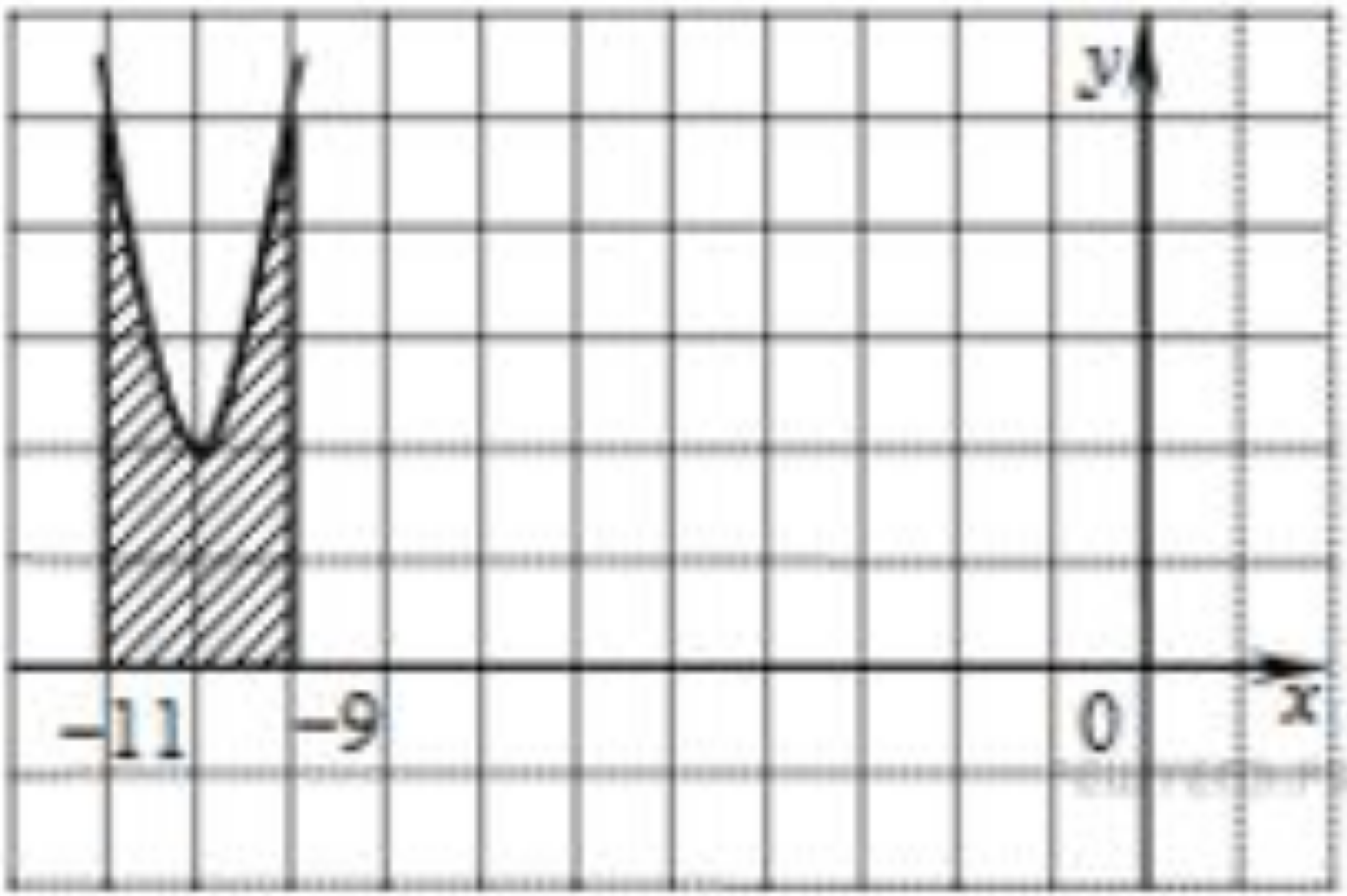
Первообразная в заданиях ЕГЭ

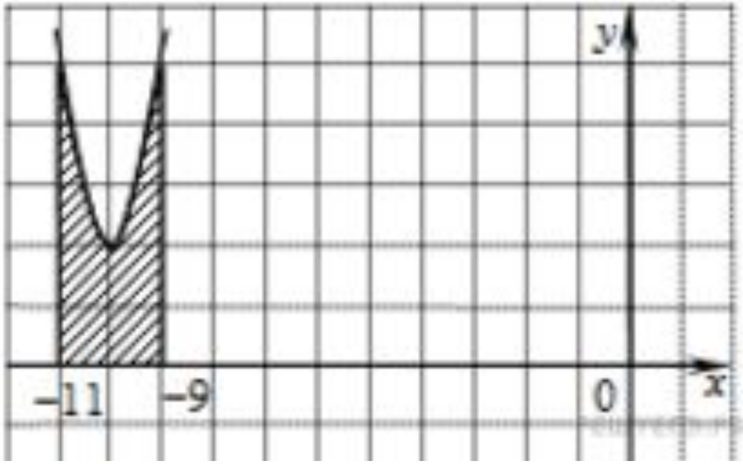
11 класс

Пирогова Татьяна Николаевна МАОУ СОШ № 10 г. Таганрог

Задания № 7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.





$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$$

Подстановка «в лоб»

$$F(-9) = (-9)^3 + 30\cdot(-9)^2 + 302\cdot(-9) - \frac{15}{8} = -729 + 2430 - 2718 - \frac{15}{8} = -1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11) = (-11)^3 + 30\cdot(-11)^2 + 302\cdot(-11) - \frac{15}{8} = -1331 + 3630 - 3322 - \frac{15}{8} = -1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9) - F(-11) = -1018\frac{7}{8} + 1024\frac{7}{8} = \boxed{6.}$$

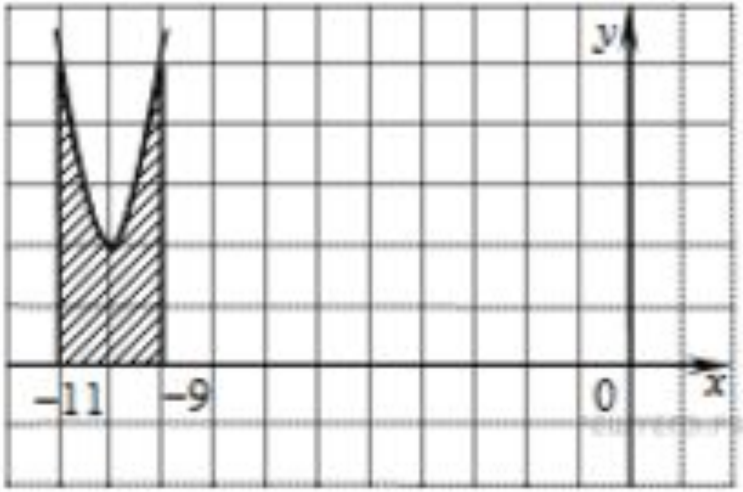
Группировка

$$F(-9) - F(-11) = (-9^3 + 11^3) + 30(9^2 - 11^2) + 302(-9+11) =$$

$$= (11-9)(11^2 + 11\cdot 9 + 9^2) + 30(9-11)(9+11) + 302(-9+11) =$$

$$= 2(121 + 99 + 81) + 30\cdot(-2)\cdot 20 + 302\cdot 2 =$$

$$= 2\cdot 301 - 60\cdot 20 + 604 = 602 - 1200 + 604 = \boxed{6.}$$



$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$$

$$f(x) = F'(x)$$

Нахождение функции и выделение полного квадрата

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + 60x + 302 = 3(x^2 + 20x + 100) + 2 = 3(x+10)^2 + 2,$$

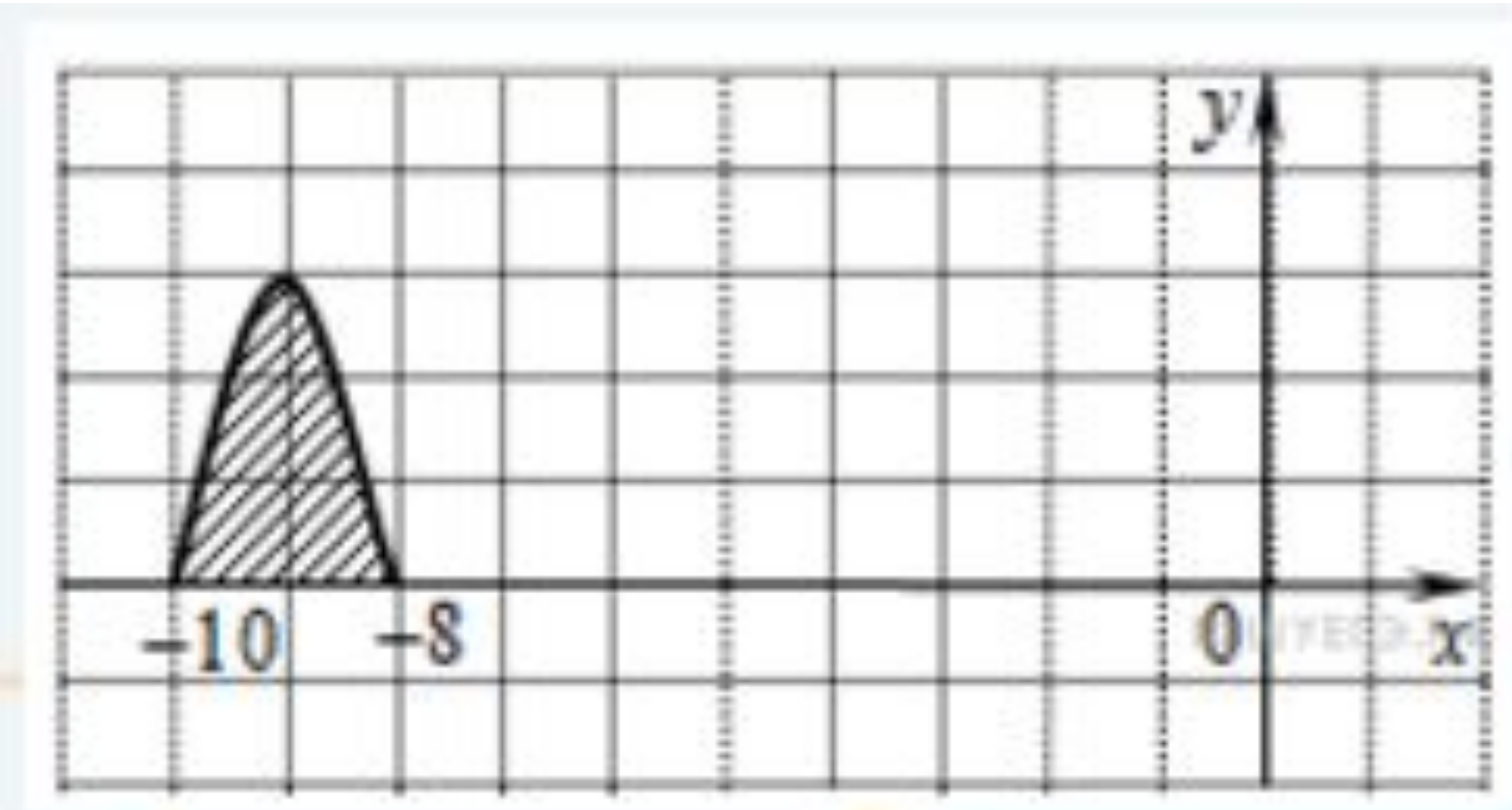
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

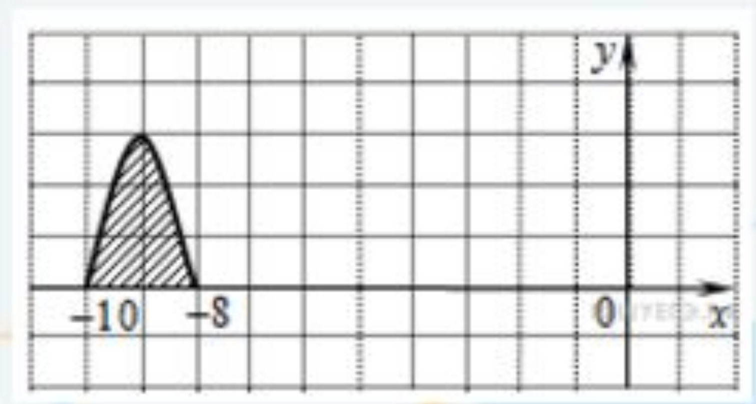
$$\int_{-11}^{-9} (3(x+10)^2 + 2)dx = ((x+10)^3 + 2x)\Big|_{-11}^{-9} = 1 - (-1) + 2(-9 - (-11)) = 2 + 4 = \boxed{6.}$$

Выделение полного куба у первообразной

$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8} = (x+10)^3 + 2x - 1000 - \frac{15}{8}$$

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.





$$f(x) = F'(x)$$

Нахождение функции и выделение полного квадрата

$$F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3(x^2 + 18x) - 240 = 3 - 3(x+9)^2.$$

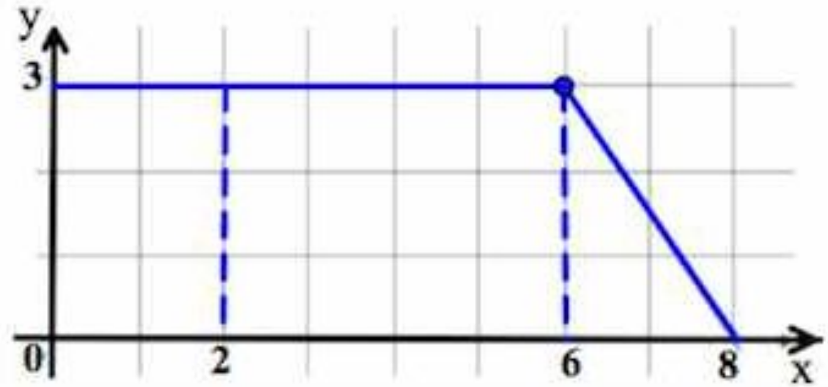
Параллельный перенос фигуры, чтобы вершина лежала на Оу

Площадь данной фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции

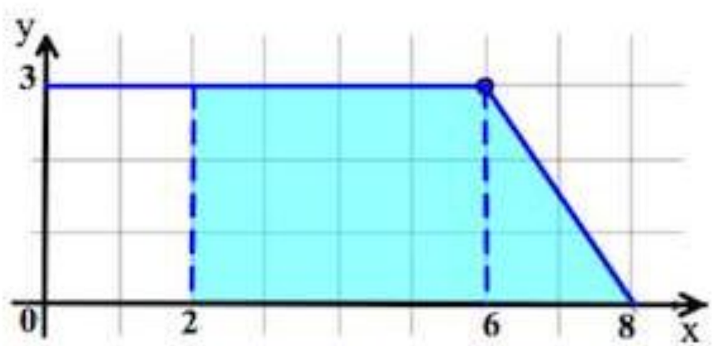
$y = 3 - 3x^2$ и отрезком $[-1;\ 1]$

$$S = \int_{-1}^{1} (3-3x^2)dx = 2\int_{0}^{1} (3-3x^2)dx = 2(3x - x^3)\Big|_0^1 = 2(3-1) - 0 = \boxed{4.}$$

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$



Согласно геометрическому смыслу первообразной $F(8) - F(2)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = 2,\ x = 8,\ y = 0.$

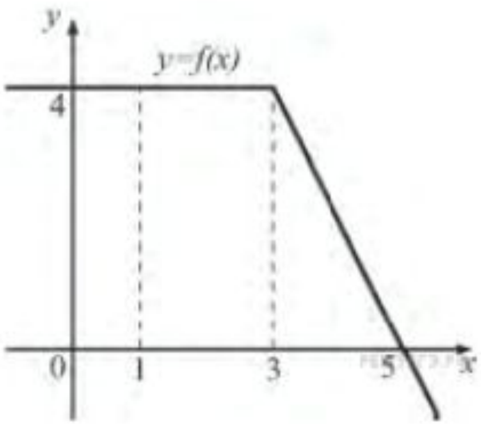


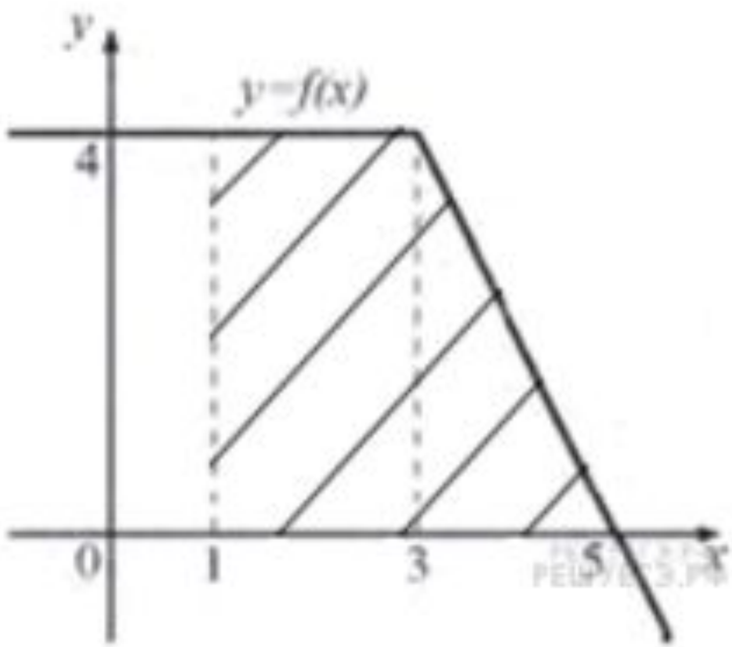
Площадь закрашенной голубым цветом фигуры (прямоугольной трапеции с основаниями 4 и 6 и высотой 3) есть $\frac{4+6}{2} \cdot 3 = 15.$

Искомую площадь можно также посчитать и как сумму площадей прямоугольника ($3 \cdot 4 = 12$) и прямоугольного треугольника ($\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$).

Ответ: 15.

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx$.



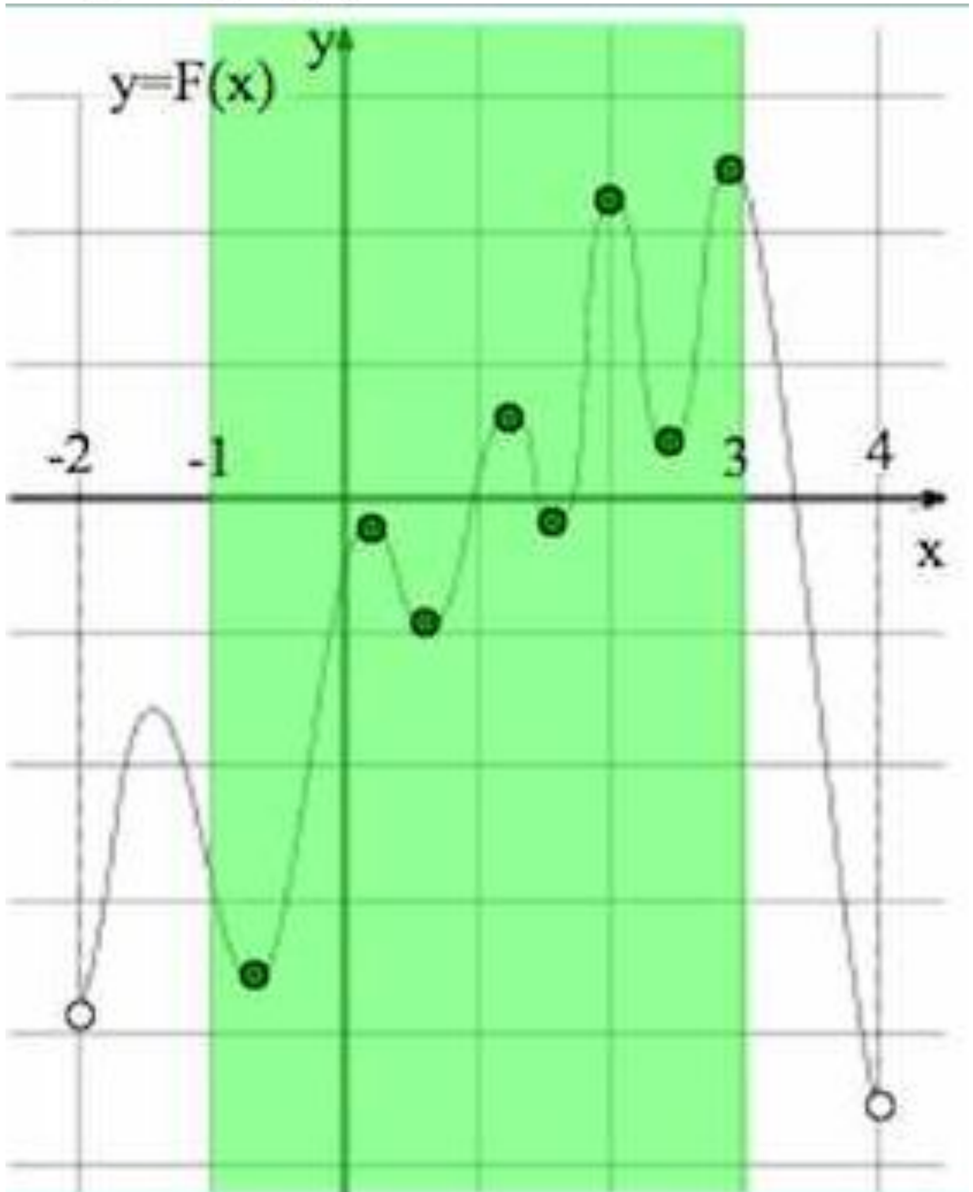


На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 4)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 3]$.

$$F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0$$

$$F'(x) = 0.$$



Задания № 12

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x+2}{5},$$

если $F(4)=5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

$$F(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}4x + C$$

$$0{,}3 \cdot 4^2 + 0{,}4 \cdot 4 + C = 5; \qquad C = -1{,}4$$

$$F(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}4x - 1{,}4$$

$$F(1) = 0{,}3 + 0{,}4 - 1{,}4 = \boxed{-0{,}7}$$

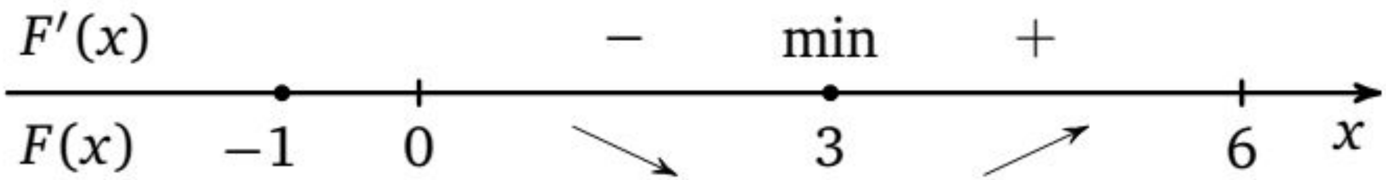
2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

на отрезке $[0; 6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

$$F'(x) = f(x) \qquad F'(x) = f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$F'(x) = (x+1)(x-3) \qquad \min_{[0;6]} F(x) = F(3) = -9$$



$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C \qquad F(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 + C = -9 + C$$

$$C = 0 \text{ и } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

$$F(0) = 0, \qquad F(6) = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - 6^2 - 3\cdot 6 = 18. \qquad \max_{[0;6]} F(x) = F(6) = \boxed{18}.$$

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x^3+2}{x^3}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1)=2$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

$f(x) = 3 + 2 \cdot x^{-3}$. $F(x) = 3x - x^{-2} + C$

$$C = 0 \text{ и } F(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$$

$$F(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{0{,}5^2} = 1{,}5 - 1 : \frac{1}{4} = \boxed{-2{,}5}$$

4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{6}{x^2}$$

на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-2; -3)$. Решите уравнение $F(x) = f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

$f(x) = -6x^{-2}$ $\quad F(x) = 6x^{-1} + C$ или $F(x) = \frac{6}{x} + C$

$\frac{6}{-2} + C = -3$ $\quad C = 0$ $\quad F(x) = \frac{6}{x}$

$F(x) = f(x)$ $\quad \frac{6}{x} = -\frac{6}{x^2}$ $\quad x = \boxed{-1}$

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{11}{\sqrt{x}} + 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(4) = -15$. В ответе укажите значение $F(9)$.

$$F(x) = 2x + 22\sqrt{x} + C$$

$$F(4) = -15$$

$$8 + 44 + C = -15$$

$$C = -67$$

$$F(9) = 18 + 66 - 67 = \boxed{17.}$$

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если график первообразной пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(8)$.

$$F(x) = \sqrt[3]{x^2} + C.$$

$(1; -1)$ $\quad F(1) = -1 \quad 1 + C = -1 \quad C = -2.$

$$F(8) = \sqrt[3]{8^2} - 2 = \boxed{2}$$

7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$$

проходит через точку $(-\pi; 0)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

$$F(x) = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

$F(-\pi) = 0$, значит, $3 + C = 0$, откуда $C = -3$

$$F(0) = -3 - 3 = \boxed{-6}$$

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2 + \sin 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

$$F(x) = 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$, значит, $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} + C = -3\pi$

$$C = -\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4}$$

$$F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{0.}$$

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 4x + 3,$$

если $F(1) = e$. В ответе укажите значение $F(0)$.

$$F(x) = e^x + 2x^2 + 3x + C$$

$$e + 2 + 3 + C = e \qquad C = -5$$

$$F(0) = 1 - 5 = \boxed{-4}$$

10. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 2x + 1$$

на отрезке [0; 2] равно e^2. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

$$F'(x) = f(x) \qquad F'(x) = f(x) = e^x + 2x + 1$$

$$e^x + 2x + 1 > 0 \qquad F'(x) > 0$$

$$\min_{[0;2]} F(x) = F(0), \qquad \max_{[0;2]} F(x) = F(2) = e^2.$$

$$F(x) = e^x + x^2 + x + C \qquad F(2) = e^2 + 4 + 2 + C = e^2 + 6 + C$$

$$e^2 + 6 + C = e^2 \qquad C = -6 \text{ и } F(0) = 1 - 6 = \boxed{-5}$$

11. В какой точке отрезка $[12; 22]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

$$F'(x) = f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

$$-1 - \ln^2(x-2) < 0$$

$$F'(x) < 0$$

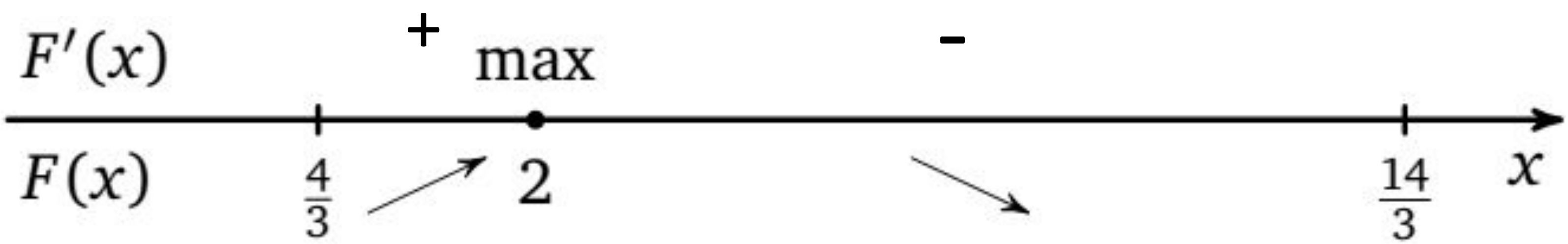
$$x = \boxed{22}$$

12. В какой точке отрезка $\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-5)\ln(x-1)$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

$$F'(x) = f(x) = (x-5)\ln(x-1)$$



$$\max_{\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]} F(x) = F(2)$$

$$\boxed{2}$$