

**Использование
алгебраических операций
над графиками функций
при решении задач с
параметрами**

Теоретические основы

Координатно-параметрический метод

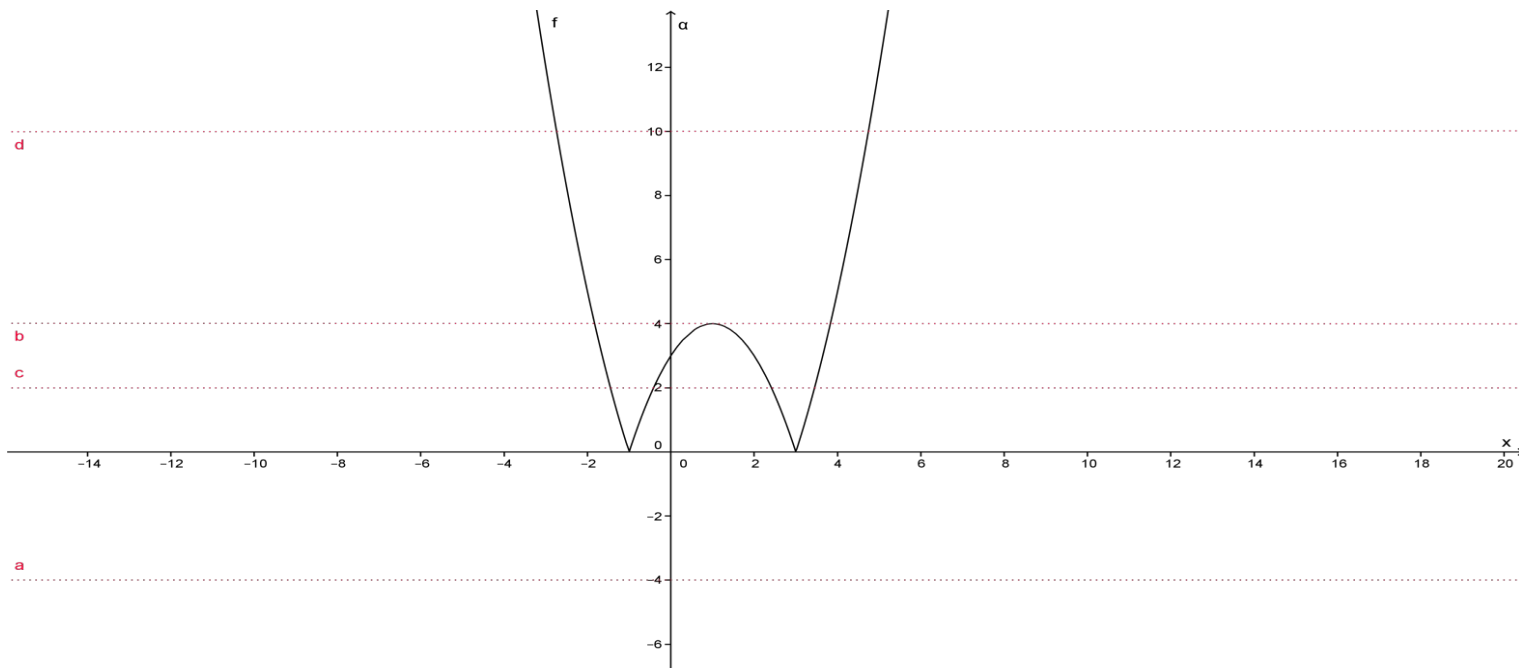
Чтобы решить уравнение координатно-параметрическим методом, надо:

- выразить параметр a через переменную X
- переобозначить координатные оси для работы в координатно-параметрической плоскости XOa
- построить графический образ уравнения
- пересечь полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси
- записать ответ.

Формулировка метода

Если в задаче фигурирует лишь один параметр a и одна переменная X и в плоскости XOa можно построить графики уравнений путём «алгебраических операций над графиками», то решения находим, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$.



«Сложение графиков» функций

При сложении графиков складываются не сами функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а их значения и каждому значению аргумента x на координатной плоскости ставится в соответствие точка с абсциссой x_n и ординатой $f(x_n) + g(x_n)$.

Алгоритм

1. Разбить исходную функцию на «функции-слагаемые»;
2. Найти область определения, граничные точки области определения и точки разрыва исходной функции;
3. Исследовать исходную функцию на чётность (нечётность);
4. Задать плоскость xOa ;
5. Построить графики «функций-слагаемых»;
6. Определить «разумные» точки;
7. Построить эскиз графика на основе «сложения графиков»;
8. Пересечь график прямыми, перпендикулярными параметрической оси;
9. Записать ответ.

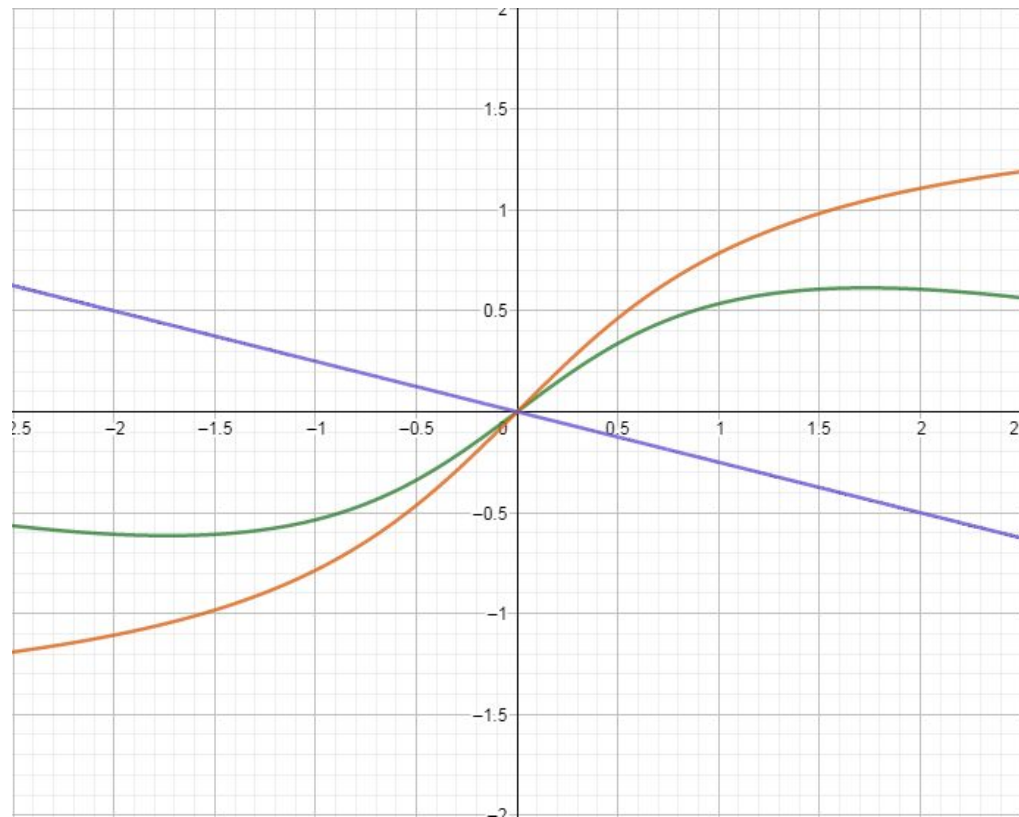
Пример №1:

Найти при каких значениях параметра a уравнение $a = \operatorname{arctg}(x) - 0.25x$ имеет ровно 2 корня.

Решение.

1. «Функции слагаемые»: $y = \operatorname{arctg}(x)$, $y = -0.25x$
2. Область определения $(-\infty; +\infty)$
3. Функция нечетная
4. Введем координатную ось $аОx$
5. Построим графики функций
6. Определим «разумные» точки
7. Сложим ординаты «функций- слагаемых»
8. Пересечём график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Получаем следующий график:
Из графика можно сделать вывод,
что прямая $y=a$ пересечет график
функции в двух точках только если
пройдет через одну из точек
экстремума.



Ответ: $a = \pi/3 - 0.25(\sqrt{3})$;
 $a = -\pi/3 + 0.25(\sqrt{3})$

График произведения функций

$$y=f(x) \cdot g(x)$$

Что значит умножить два графика? Конечно, умножаются не сами графики

$y=f(x)$ и $y=g(x)$, а значения функций f и g и в каждой точке пересечения из областей определения, а затем при каждом значении аргумента x_n ставится на координатной плоскости точка $(x_n; f(x_n) \cdot g(x_n))$.

На самом деле невозможно поставить точку для всех x , а делается это только для некоторых. Итак, для построения графика данной функции надо построить графики функций $f(x)$ и $g(x)$ и перемножить значения ординат, соответствующие одним и тем же значениям аргумента.

Пример №2:

При каких значениях параметра a уравнение $a = (x^2 - 6)(3x - 2)$ имеет ровно 2 корня?

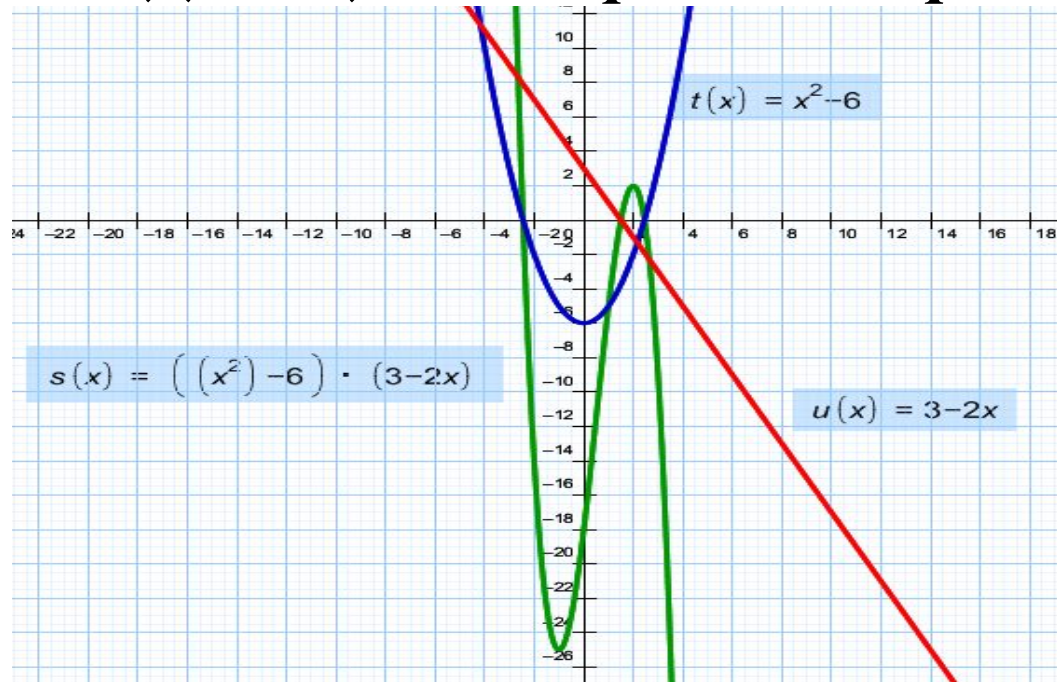


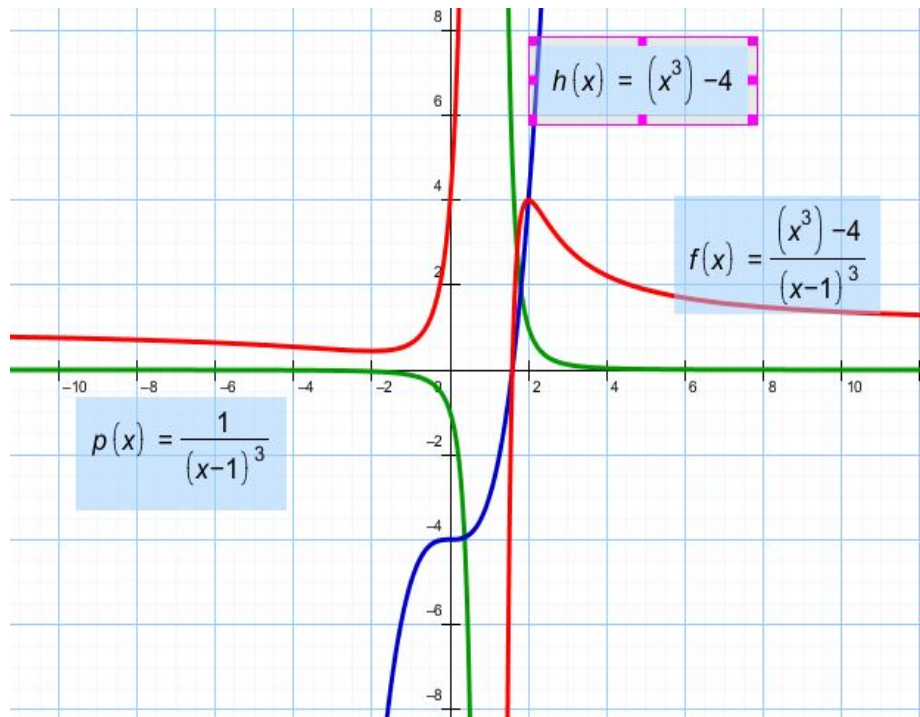
График частного двух функций

Данную функцию можно представить в виде $y=f(x)/g(x)$

Если у нас будет задан график некоторой обратимой функции $g(x)$, то для того чтобы построить график обратной функции, можно пользоваться следующим утверждением: график функции $g(x)$ и обратной к ней функции будут симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y = x$.

Построение графика функции сводится к построению графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, последующему перемножению по точкам значений соответствующих ординат этих графиков с учетом знака.

Пример 3. При каких значениях параметра $a = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$ значение имеет ровно 2 корня?



- «Функции делимое и делитель»: $y = x^3 - 4$, $y = (x-1)^3$, представим как «функции множители»: $y = x^3 - 4$, $y = 1/(x-1)^3$
- Область определения $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
- Функция четная, четная, не является ни четной, ни нечетной
- Введем координатную ось aOx
- Построим графики функций
- Определим «разумные» точки
- Перемножим ординаты «функций делителя и делимого»
- Пересечём график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Формулировка метода

Таким образом, изучив алгебраические операции над графиками и координатно-параметрический метод и объединив их основные идеи, получаем новый метод решения заданий с параметрами.

Суть данного метода можно сформулировать так: если в задаче фигурирует лишь один параметр a и одна переменная x и в плоскости xOa можно построить графики уравнений $F(x;a)=0$, $G(x;a)=0$ путём проведения алгебраических операций над графиками, то решения находим, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Сформулируем алгоритм:

- Разбить исходную функцию на простые функции вида $y=f(x)$
- Найти область определения, граничные точки области определения и точки разрыва этих функций
- Исследовать исходную функцию на чётность (нечётность)
- Задать плоскость xOa
- Построить графики исходных функций
- Определить «разумные» точки
- Построить эскиз графика на основе алгебраических операций над графикам
- Пересечь график прямыми, перпендикулярными параметрической оси
- Записать ответ.

Пример задания с олимпиады МИЭТ 2018.

При каких значениях параметра a
уравнение

$$a(3x^3+x)=3x-x^3 \text{ имеет 3 корня.}$$

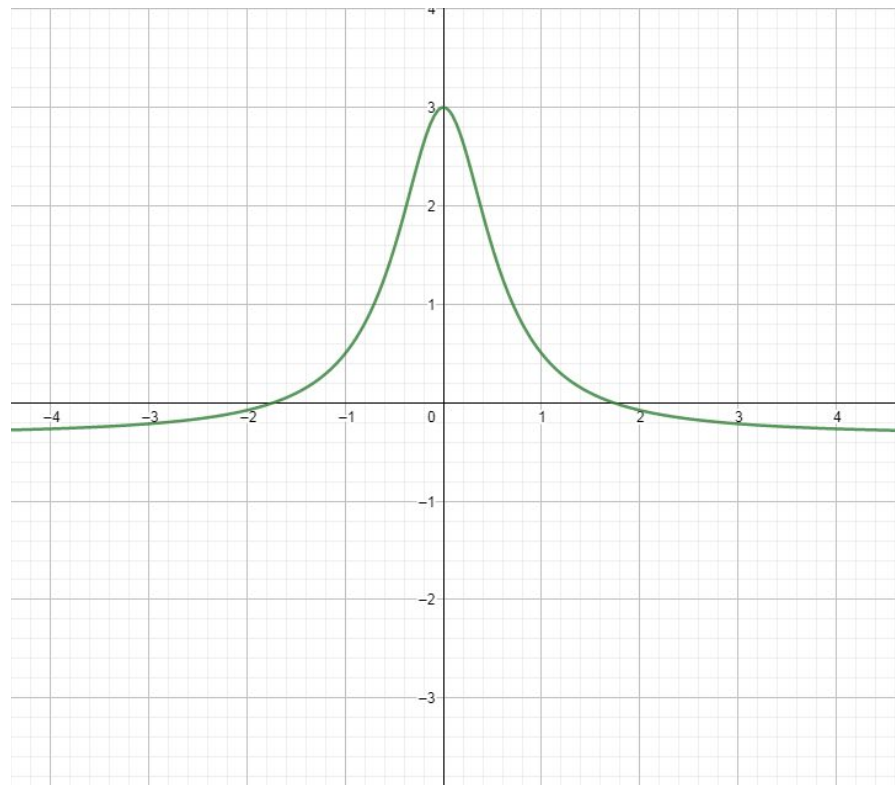
Заметим что $x=0$ является корнем, отсюда задание можно переформулировать:
при каких значениях параметра уравнение $a(3x^2+1)=3-x^2$ имеет ровно 2 корня.

Построим график функции $a = \frac{3-x^2}{3x^2+1}$

Исходные функции: $f(x)=3-x^2$; $g(x)=3x^2+1$

Прямая $y=a$ пересекает
график в двух точках при
 $a \in (-1/3; 3)$

Следовательно при любых
 a из этого промежутка
исходное уравнение будет
иметь 3 корня.



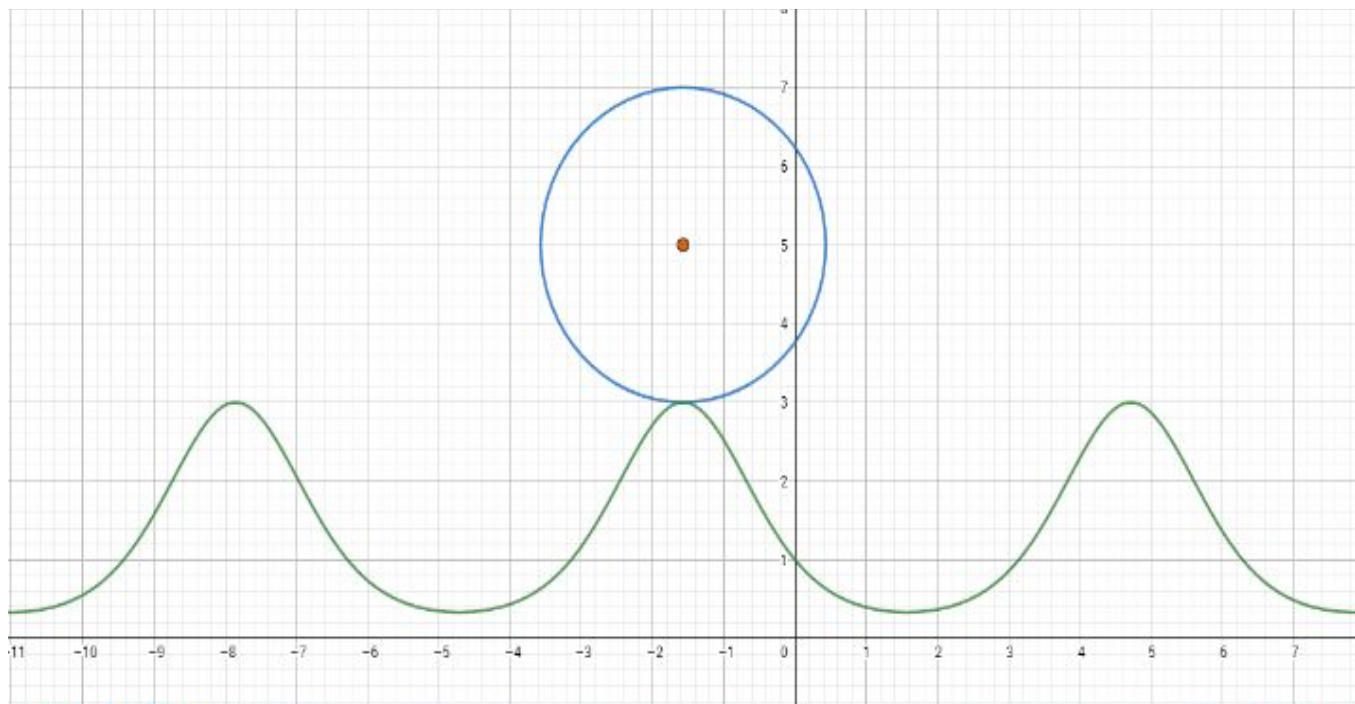
Ответ: $(-1/3; 3)$

Пример 4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin(x)} \\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = (5a - 4)^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение

- Представим функцию в виде $y = 3^{-\sin x}$ и построим график функции $y = -\sin x$. Далее возводим основание в степень, равную значениям ординат этого графика.
- Теперь рассмотрим множество окружностей с центром в точке $(-\pi/2; 5)$ и радиусом $|5a - 4|$.
- Данная система будет иметь единственное решение, только когда окружность касается графика функции.
- Касание произойдет в точке с координатой $(-\pi/2; 3)$ отсюда радиус равен 2, поэтому переходим к равенству $|5a - 4| = 2$.



Ответ: $a=1,2$; $a=0,4$