ГБПОУ ВО ВГПГК

Методический материал для студентов с овз по теме: «Бинарные отношения»

Преподаватель: Худякова В.В.

Бинарные отношения

- Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.
- Если множества A и B совпадают A=B, то R называют бинарным отношением на множестве A. (однородное отношение)
- Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R.
- *n*-местным (*n*-арным) отношением, заданным на множествах M_1, M_2,…, M_n, называется подмножество прямого произведения этих множеств.
- Иногда понятие отношения определяется только для частного случая $M=M_1=M_2=\ldots=M_n$.

Примеры

- Отношение a= {(4, 4), (3, 3), (2, 2), (4, 2)} на множестве X = {4, 3, 2} можно определить как свойство "Делится" на этом подмножестве целых чисел.
- Из школьного курса
  - На множестве целых чисел Z отношения "делится", "делит", "равно", "больше", "меньше", "взаимно просты";
  - на множестве прямых пространства отношения "параллельны", "взаимно перпендикулярны", "скрещиваются", "пересекаются", "совпадают";
  - на множестве окружностей плоскости "пересекаются", "касаются", "концентричны".

Пример

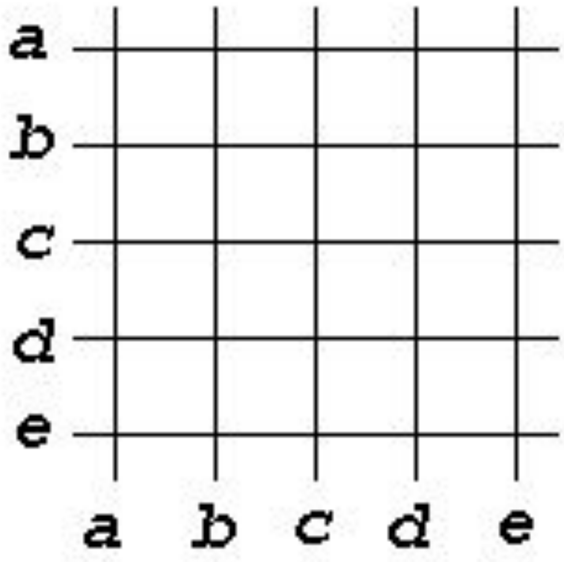
- Пусть A=B=***R***, пара (x, y) является точкой вещественной плоскости. Тогда бинарное отношение
  - $R_1 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$
- определяет замкнутый круг единичного радиуса с центром в точке (0,0) на плоскости, отношение
  - $R_2 = \{ (x, y) \mid x \geq y \}$
- полуплоскость, а отношение
  - $R_3 = \{ (x, y) \mid |x-y| \leq 1 \}$
- полосу.

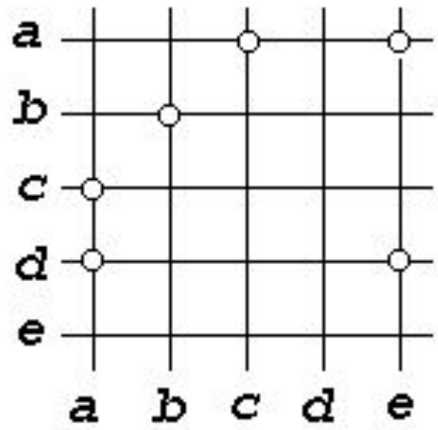
Способы задания

- Перечисление всех пар из базового множества A и базового множества B
  - $A=\{a_1, a_2\}$ $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $=\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$
- Отношения могут задаваться формулами:
- формулы
  - $y = x^2 + 5x - 6$ или $x + y < 5$ задают бинарные отношения на множестве действительных чисел;
- формула
  - $x + y =$ любовь,
- задает бинарное отношение на множестве людей.

Графический метод задания

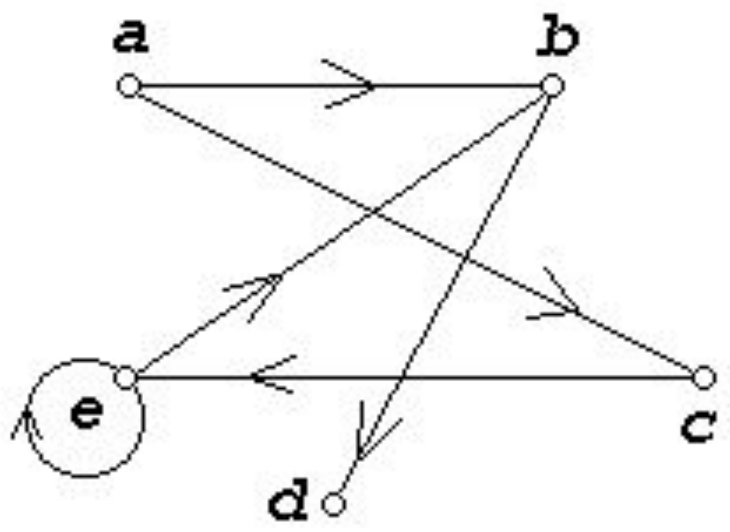
a= {(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e,d), (e, a)}





Графовое представление

- Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества А, то есть x_i, а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j, означает, что $(x_i,x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.
- A={(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *d*), (*c*, *e*), (*e*,*b*), (*e*, *e*)}



Матричная форма задания

- Пусть на некотором конечном множестве X задано отношение A. Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и определим *матрицу отношения* $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Определения

- Диагональ множества $A \times A$, т.е. множество

$$\Delta=\{(x,x) \mid x \in A\},$$

- называется **единичным бинарным отношением** или отношением равенства в A.
- **Областью определения** бинарного отношения R называется множество
- $\delta R=\{ x \in A \mid\ y \in B, (x, y) \in R \}$. $\mathrm{Dom}\, R = \{x \mid \exists y((x,\ y) \in R)\}.$
- **Областью значений** бинарного отношения R называется множество
- $\rho R=\{ y \in B \mid\ x \in A, (x, y) \in R \}$. $\mathrm{Im}\, R = \{y \mid \exists x((x,\ y) \in R)\}.$
- **Образом** множества X относительно отношения R называется множество

$$R(X) = \{ y \in B \mid\ x \in X, (x, y) \in R \};$$

- **прообразом** X относительно R называется R -1(X).

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$\geq \cap \neq = >$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

- Дополнение к отношению

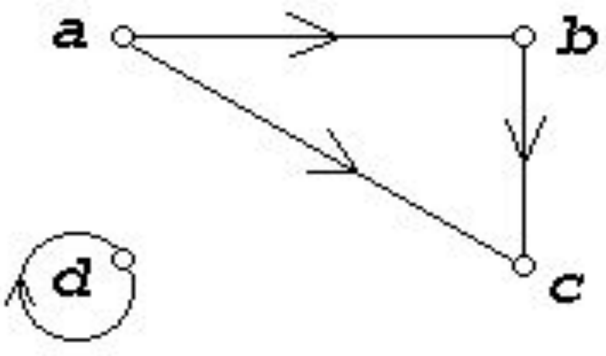
$$\overline{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \setminus R \}.$$

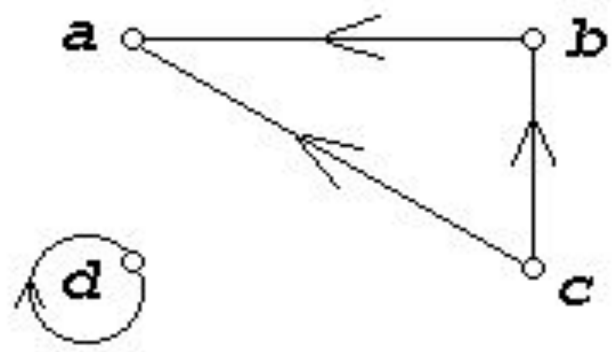
$\overline{\geq} \equiv <$

Обратное отношение

- Обратное отношение

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}.$$





$$M_{\alpha} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

$$M_{\alpha^{-1}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Композиция отношений

- Двойственное отношение $R^d = \overline{R}^{-1}$
- Композиция (суперпозиция) отношений $R = R_1 o R_2$ содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда существует такое $z \in A$, что $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

$$\{(x,\ y) \mid \exists z (xSz \wedge zRy)\}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства отношений

- R_1 содержится в R_2 ($R_1 \subseteq R_2$), если любая пара (x, y), которая принадлежит отношению R_1 также принадлежит и отношению R_2
- Рефлексивность

$$\forall x \in M \ (xRx)$$

- Антирефлексивность

$$\forall x \in M \ \neg(xRx)$$

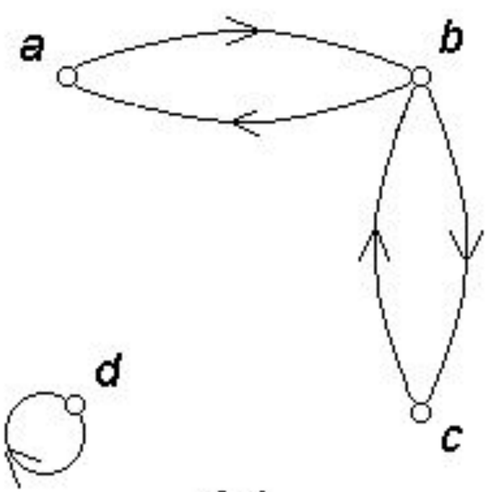
Рефлексивность отношений

- Обозначим через Ix отношение на множестве X, состоящее из пар вида (a, a), где $a \in X$:
  - $Ix = \{(a, a) | a \in X\}$.
- Отношение Ix обычно называют диагональю множества X или отношением тождества на X.
- Очевидно, что отношение R на множестве X рефлексивно, если диагональ Ix является подмножеством множества a:
  - $Ix \subseteq R$.
- Отношение антирефлексивно, если диагональ Ix и отношение R не имеют ни одного общего элемента:
  - $Ix \cap R = \varnothing$.

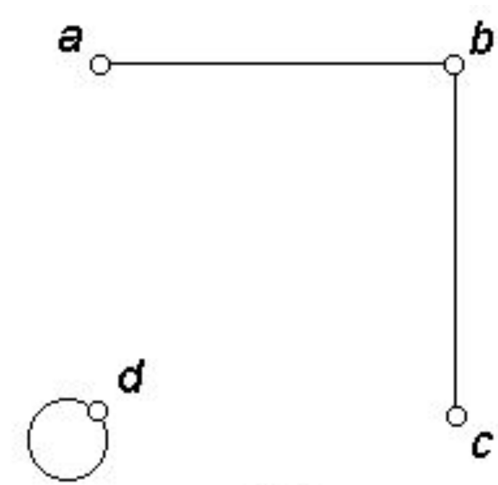
Свойства отношений

- Симметричность $\forall x,\ y \in M(xRy \Rightarrow yRx)$

$xRy \rightarrow yRx$ или $R=R^{-1}$



(a)



(b)

Свойства отношений

- Антисимметричность

$$\forall x,\ y \in M(xRy \land yRx \Rightarrow x = y)$$

- Пусть А - множество людей в данной очереди. Отношение R "не стоять за кем-то в очереди" будет антисимметричным.
- Пусть x=ВАСЯ, а y=ИВАНОВ. Тот факт, что $(x, y)\in R$ означает, что "ВАСЯ не стоит в очереди за ИВАНОВЫМ", $(y, x)\in R$ - "ИВАНОВ не стоит за ВАСЕЙ". Очевидно, что одновременное выполнение обоих включений может быть, только если ВАСЯ и есть ИВАНОВ, т.е. $x = y$.
- Отношение "≥" также антисимметрично: если $x\geq y$ и $y\geq x$, то $x=y$.
- Асимметричность

$$\forall x,\ y \in M(xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

- Асимметричность эквивалентна одновременной антирефлексивности и антисимметричности отношения.

Свойства отношений

- Для любого отношения R вводятся понятия симметричной части отношения
- $R^s = R \cap R^{-1}$
- и асимметричной части отношения
- $R^a = R \setminus R^s$.
- Если отношение R симметрично, то $R = R^s$,
- если отношение R асимметрично, то $R = R^a$.
- Примеры. Если R - "≥", то R^{-1} - "<", R^s - "=", R^a - ">".
- Транзитивность отношений

$$\forall x,\ y,\ z \in M(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

Нетранзитивное отношение

- Отношение R, определенное на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z этого множества из xRy и yRz не следует xRz.
- Пример нетранзитивного отношения:
  - «x отец y»
- Нетранзитивным является отношение "≠". Пусть $x=2$, $y=3$, $z=2$, тогда справедливо $x \neq y$ и $y \neq z$, но $x=z$, т.е. $(x, z) \notin R$.

Негатранзитивность отношений

- $(x,y) \notin R$ и $(y, z) \notin R \rightarrow (x, z) \notin R$
- В графе негатранзитивного отношения отсутствие дуг от *x* к *y* и от *y* к *z* приводит к отсутствию дуги от *x* к *z* .
- Отношения R_1 - ">" и R_2 - " ≠" негатранзитивны, так как отношения $R_1^{доп}$ - "≤", $R_2^{доп}$ - "=" транзитивны.
- Возможно одновременное выполнение свойств транзитивности и негатранзитивности.
- Например, отношение R_1 одновременно транзитивно и негатранзитивно, а R_2, как известно, транзитивным не является.

Свойства бинарных отношений

- Полнота
  - $\forall (x, y) \in X$ либо xRy либо yRx, либо и то и другое одновременно – полносвязное или связное отношение
- Ацикличность
  - Отношение R называется ацикличным, если из наличия какого-либо пути между вершинами соответствующего графа следует отсутствие обратной дуги (обратного пути) между этими вершинами (в графе отсутствуют любые циклы).
  - $\forall n \; x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \wedge x_3Rx_4 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}Rx_n$ но не наоборот.

Композиция транзитивного отношения

- Справедлива **теорема:**
  - Для любого отношения транзитивное замыкание равно пересечению всех транзитивных отношений, включающих в качестве подмножества.
- **Композиция** транзитивного отношения – транзитивное отношение.
- Отношение R1 называется транзитивным относительно отношения R2, если:
  - из $(x, y) \in R1$ и $(y, x) \in R2$ следует, что $(x, z) \in R1$;
  - из $(x, y) \in R2$ и $(y, x) \in R1$ следует, что $(x, z) \in R1$.

Связи между бинарными отношениями

- Отношение R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$.
- Если R рефлексивно, то R^d антирефлексивно, если R антирефлексивно, то R^d рефлексивно.
- Отношение R слабо полно тогда и только тогда, когда R^d антисимметрично.
- Отношение R асимметрично тогда и только тогда, когда R^d полно.

Отношения эквивалентности (подобия, равносильности)

- Отношение R на множестве A^2 называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает следующими свойствами:
  - рефлексивность
  - симметричность
  - транзитивность
- Обозначается $=$, $\approx$, $\sim$, $\equiv$

Отношение эквивалентности

- $x \approx x$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
- Если $x \approx y$, то $y \approx x$ (симметричность)
- Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$ (транзитивность)

Примеры

- отношение тождества $I_X = \{(a, a) | a \in X\}$ на непустом множестве X;
- отношение параллельности на множестве прямых плоскости;
- отношение подобия на множестве фигур плоскости;
- отношение равносильности на множестве уравнений;
- отношение "иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число *m*" на множестве целых чисел. Это отношение в математике называют отношением сравнимости по модулю *m* и обозначают $a \equiv b \ (mod\ m)$;
- отношение "принадлежать одному виду" на множестве животных;
- отношение "быть родственниками" на множестве людей;
- отношение "быть одного роста" на множестве людей;
- отношение "жить в одном доме" на множестве людей.

Классы эквивалентности

- Система непустых подмножеств

$$\{M_1, M_2, \dots\}$$

- множества M называется *разбиением* этого множества, если

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup \quad \dots$$

- и при $i \neq j$

$$M_i \cap M_j = \varnothing.$$

- Сами множества $M_1, M_2, \dots$ называются при этом *классами* данного разбиения.

Примеры

- Разложение всех многоугольников на группы по числу вершин - треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.;
- Разбиение всех треугольников по свойствам углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные);
- Разбиение всех треугольников по свойствам сторон (разносторонние, равнобедренные, равносторонние);
- Разбиение всех треугольников на классы подобных треугольников;
- Разбиение множества всех учащихся данной школы по классам.

Пример 1

$$R(x,y) = \begin{cases} \text{"истина"}, \text{ если } x = y \\ \text{"ложь"}, \text{ если } x \neq y \end{cases}$$

Пример 2

- *a* и *b* равны по модулю n, если их остатки при делении на n равны.
- Например по модулю 5 равны 2, 7, 12 …

$$R(x,y) = \begin{cases} \text{"истина"}, \text{ если } x = y \bmod n \\ \text{"ложь"}, \text{ если } x \neq y \bmod n \end{cases}$$

- [0] = {0, n, 2n, …}
- [1] = {1, n+1, 2n+1, …}
- …
- [n-1] = {n-1, n+n-1, 2n+n-1, …}

Класс эквивалентности

- **Классом эквивалентности** $C(a)$ элемента a называется подмножество элементов, эквивалентных a. Из вышеприведённого определения немедленно следует, что, если и $b \in C(a)$, то $C(a) = C(b)$.

Теорема

- Отношение эквивалентности, заданное между элементами базового множества X, определяет разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности базового множества

Фактор-множество

- Получающееся при этом множество классов называется фактор-множеством $\{c_k\}$.или $X / \sim$.

Теорема

- Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.
- *Доказательство*. Пусть A и B - два класса эквивалентности из X. Допустим, что они пересекаются и c - общий элемент, то есть $c \in A$, $c \in B$. Если x - произвольный элемент из A, то $x \sim c$. Поскольку $c \in B$, то и $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$. Итак, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Теорема доказана

Представитель класса

- Как уже отмечалось, каждый элемент a из множества X полностью определяет класс эквивалентности, его содержащий, который далее обозначается символом ã, так что $a \in$ ã (и ã = ỹ, если и только если $a = y$). Элемент a называется представителем класса A, если $a \in A$.