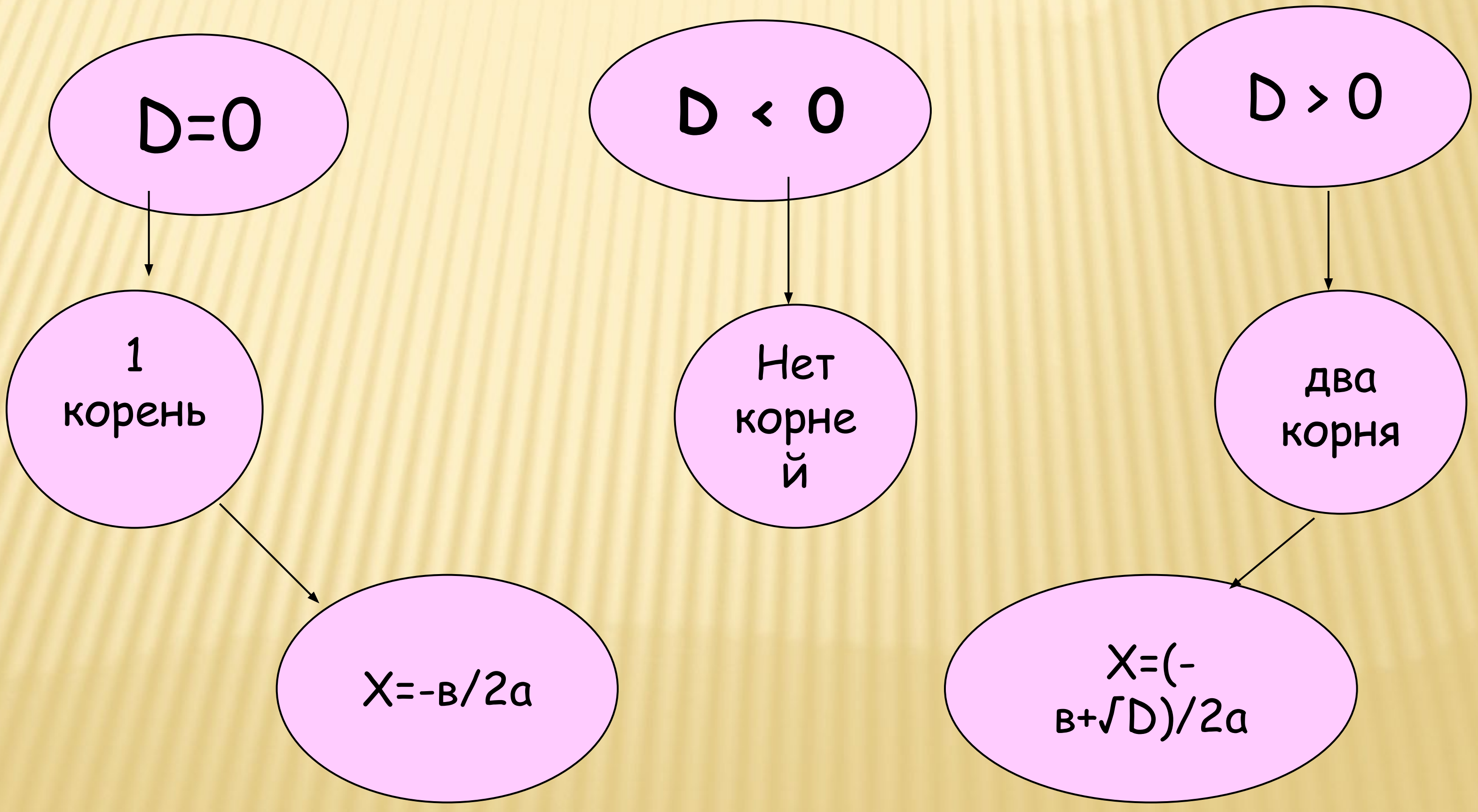
ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

решить квадратное уравнение - значит…

найти все его корни или установить, что их нет

ОТ ЧЕГО ЗАВИСИТ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ?

Ответ: От знака D - дискриминанта.



ВЫЧИСЛИ ДИСКРИМИНАНТ И ОПРЕДЕЛИ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

- 1 вариант
- а) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- в) $x^2 - 2x + 3 = 0$

- 2 вариант
- а) $5x^2 - 4x + 2 = 0$
- б) $4x^2 - 3x - 1 = 0$
- в) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Проверь товарища $D=B^2-4AC$

1 вариант

- а) $D=(-5)^2 - 4*3*(-2) = 49$, 2 корня;
- б) $D=(-4)^2 - 4*4*1 = 0$, 1 корень;
- в) $D=(-2)^2 - 4*1*3 = -8$, нет корней

2 вариант

- а) $D=(-4)^2 - 4*5*2 = -24$, нет корней;
- $D=(-3)^2 - 4*4*(-1) = 25$, 2 корня;
- $D=(-6)^2 - 4*1*9 = 0$, 1 корень

ПРИВЕДЁННЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ называют приведёнными квадратными уравнениями.

$3x^2 - 5x + 9 = 0$; $-x^2 - 5x + 9 = 0$; $0,8x^2 - 5 + 9 = 0$; $x^2 - 5x + 9 = 0$

Чем отличается последнее уравнение от предыдущих?

Его старший коэффициент равен 1.

Как из обычного квадратного уравнения сделать приведённое ?

Нужно обе части уравнения разделить на старший коэффициент.

а) $-x^2 + 31x – 6 = 0$ $\quad$ $x^2 - 31x + 6 = 0$

б) $18 – 9x + 9x^2 = 0$ $\quad$ $x^2 - x + 2 = 0$

в) $-1:3\,x^2 - 5x + 3 = 0$ $\quad$ $x^2 + 15x – 9 = 0$

ТЕОРЕМА ВИЕТА : СУММА КОРНЕЙ ПРИВЕДЕННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ РАВНА ВТОРОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ, ВЗЯТОМУ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ ЗНАКОМ, А ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО СВОБОДНОМУ ЧЛЕНУ.

Доказательство:

Дано приведенное квадратное уравнение. Решим его. $D=p^2-4q$. Пусть $D>0$, тогда

$$X_1=\frac{-p+\sqrt{D}}{2};\quad X_2=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}$$

Найдём произведение и сумму корней

$$X_1\cdot X_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{p^2-D}{4}=q$$

$$X_1+X_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}+\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p$$

ТЕОРЕМА (ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЕ ВИЕТА). ЕСЛИ ЧИСЛА M И N ТАКОВЫ, ЧТО ИХ СУММА РАВНА –P, А ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО Q, ТО ЭТИ ЧИСЛА ЯВЛЯЮТСЯ КОРНЯМИ УРАВНЕНИЯ $X^2+PX+Q=0$.

Дано: m и n-некоторые числа

$m+n=-p$, $m*n=q$

Доказать: m и n-корни уравнения $x^2+px+q=0$

Доказательство:

По условию $m+n=-p$, а $mn=q$. Значит, уравнение $x^2+px+q=0$ можно записать в виде $x^2-(m+n)x+mn=0$.

Подставив вместо x число m получим:

$m^2+(m+n)m+mn=m^2-m^2-mn+mn=0$

Значит, число m является корнем уравнения.

Аналогично можно показать, что число n также является корнем уравнения. Что и требовалось доказать.

ЗАДАНИЕ

Решить квадратные уравнения по формуле, заполнить таблицу (по вариантам)

УРАВНЕНИЕ	КОРНИ $X_{1,}$ И X_2	X_1+X_2	X_1X_2
$X^2-2X-3=0$			
$X^2+5X-6=0$			
$X^2-X-12=0$			
$X^2+7X+12=0$			
$X^2-8X+15=0$			
$X^2-7X+10=0$			

Проверка:

УРАВНЕНиЕ	КОРНИ x_1, И x_2	x_1+x_2	x_1x_2
$x^2-2x-3=0$	$x_1=-1, x_2=3$	2	-3
$x^2+5x-6=0$	$x_1=1, x_2=-6$	-5	-6
$x^2-x-12=0$	$x_1=-3, x_2=4$	1	-12
$x^2+7x+12=0$	$x_1=-3, x_2=-4$	-7	12
$x^2-8x+15=0$	$x_1=5, x_2=3$	8	15
$x^2-7x+10=0$	$x_1=2, x_2=5$	7	10

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ СЧЕТНЫМ ВТОРЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

- **$ax^2 + 2kx + c = 0$**
- **$D = k^2 - ac$;**
- **если D>0, то**

$x_{1,2}$ $= \dfrac{-k \pm \sqrt{D1}}{a}$

- если D <0 , то уравнение корней не имеет.
- Привести вторую запись данной формулы при условии , если в приведенном квадратном уравнении второй коэффициент чётный :
-

Исторические сведения:

Квадратные уравнения впервые встречаются в работе индийского математика и астронома Ариабхатты.

Другой индийский ученый Брахмагупта (VII в) изложил общее правило решения квадратных уравнений, которое практически совпадает с современным.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот задача Бхаскары:

Обезьянок резвых стая, всласть поевши, развлекалась.

Их в квадрате часть восьмая на полянке забавлялась.

А двенадцать по лианам стали прыгать, повисая.

Сколько ж было обезьянок, ты скажи мне, в этой стае?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БХАСКАРЫ :

ПУСТЬ БЫЛО X ОБЕЗЬЯНОК,
ТОГДА НА ПОЛЯНЕ ЗАБАВЛЯЛОСЬ – $(X/8)^2$ И 12 ПРЫГАЛИ ПО ЛИАНАМ.
СОСТАВИМ УРАВНЕНИЕ:

- $(x/8)^2 + 12 = x$,

  $x^2/64 + 12 - x = 0$, $/*64$

  $x^2 - 64x + 768 = 0$,

  $D = (-64)^2 - 4*1*768 = 4096 - 3072 = 1024 = 32^2$,

2 корня

$x = (64 - 32)/2 = 16$,

$x = (64 + 32)/2 = 48$.

Ответ: 16 или 48 обезьянок.

КОНЕЦ!

Работу

выполнил ученик
8 «А» класса

БЕРДАР
ВАЛЕРИЙ