Использование алгебраических операций над графиками функций при решении задач с параметрами

Теоретические основы Координатно-параметрический метод

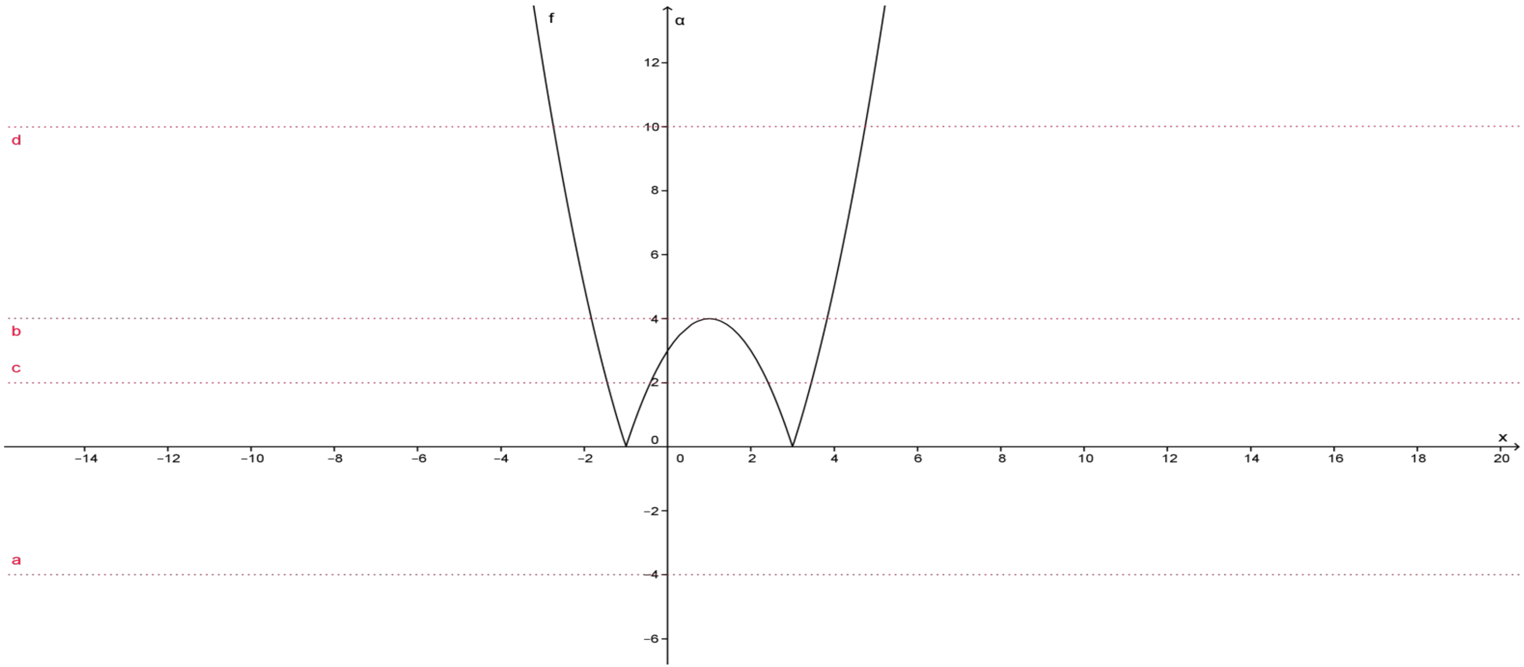
Чтобы решить уравнение координатно-параметрическим методом, надо:

- выразить параметр *a* через переменную х
- переобозначить координатные оси для работы в координатно-параметрической плоскости хОа
- построить графический образ уравнения
- пересечь полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси
- записать ответ.

Формулировка метода

Если в задаче фигурирует лишь один параметр а и одна переменная х и в плоскости х0а можно построить графики уравнений путём «алгебраических операций над графиками», то решения находим, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Для каждого значения параметра а определить число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$.



«Сложение графиков» функций

При сложении графиков складываются не сами функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а их значения и каждому значению аргумента x на координатной плоскости ставится в соответствие точка с абсциссой x_n и ординатой $f(x_n)+g(x_n)$.

Алгоритм

1. Разбить исходную функцию на «функции-слагаемые»;
2. Найти область определения, граничные точки области определения и точки разрыва исходной функции;
3. Исследовать исходную функцию на чётность (нечётность);
4. Задать плоскость xOa;
5. Построить графики «функций-слагаемых»;
6. Определить «разумные» точки;
7. Построить эскиз графика на основе «сложения графиков»;
8. Пересечь график прямыми, перпендикулярными параметрической оси;
9. Записать ответ.

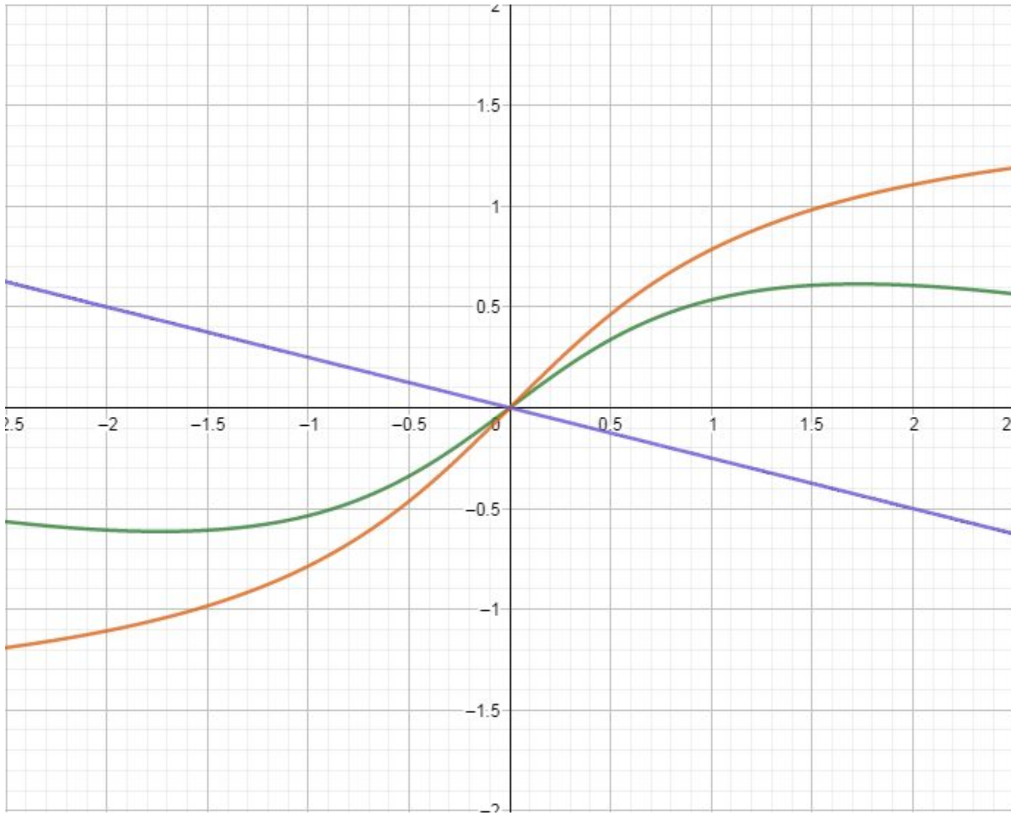
Пример №1:

Найти при каких значениях параметра а уравнение **a** = arctg(x)-0.25x имеет ровно 2 корня.

Решение.

1. «Функции слагаемые»: y=arctg(x), y= -0.25x
2. Область определения (-∞;+∞)
3. Функция нечетная
4. Введем координатную ось a0x
5. Построим графики функций
6. Определим «разумные» точки
7. Сложим ординаты «функций- слагаемых»
8. Пересечём график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Получаем следующий график:
Из графика можно сделать вывод, что прямая y=a пересечет график функции в двух точках только если пройдет через одну из точек экстремума.



Ответ: a = п/3-0.25(√3);
a = -п/3+0.25(√3)

График произведения функций

$y=f(x)\cdot g(x)$

Что значит умножить два графика? Конечно, умножаются не сами графики

$y= f(x)$ и $y=g(x)$, а значения функций f и g и в каждой точке пересечения из областей определения, а затем при каждом значении аргумента x_n ставится на координатной плоскости точка $(x_n;\ f(x_n)\cdot g(x_n))$.

На самом деле невозможно поставить точку для всех x, а делается это только для некоторых. Итак, для построения графика данной функции надо построить графики функций $f(x)$ и $g(x)$ и перемножить значения ординат, соответствующие одним и тем же значениям аргумента.

Пример №2:

При каких значениях параметра а уравнение

а = $(x^2 - 6)(3x-2)$ ***имеет ровно 2 корня?***

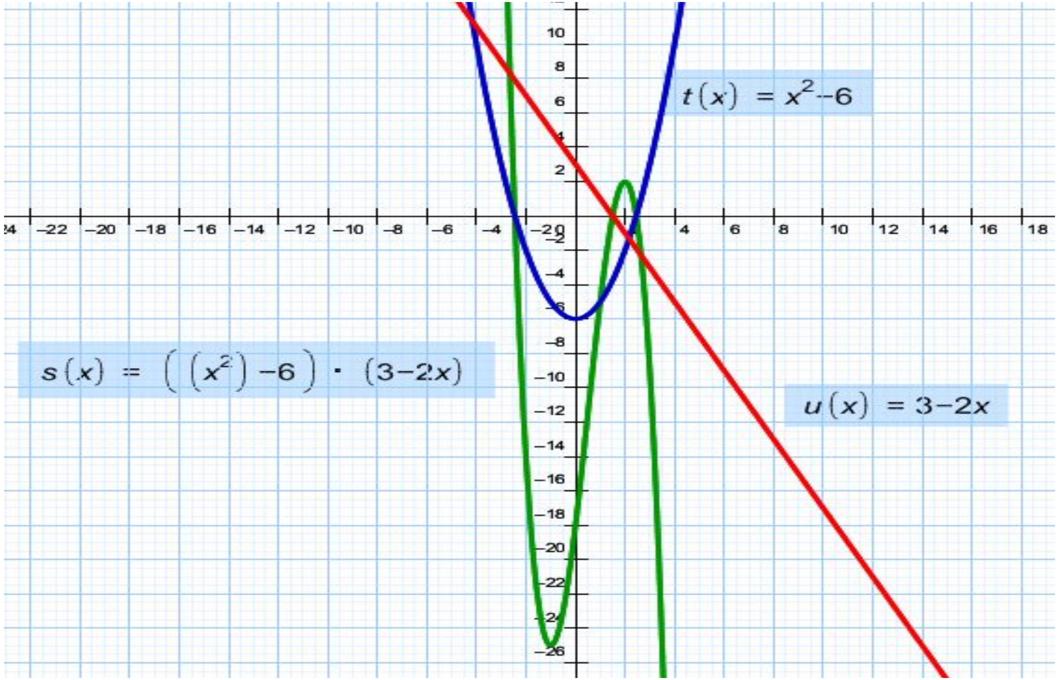


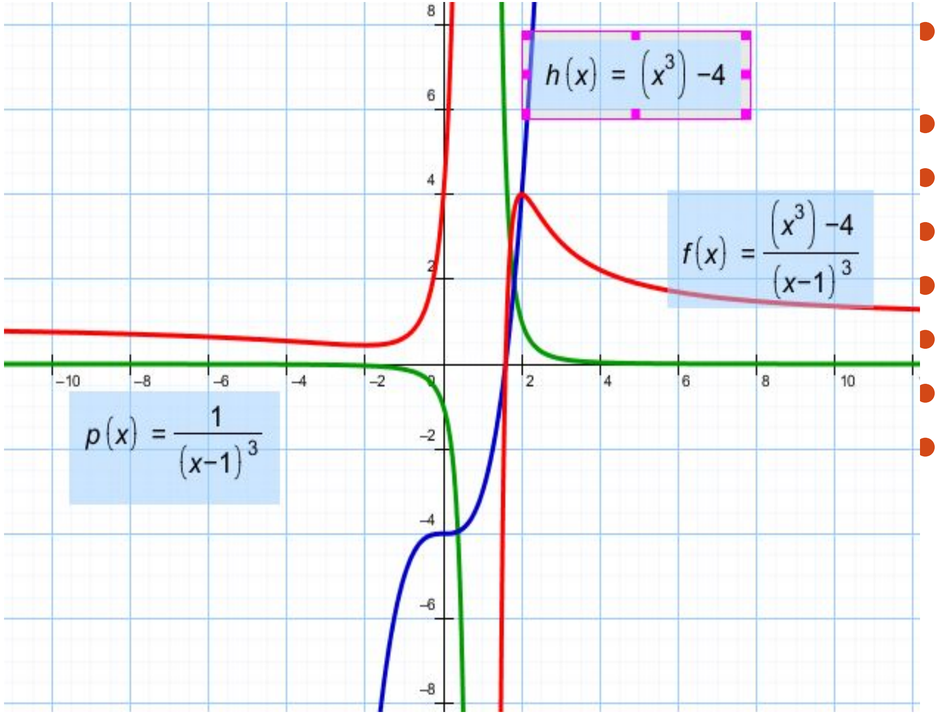
График частного двух функций

Данную функцию можно представить в виде ***y=f(x)/g(x)***

Если у нас будет задан график некоторой обратимой функции g(x), то для того чтобы построить график обратной функции, можно пользоваться следующим утверждением: график функции g(x) и обратной к ней функции будут симметричны относительно прямой, заданной уравнением y = x.

Построение графика функции сводится к построению графиков функций f(x) и , последующему перемножению по точкам значений соответствующих ординат этих графиков с учетом знака.

Пример 3 . При каких значениях парамен $a = \frac{x^3-4}{(x-1)^3}$ знение имеет ровно 2 корня?



- «Функции делимое и делитель»: $y=x^3-4$, $y=(x-1)^3$, представим как «функции множители»: $y= x^3-4$, $y=1/(x-1)^3$
- Область определения $(-\infty;1)U(1;+\infty)$
- Функция четная, четная, не является ни четной, ни нечетной
- Введем координатную ось $a0x$
- Построим графики функций
- Определим «разумные» точки
- Перемножим ординаты «функций делителя и делимого»
- Пересечём график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Формулировка метода

Таким образом, изучив алгебраические операции над графиками и координатно-параметрический метод и объединив их основные идеи, получаем новый метод решения заданий с параметрами.

Суть данного метода можно сформулировать так: если в задаче фигурирует лишь один параметр a и одна переменная x и в плоскости $x0a$ можно построить графики уравнений $F(x;a)=0$, $G(x;a)=0$ путём проведения алгебраических операций над графиками, то решения находим, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси.

Сформулируем алгоритм:

- Разбить исходную функцию на простые функции вида $y=f(x)$
- Найти область определения, граничные точки области определения и точки разрыва этих функций
- Исследовать исходную функцию на чётность (нечётность)
- Задать плоскость xOa
- Построить графики исходных функций
- Определить «разумные» точки
- Построить эскиз графика на основе алгебраических операций над графикам
- Пересечь график прямыми, перпендикулярными параметрической оси
- Записать ответ.

Пример задания с олимпиады МИЭТ 2018 . При каких значениях параметра а уравнение

$a(3x^3+x)=3x-x^3$ *имеет 3 корня.*

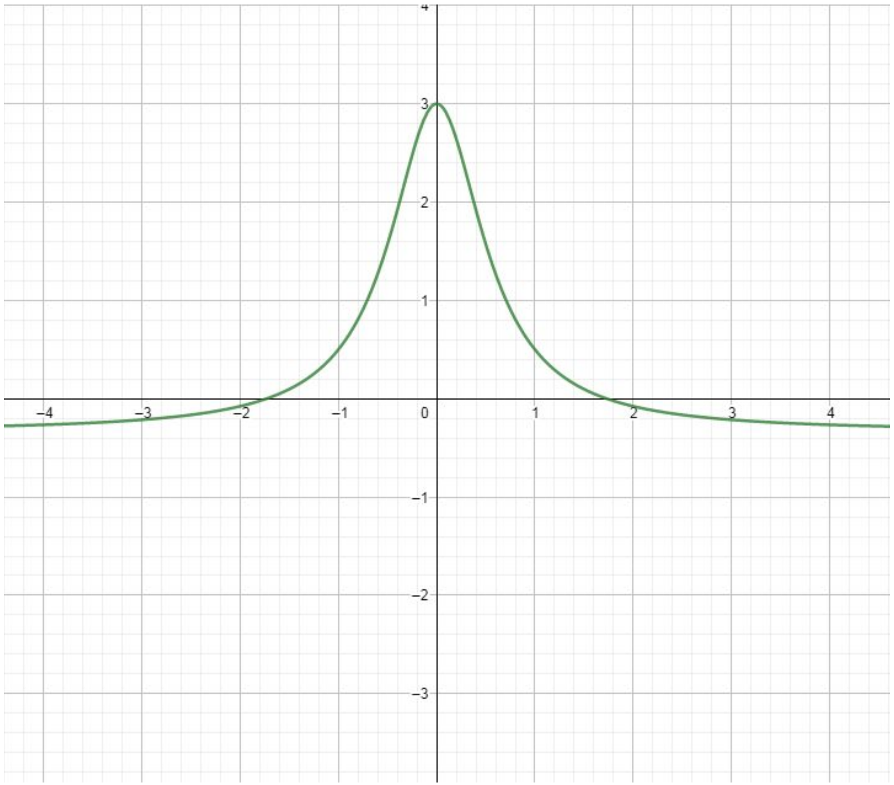
Заметим что x=0 является корнем, отсюда задание можно переформулировать: при каких значениях параметра уравнение $\mathbf{a(3x^2+1)=3-x^2}$ имеет ровно 2 корня.

Построим график функции $a = \dfrac{3 - x^2}{3x^2 + 1}$

Исходные функции: $f(x)=3-x^2$; $g(x)=3x^2+1$

Прямая y=a пересекает график в двух точках при a=(-1/3;3)

Следовательно при любых a из этого промежутка исходное уравнение будет иметь 3 корня.



Ответ: (-1/3;3)

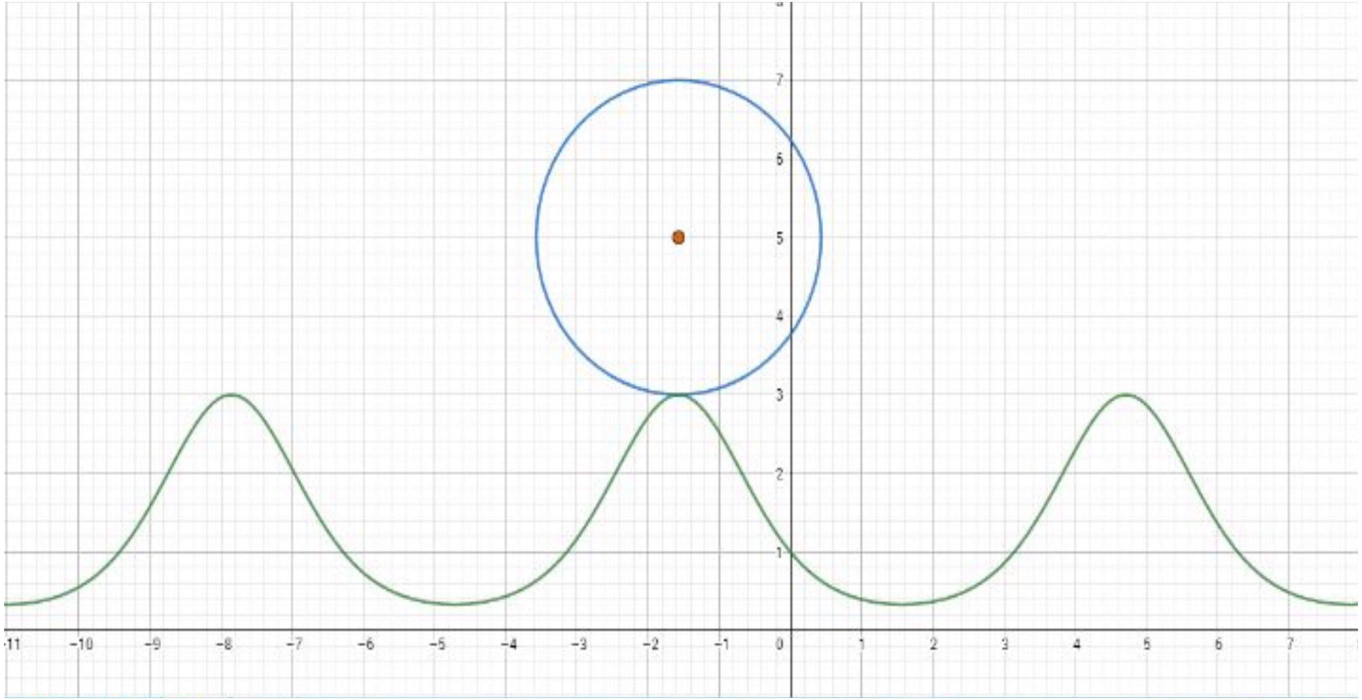
Пример 4. При каких значениях параметра а система уравнений

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin(x)} \\ \left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = (5a-4)^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение

- Представим функцию в виде $y=3^{-\sin x}$ и построим график функции $y=-\sin x$.Далее возводим основание в степень, равную значениям ординат этого графика.
- Теперь рассмотрим множество окружностей с центром в точке $(-\pi/2;5)$

  и радиусом $|5a-4|$.
- Данная система будет иметь единственное решение, только когда окружность касается графика функции.
- Касание произойдет в точке с координатой $(-\pi/2;3)$ отсюда радиус равен 2, поэтому переходим к равенству $|5a-4|=2$.



Ответ: a=1,2 ; a=0,4