Решение простейших тригонометрических уравнений.

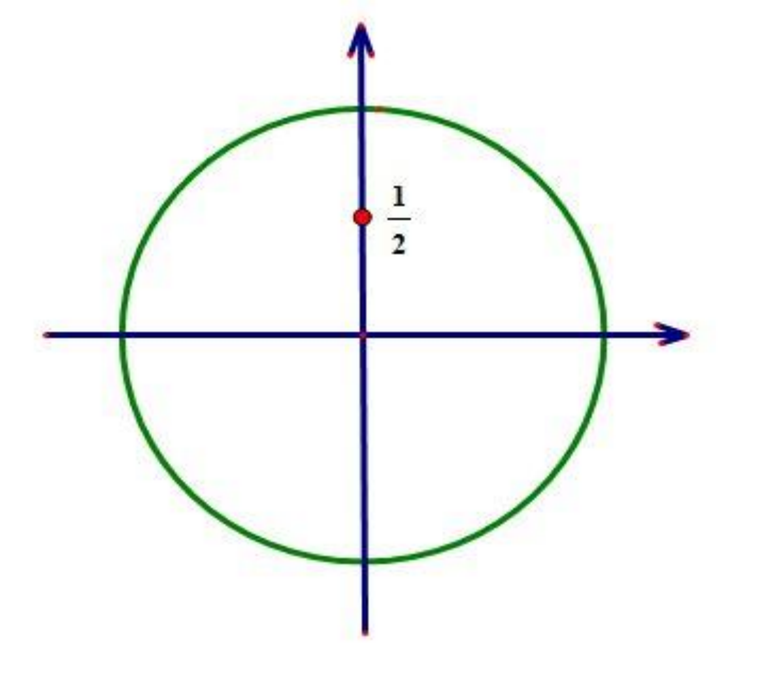
Решение простейших тригонометрических уравнений

Решение тригонометрических уравнений любого уровня сложности в конечном итоге сводится к **решению простейших тригонометрических уравнений**. И в этом наилучшим помощником снова оказывается тригонометрический круг.

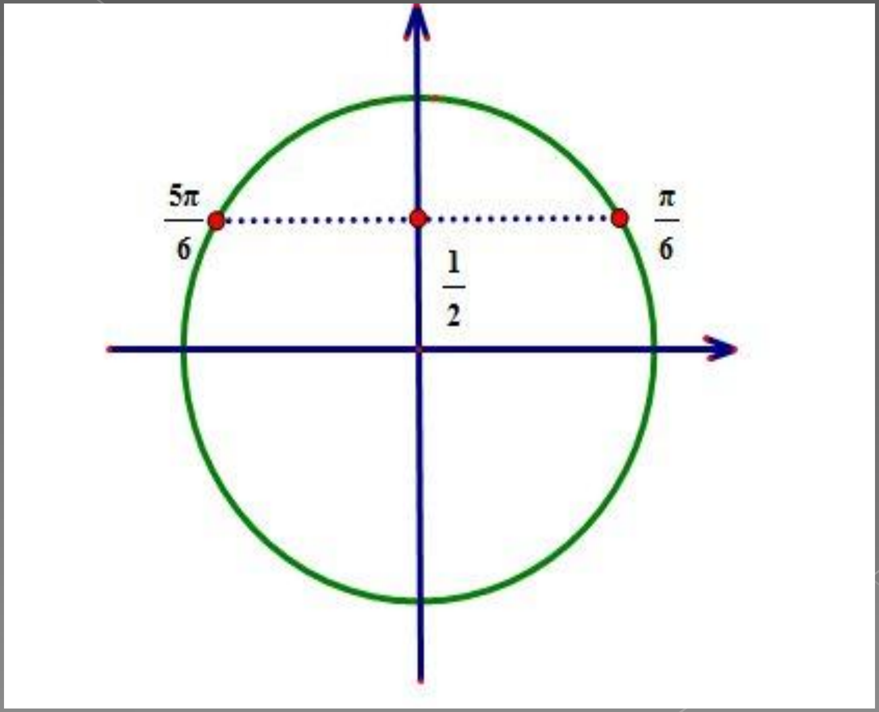
Вспомним определения косинуса и синуса.

**Косинусом угла а называется абсцисса (то есть координата по оси ОХ) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу а.
Синусом угла а называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу а.**

Решим уравнение sinx=1/2
Этому уравнению удовлетворяют все такие значения угла поворота x, которые соответствуют точкам окружности, ордината которых равна 1/2.
Отметим на оси ординат точку с ординатой 1/2:



Проведем горизонтальную линию параллельно оси абсцисс до пересечения с оружностью. Мы получим две точки, лежащие на окружности и имеющие ординату 1/2. Эти точки соответствуют углам поворота на П/6 и 5П/6 радиан:



Если мы, выйдя из точки, соответствующей углу поворота на ∏/6 радиан, обойдем полный круг, то мы придем в точку, соответствующую углу поворота на ∏/6+2∏ радиан и имеющую ту же ординату. То есть этот угол поворота также удовлетворяет нашему уравнению. Мы можем делать сколько угодно «холостых» оборотов, возвращаясь в ту же точку, и все эти значения углов будут удовлетворять нашему уравнению.

То есть первая серия решений исходного уравнения имеет вид:

То есть первая серия решений исходного уравнения имеет вид:

X1=∏/6+2∏k, где k $\in$ Z, Z – множество целых чисел

вторая серия решений имеет вид:

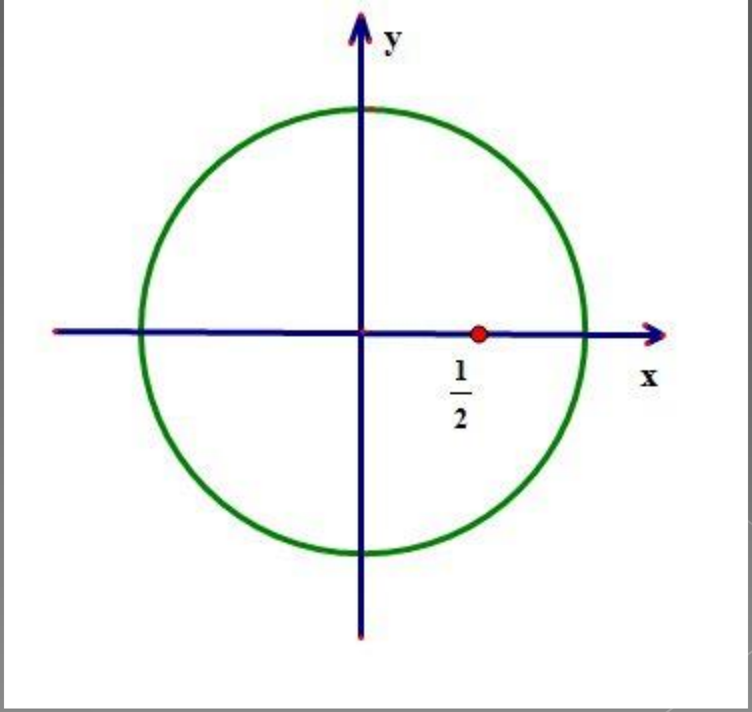
$$x_2=5\Pi/6+2\Pi k$$

Эти две серии решений можно объединить в одну запись:

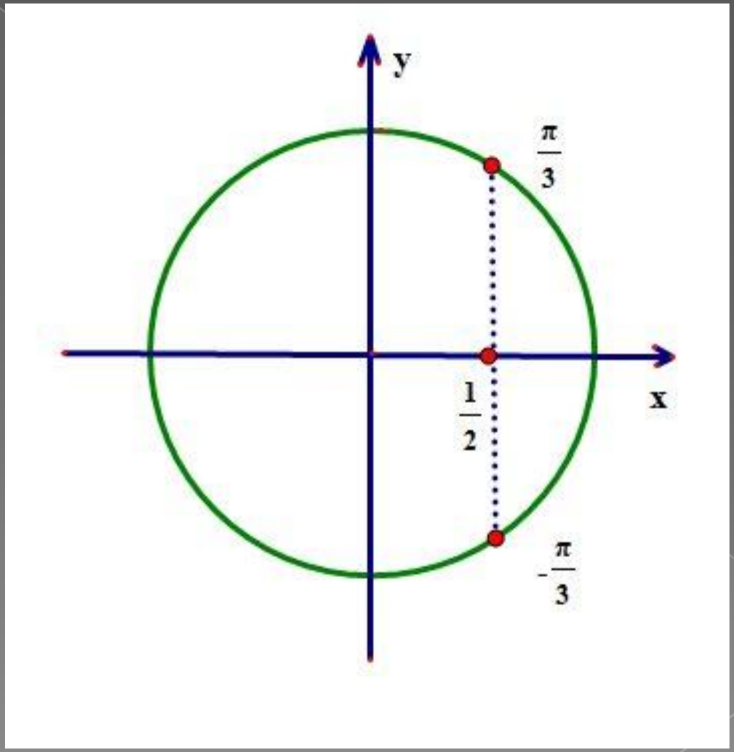
$$x=(-1)^n\Pi/6+\Pi n$$

Если мы в этой записи возьмем n=2k (то есть четное n), то мы получим первую серию решений.
Если мы в этой записи возьмем n=2k+1 (то есть нечетное n), то мы получим вторую серию решений.

Теперь давайте решим уравнение cosx=1/2.
Так как cosx – это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом на угол x, отметим на оси OX точку с абсциссой 1/2:



Проведем вертикальную линию параллельно оси OY до пересечения с окружностью. Мы получим две точки, лежащие на окружности и имеющие абсциссу 1/2. Эти точки соответствуют углам поворота на П/3 и -П/3 радиан. Вспомним, что при двежении по часовой стрелки мы получаем отрицательный угол поворота:



Запишем две серии решений:

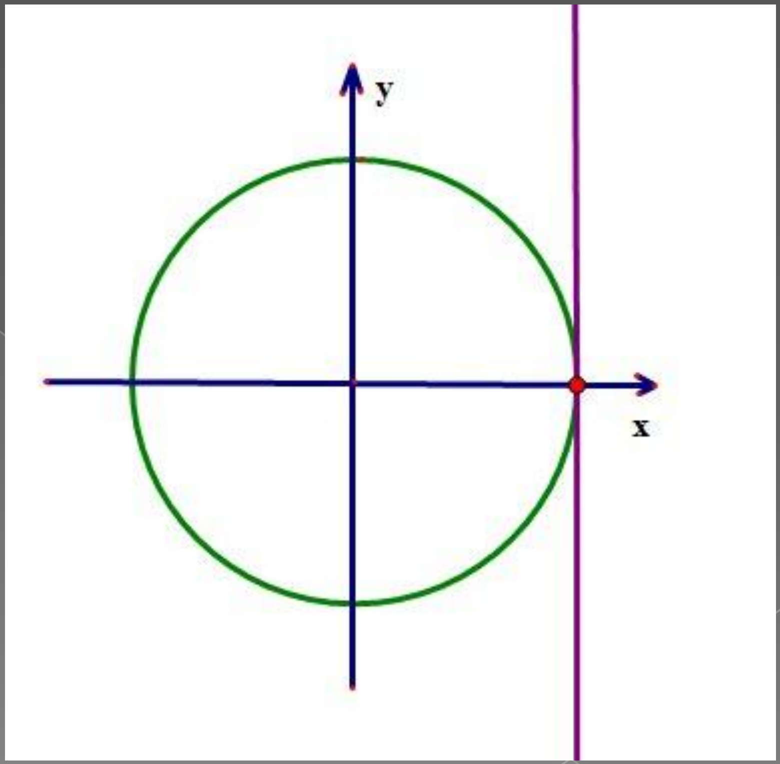
$$x_1=\Pi/3+2\Pi k$$

$$x_2=-\Pi/3+2\Pi k$$

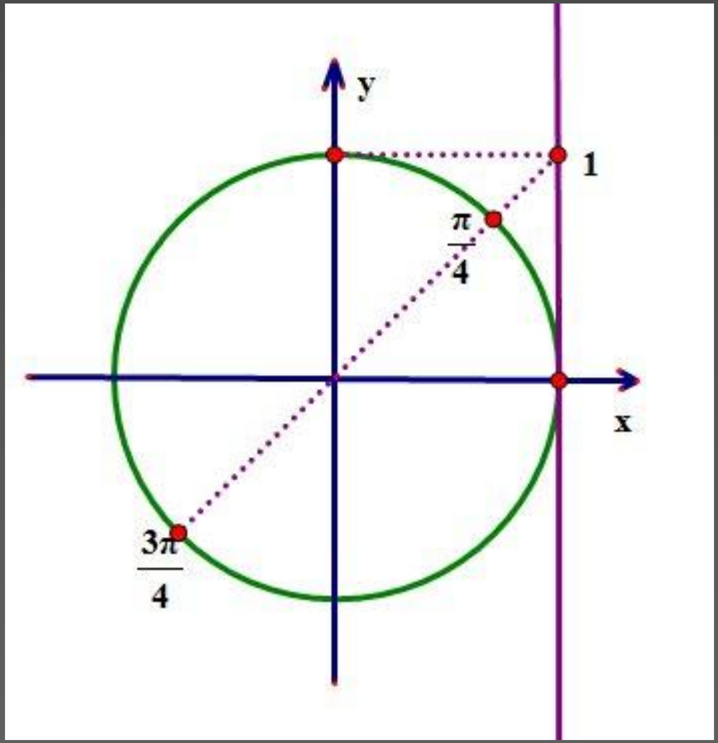
Объедим эти две серии в одну запись:

$$x=\underline{+}\,\Pi/3+2\Pi n$$

Решим уравнение tgx=1. Линия тангенсов проходит через точку с координатами (1,0) единичной окружности параллельно оси OY:



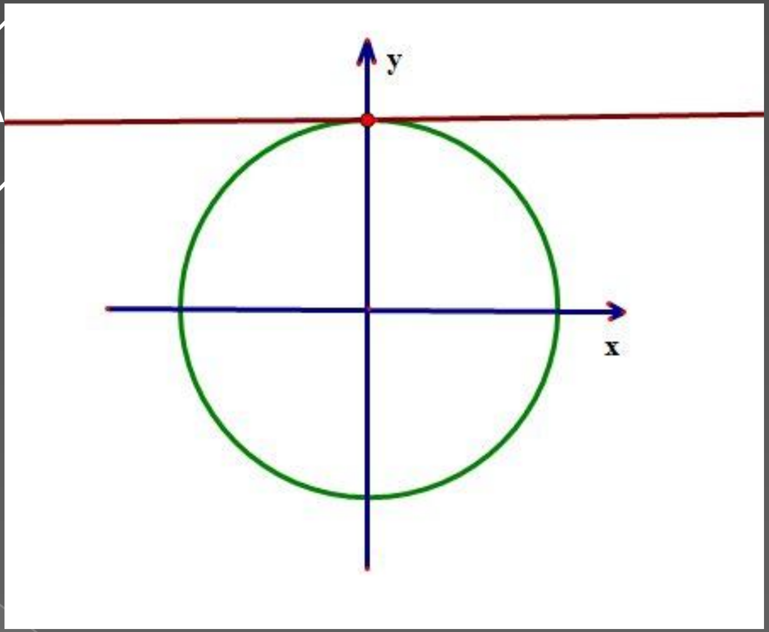
Отметим на ней точку, с ординатой равной 1 (мы ищем, тангенс каких углов равен 1):



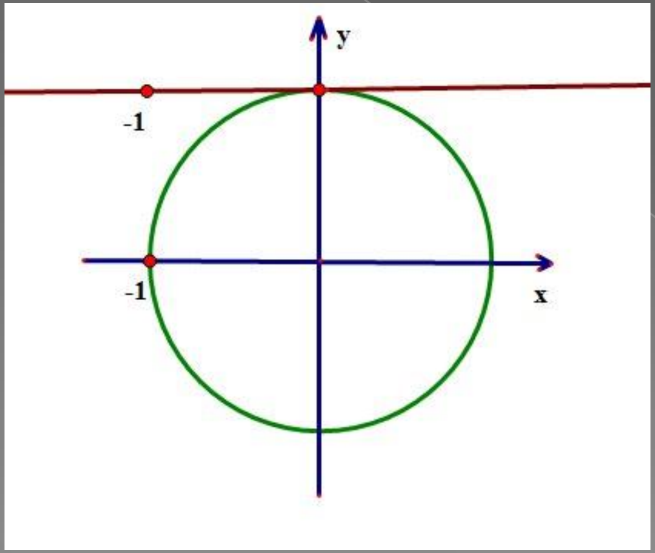
Так как точки, соответствующие улам поворота, которые удовлетворяют нашему уравнению лежат на расстоянии ∏ радиан друг от друга, то мы можем записать решение таким образом:

x=∏/4+∏n

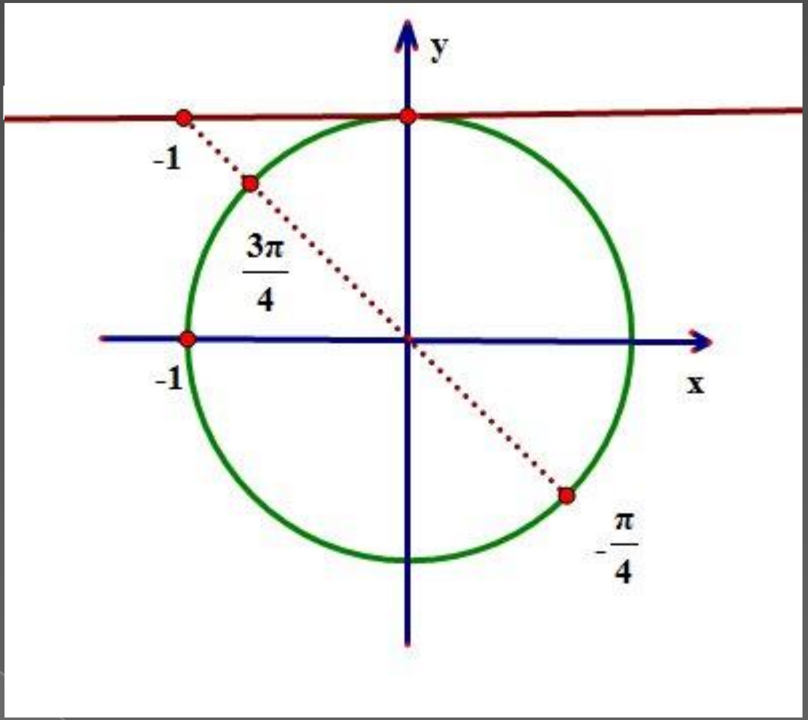
Решим уравнение ctgx=-1. Линия котангенсов проходит через точку с координатами (0,1) единичной окружности параллельно оси OX:



Отметим на линии котангенсов точку с абсциссой -1:



Соединим эту точку с началом координат прямой и продолжим ее до пересечения с окружностью. Эта прямая пересечет окружность в точках, соответствующих углам поворота на 3∏/4 и -∏/4 радиан:



Поскольку эти точки отстоят друг от друга на расстояние, равное ∏, то общее решение этого уравнения мы можем записать так:

x=3∏/4+∏n

$$\sin x = b: \quad x = (-1)^n \arcsin b + \prod n$$

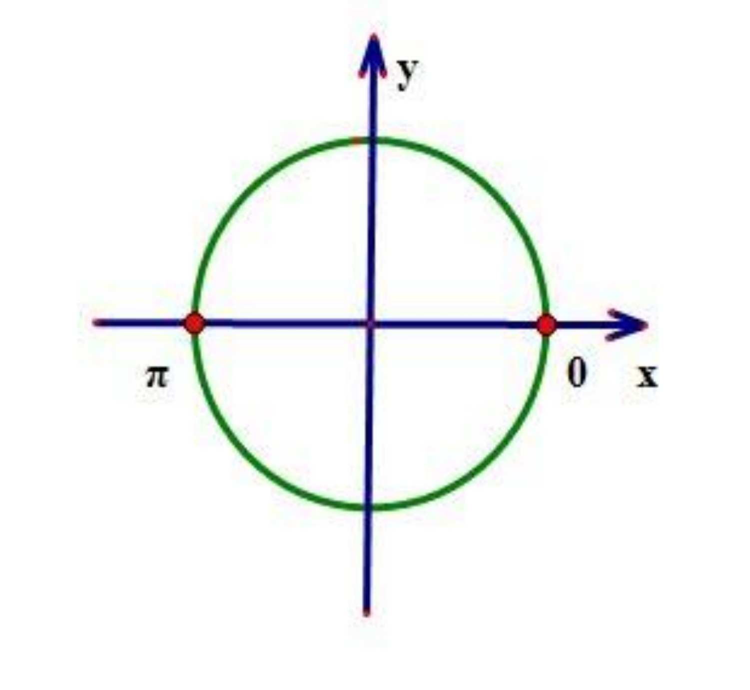
$$\cos x = b: \quad x = \pm \arccos b + 2\prod n$$

$$\operatorname{tg} x = b: \quad x = \operatorname{arctg} b + \prod n$$

$$\operatorname{ctg} x = b: \quad x = \operatorname{arcctg} b + \prod n$$

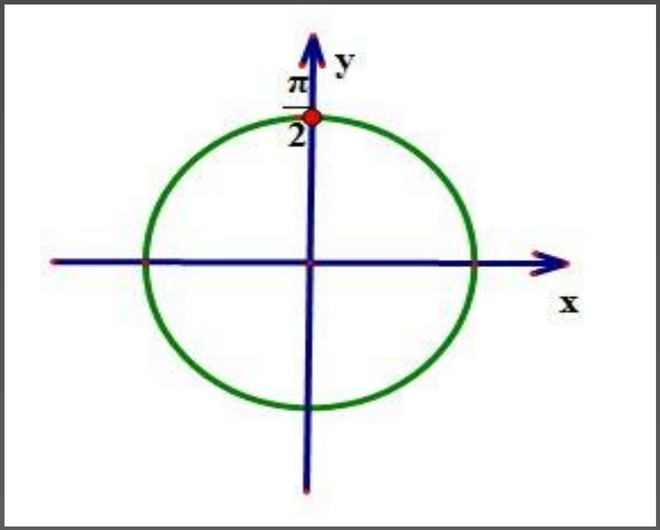
ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ:

sinx=0
Отметим на окружности точки, ордината которых равна 0:



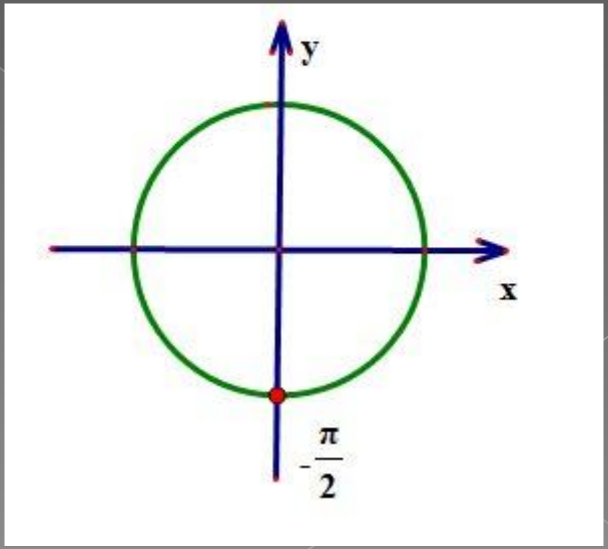
x=∏n

sinx=1
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна 1



x=∏/2+2∏n

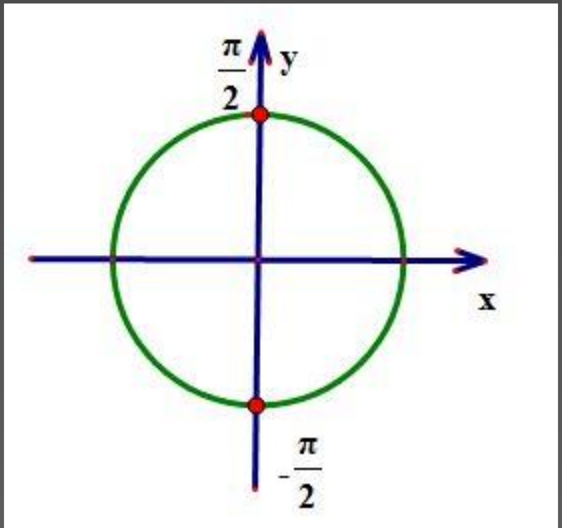
sinx=-1
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна -1:



x=-∏/2+2∏n

cosx=0

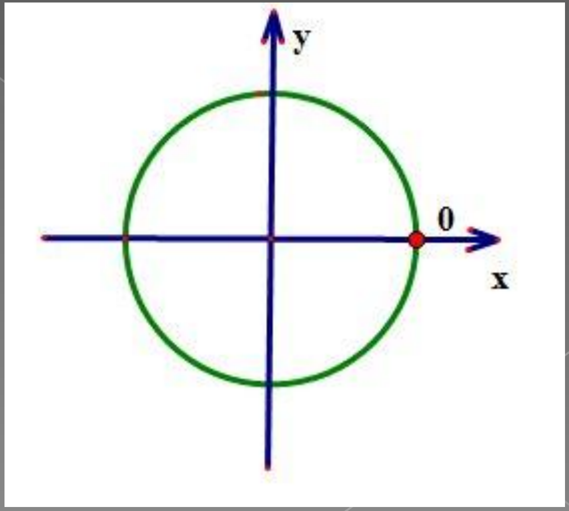
Отметим на окружности точки, абсцисса которых равна 0:



x=∏/2+∏n

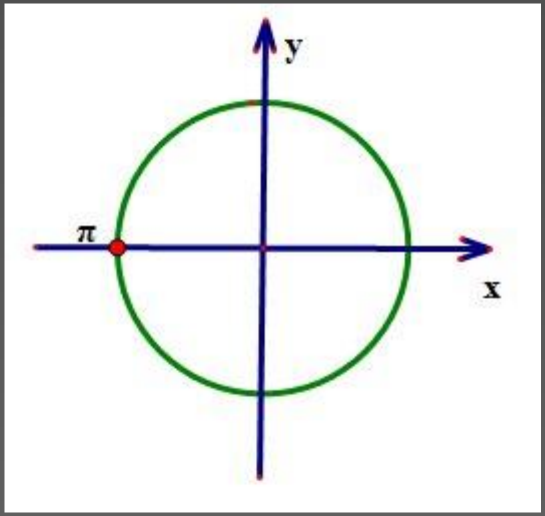
cosx=1

Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна 1



x=2∏n

cosx=-1
Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна -1:



x=∏+2∏n