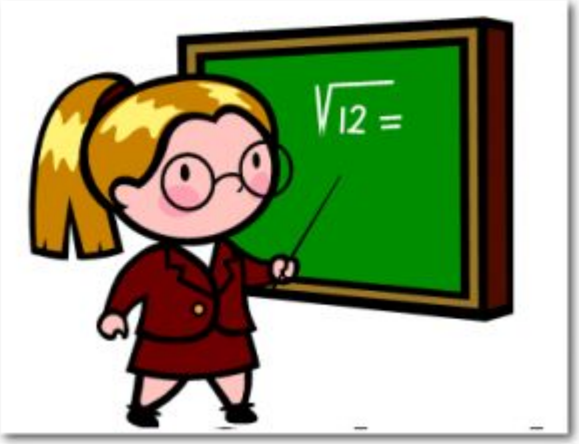
Корни: исторические сведения и задачи

Яковлева Татьяна Петровна,
доцент кафедры математики и физики
Камчатского государственного
университета имени Витуса Беринга,
кандидат педагогических наук, доцент,
г. Петропавловск - Камчатский

Исторические сведения

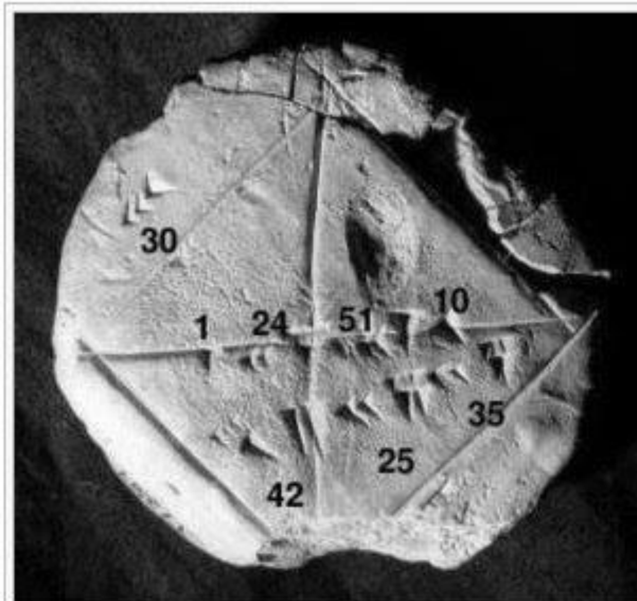


- Первые задачи, связанные с извлечением квадратного корня, обнаружены в трудах вавилонских математиков. Среди таких задач:

- Применение теоремы Пифагора для нахождения стороны прямоугольного треугольника по известным двум другим сторонам.
- Диагональ разбивает квадрат на 2 одинаковых прямоугольных треугольника, в каждом из которых она выполняет роль гипотенузы. Поэтому, как следует из теоремы Пифагора, длина диагонали квадрата равна

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

- Сразу же возникает соблазн достать микрокалькулятор и нажать клавишу извлечения квадратного корня.



Вавилонская табличка (около 1800–1600 г. до н. э.) с вычислением

$$\sqrt{2}\approx 1+24/60+51/60^2+10/60^3$$

= 1.41421296...

- Но даже самый высокопроизводительный компьютер, сколько бы долго он ни работал, никогда не сможет ни рассчитать все десятичные цифры.
- И хотя у Пифагора и его учеников компьютера не было, обосновали этот факт именно они. Пифагорейцы доказали, что у диагонали квадрата и его стороны общей меры (т.е. такого отрезка, который целое число раз откладывался бы и на диагонали, и на стороне) не существует.
- Следовательно, отношение их длин – число$\sqrt{2}$ – нельзя выразить отношением некоторых целых чисел m и n.

- Нахождение стороны квадрата, площадь которого задана.
- Решение квадратных уравнений.
- Греки сформулировали проблему удвоения куба, которая сводилась к построению кубического корня с помощью циркуля и линейки. Проблема оказалась неразрешимой. Численные алгоритмы извлечения кубического корня опубликовали Герон и индийский математик Ариабхата I.

- Алгоритмы извлечения корней любой степени из целого числа, разработанные индийскими и исламскими математиками, были усовершенствованы в средневековой Европе.
- После появления формулы Кардано началось применение в математике мнимых чисел, понимаемых как квадратные корни из отрицательных чисел.
- Основы техники работы с комплексными числами разработал в XVI веке Рафаэль Бомбелли, который также предложил оригинальный метод вычисления корней (с помощью цепных дробей).

- Открытие формулы Муавра показало, что извлечение корня любой степени из комплексного числа всегда возможно и не приводит к новому типу чисел.

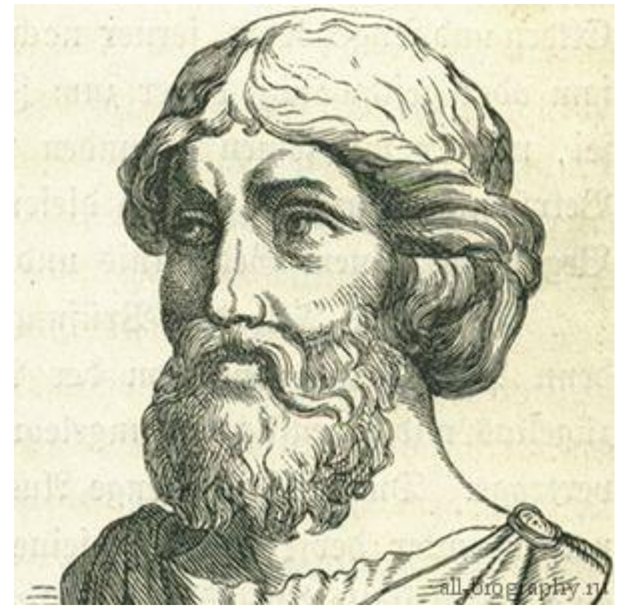
- Комплексные корни произвольной степени в начале XIX века глубоко исследовал Гаусс, хотя первые результаты принадлежат Эйлеру.

- Чрезвычайно важным открытием (Галуа) стало доказательство того факта, что не все алгебраические числа (корни многочленов) могут быть получены из натуральных с помощью четырёх действий арифметики и извлечения корня.

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3;$$

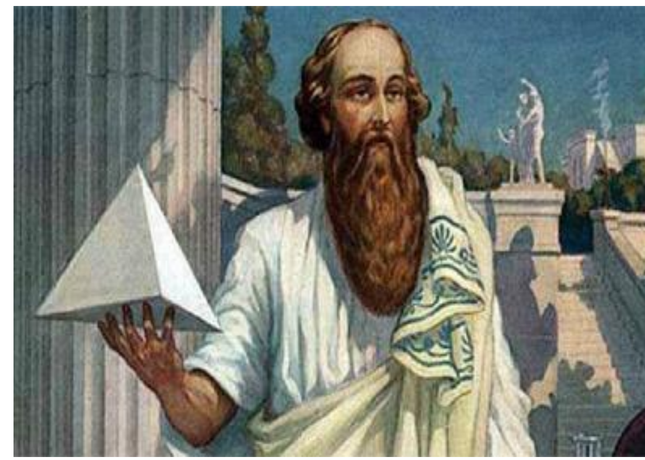
$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2.$$

- Пифагор (570 – 490 года до н.э.) – древнегреческий математик, философ. Родился Пифагор в Сидоне Финикийском. Факты биографии Пифагора не известны достоверно.
- О его жизненном пути можно судить лишь из произведений других древнегреческих философов. По их мнению, математик Пифагор общался с известнейшими мудрецами, учеными того времени. Он вернулся на Самос из поездки в Египет .
- Однако позже самому Пифагору пришлось уехать в Метапонт, поскольку наряду с последователями, у философа и ученого было много противников.



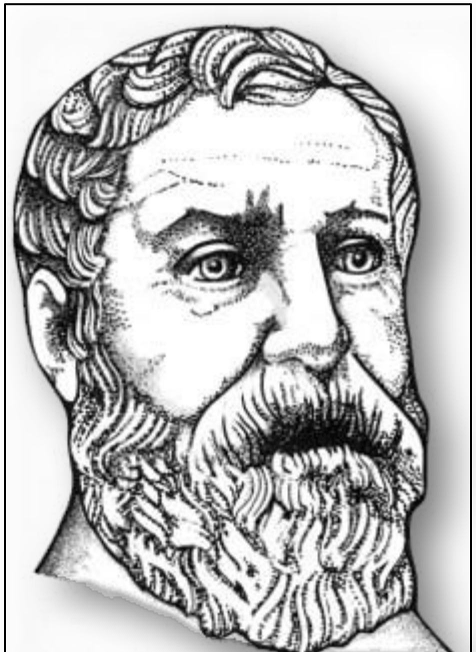
Пифагор

- Как математик Пифагор достиг больших успехов. Ему приписывают открытие и доказательство теоремы Пифагора, создание таблицы Пифагора.
- Философское учение Пифагора можно разделить на две части – научную и религиозную. Поскольку Пифагор считал свое учение тайной и практиковал только устную передачу его ученикам, собрания сочинений после него не осталось.
- Ряд историков сомневаются в том, что знаменитая теорема Пифагора была доказана именно им, аргументируя это тем, что она была известна другим древним народам.
- Помимо доказательства теоремы Пифагора, этому математику приписывают подробное изучение целых чисел, пропорций и их свойств. Пифагорейцам принадлежит значительная заслуга в придании геометрии характера науки.

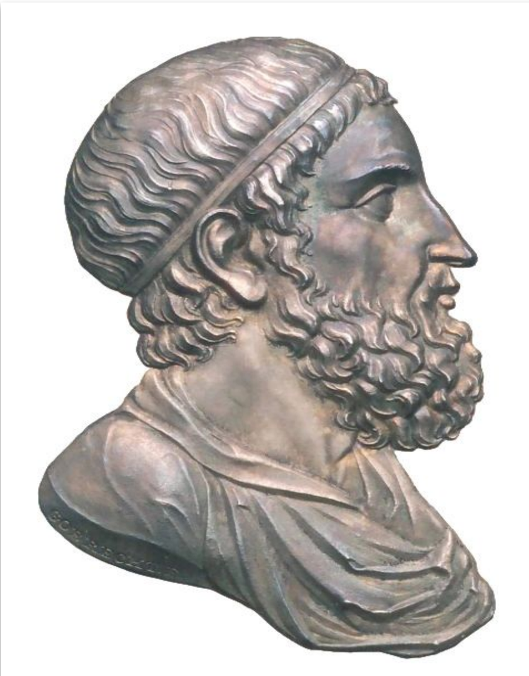


Пифагор

- ***Герон Александрийский***— греческий математик и механик. Время жизни отнесено ко второй половине первого века н. э. на том основании, что он приводит в качестве примера лунное затмение 13 марта 62 г. н. э.
- Подробности его жизни неизвестны. Герона относят к величайшим инженерам за всю историю человечества. Он первым изобрёл автоматические двери, прибор для измерения протяжённости дорог (древний одометр) и др.
- Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Основные произведения: Метрика, Пневматика, Механика (произведение сохранилось целиком в арабском переводе), Катоптрика (наука о зеркалах; сохранилась только в латинском переводе) и др.
- В 1814 году было найдено сочинение Герона «О диоптре», в котором изложены правила земельной съёмки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат.



Герон



Герон

- «Метрика» (Μετρική) Герона и извлечённые из неё «Геометрика» и «Стереометрика» представляют собой справочники по прикладной математике. Среди содержащихся в «Метрике» сведений:
- Формулы для площадей правильных многоугольников.
- Объёмы правильных многогранников, пирамиды, конуса, усечённого конуса, тора, шарового сегмента.
- Формула Герона для расчёта площади треугольника по длинам его сторон (открытая Архимедом).
- Правила численного решения квадратных уравнений.
- Алгоритмы извлечения квадратных и кубических корней (см. Итерационная формула Герона).
- В основном изложение в математических трудах Герона догматично — правила часто не выводятся, а только показываются на примерах.
- Книга Герона «Определения» представляет собой обширный свод геометрических определений.

- ***Этимология***— раздел лингвистики изучающий происхождение слов.
- Термин «корень» имеет долгую и сложную историю.
- Извлечение квадратного корня древние греки понимали строго геометрически: как нахождение стороны квадрата по известной его площади.
- После перевода на санскрит греческое слово «сторона» превратилась в «мула» (основание). Слово «мула» имело также значение «корень», поэтому при переводе индийских сиддхант на арабский использовался термин «джизр» (корень растения).
- Впоследствии аналогичное по смыслу слово «radix» закрепилось в латинских переводах с арабского, а через них и в русской математической терминологии («корень», «радикал»).

- Средневековые математики, например, Кардано обозначали квадратный корень символом «Rx», сокращение от слова «radix».
- Современное обозначение впервые употребил немецкий математик Кристоф Рудольф, из школы алгебраистов, в 1525 году. Происходит этот символ от стилизованной первой буквы того же слова «radix».
- Черта над подкоренным выражением вначале отсутствовала; её позже ввёл Декарт для иной цели (вместо скобок), и эта черта вскоре слилась со знаком корня.
- Показатель степени появился в знаке корня благодаря Валлису и «Универсальной арифметике» Ньютона.

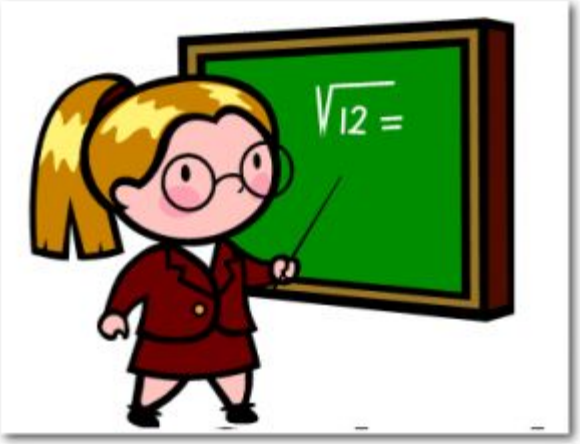
Лист E iiij, Vo.: Надо заметить, что radix quadrata (квадратный корень) будет в этом algorithmo (способе вычисления) обозначаться ради краткости знаком √: так, √4 означает radicem quadratam из 4.

Лист (Evi), Rü.: Всякое число, снабженное простой √, двойной √√ или тройной точкой √√√, называется в этой книге деноминативным числом (т. е. подрадикальным числом). Наоборот, всякое число, которому не предшествует такая точка, называется абсолютным, прими это во внимание.

Лист (E vij), Vo.: Radix cubica означается в этом algorithmo через следующий знак √√√. Таким образом √√√8 означает radix cubica из 8.

Некоторые немецкие коссисты XV в. обозначали квадратный корень точкой впереди числа или выражения. В скорописи точки заменяли черточками, позже перешедшими в символ ◆'. Так, в рукописи, написанной в 1480 г. на латинском языке, один такой символ точки перед числом (◆') означал квадратный корень, два таких знака (◆'◆') — корень четвертой степени, а три (◆◆◆') — кубический корень.

Исторические задачи



Задачи Ал-Кархи
(Из трактатов «Кафи-фил-Гисаб» и «Ал-Факри»)

Ал-Кархи (XI век), автор двух трактатов «Кафи-фил-Гисаб» («Все известное в арифметике») и «Ал-Факри» - обширное сочинение по алгебре. В первом трактате много внимания уделено и геометрии.

Задача 1. Сложить $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ пользуясь тождеством: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

Решение: $\sqrt{2}+\sqrt{18}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2}=\sqrt{2+18+2\sqrt{36}}=\sqrt{20+12}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$.

Задача 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xz = 10\,. \end{cases}$$

Решение: $y = \frac{10}{x}$, $z = \frac{100}{x^3}$, тогда: $x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$;

$$10000 = 100x^4 + x^8;$$

$$x^4 = -50 + \sqrt{12500}\,;$$

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}\,.$$

Ответ: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}$.

Задачи Бхаскара Акариа

Из трактата «Венец астрономического учения»

<u>Бхаскара-Акариа</u> (род. 1114 г.), знаменитый индусский математик (приставка «акариа» означает «мудрец», «ученый»), автор трактата «Сидданта-сиромани». Введение к нему содержит арифметику – «Лилавати», что буквально означает «прекрасная», и алгебру – «Виджа Ганита» (вычисление корней).

<u>Задача 3</u>. Преобразование корней. Показать, что:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Решение: $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2+3+5+2\sqrt{2\cdot 3}+2\sqrt{3\cdot 5}}=$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

Задачи Кристофа Рудольфа

Кристоф Рудольф, автор популярнейшего алгебраического трактата «Coss».

Задача 4. Разделить $\sqrt[3]{216}$ на $\sqrt[4]{16}$.

Решение: $\sqrt[3]{216} : \sqrt[4]{16} = \sqrt[12]{216^4 : 16^8} =$

$= \sqrt[12]{2176782336 : 46656} = \sqrt[12]{531441} =$

$= \sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Ответ: 3.

Задача Симона Стевина

<u>Стевин, Симон</u> (1548-1620), голландский инженер, которого можно по справедливости считать изобретателем десятичных дробей (трактат «La Disme», 1585).

<u>Задача 5</u>. Решить $\sqrt{\sqrt{3x^2}+\sqrt{2x}}\cdot\sqrt{\sqrt{5x^2}+\sqrt{4x}}.$

Решение: $$\sqrt{\sqrt{3x^2}+\sqrt{2x}}\cdot\sqrt{\sqrt{5x^2}+\sqrt{4x}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{15x^4}+\sqrt{12x^8}+\sqrt{10x^3+\sqrt{8x^3}}}.$$

Ответ: $$\sqrt{\sqrt{15x^4}+\sqrt{12x^8}+\sqrt{10x^3+\sqrt{8x^3}}}.$$

Задача Маклорена

<u>Маклорен, Колин</u> (1698-1746), профессор университета в Эдинбурге, математик, известный своими трудами по высшему анализу («Трактат о флюксиях») и особенно исследованиями свойства кривых, главным образом третьего порядка. Его имя обычно связывают с разложением функций в ряд по степеням аргумента, хотя ряд этот был известен и до него, и был им только впервые опубликован.

<u>Задача 6</u>. Преобразовать: $\dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{20}(2\sqrt[2]{2}+2+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})(2\sqrt[2]{2}+2+\sqrt[3]{4})}=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{80}}{2}=2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}.$$

Ответ: $2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}$.

Список литературы

1) Глейзер Г.И. История математики школы /Г.И. Гейзер. - М: Просвещение. - 1982.- 241 с.
2) Кымпан Ф. История числа π / Ф. Кымпан. – М.: Наука, 1971 – 216 с.
3) Алгебра: учеб. Для 6 кл. сред. шк. / под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1987-268 с.
4) Школьникам о математике и математиках / Сост. М. М. Лиман. – М.: Просвещение, 1994 – 80 с.
5) ru.wikipedia.org/wiki/Арифметический корень
6) ru.math.wikia.com/wiki/ Арифметический корень
7) glovl.ru
8) www.matematike.net/algebra
9) uztest.ru/abstracts