Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для А исходов к числу всех равновозможных исходов: $\mathbf{P}\ (\mathbf{A}) = \frac{m}{n}$
  где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию А.

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 24 из США, 13 из Мексики, остальные — из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 4 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 160 качественных сумок приходится одиннадцать сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Эстонии, 6 спортсменов из Латвии, 3 спортсмена из Литвы и 7 — из Польши. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Литвы.

Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов — в первый день 16 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 34 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

На семинар приехали 4 ученых из Норвегии, 6 из России и 6 из Великобритании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что вторым окажется доклад ученого из Норвегии.

На семинар приехали 3 ученых из Болгарии, 4 из Австрии и 5 из Финляндии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из Болгарии.

В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

В сборнике билетов по истории всего 40 билетов, в 16 из них встречается вопрос по Петру Первому. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по Петру Первому.

В сборнике билетов по философии всего 45 билетов, в 18 из них встречается вопрос по Пифагору. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по Пифагору.

В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по производной.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 7 прыгунов из России и 10 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из России.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Украины и 6 прыгунов из Канады. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что тридцатым будет выступать прыгун из Канады.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 6 прыгунов из России и 7 прыгунов из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвертым будет выступать прыгун из России.

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

6 : 8=0,75.

На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

Решение. Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. Р=13/25 = 0,52. Ответ:0,52

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна 3/15. Ответ:0,2

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ. 6 : 12= 0,5 (6 делений между 12 и 7, всего 12 делений)

При решении задач <u>с монетами</u> число всех возможных исходов можно посчитать по формуле п=2ª, где α – количество бросков

В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз.

Решение. Всего возможны четыре исхо да: решка-решка, решка-орёл, орёл-решка, орёл-орёл. Орёл выпадает ровно один раз в двух случаях, поэтому вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз равна 2:4=0,5. <u>Ответ: 0,5.</u>

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу.

Решение. 1:8=0,125 *Ответ. 0,125*

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

- Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для А исходов к числу всех равновозможных исходов: $\mathbf{P}\ (\mathbf{A}) = \frac{m}{n}$
  где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию А.

При решении задач <u>с кубиками</u> число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=6^a$, где α – количество бросков

1. Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика (правильной кости) выпадет нечетное число очков.

2. Определите вероятность того, что при бросании кубика выпало число очков, не большее 3.

3. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, большее 3.

4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. При бросании кубика $6^3 = 216$ различных исходов, благоприятных 14. 14 : 216 = 0,07. <u>Ответ: 0,07.</u>

Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероят ность того, что оно делится на 5.

Противоположные события.

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже 36,8°C равна 0,87. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется 36,8°C или выше.

Ответ. 1-0,87=0,13

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм ве роятность того, что диаметр будет отличаться от за данного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Най дите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или боль ше чем 67,01 мм.

Решение. По условию, диаметр под шипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна 1 − 0,965 = 0,035. Ответ: 0,035.

Несовместные и независимые события.

На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна 0,1. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна 0,6. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найди те вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем

. *Решение. Сум марная вероятность несовместных со бытий равна сумме вероятностей этих событий:*

P=0,6+ 0,1 = 0,7. *Ответ: 0,7.*

Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение. Рассмотрим события A = «учащий ся решит 11 задач» и В = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 10 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих со бытий: P(A + B) = P(A) + P(B). Тогда, исполь зуя данные задачи, получаем: 0,74 = P(A) + 0,67, откуда P(A) = 0,74 − 0,67 = 0,07. <u>Ответ: 0,07.</u>

Вероятность того, что на тесте по химии учащийся П. верно решит больше 8 задач, равна 0,48. Вероятность того, что П. верно решит больше 7 задач, равна 0,54. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 8 задач.

Решение. Вероятность решить несколько задач складывается из суммы вероятностей решить каждую из этих задач. Больше 8: решить 9-ю, 10-ю ... Больше 7: решить 8-ю, 9-ю, 10-ю ...Вероятность решить 8-ю = 0,54-0,48=0,06. Ответ:0.06

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет меньше 4?

Ответ: 4 : 10 = 0,4.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность по падания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. Поскольку биатлонист попа дает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью 1 − 0,8 = 0,2. События попасть или про махнуться при каждом выстреле неза висимы, вероятность произведения не зависимых событий равна произведе нию их вероятностей. Тем самым, ве роятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна 0,8•0,8•0,8•0,2•0,2=0,02048.

Ответ:0.02048.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Найдем вероятность того, что пере горят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведе нию вероятностей этих событий: 0,3·0,3 = 0,09. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следо вательно, его вероятность равна 1 − 0,09 = 0,91. Ответ: 0,91.

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в ко торой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых собы тий (обе батарейки окажутся исправными) равна произве дению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836.
Ответ: 0,8836.

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет чер ными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмей стеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиг рает оба раза.

Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведе ния независимых событий равна произ ведению их вероятностей:
0,52 · 0,3 = 0,156. <u>*Ответ: 0,156.*</u>

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероят ность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение. Вероятность произведения незави симых событий равна произведению вероят ностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$. *Ответ: 0,027.*

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение. Рассмотрим события А = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и В = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие А + В = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: Р(А + В) = Р(А) + Р(В).

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,94 = 0,56 + Р(В), откуда Р(В) = 0,94 − 0,56 = 0,38.

Ответ: 0,38.

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Веро ятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экза мене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. Вероятность суммы двух несовместных со бытий равна сумме вероятностей этих событий:
0,2 + 0,15 = 0,35.

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероят ность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероят ность их произведения равна произведению вероятно стей этих событий: 0,05 · 0,05 = 0,0025.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероят ность равна 1 − 0,0025 = 0,9975. *<u>Ответ: 0,9975.</u>*

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим событиеА = кофе закончит ся в первом автомате, В = кофе закончится во вто ром автомате.
Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе оста нется в первом или втором автомате равна 1 − 0,12 = 0,88. Поскольку
P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B), имеем:
0,88 = 0,7 + 0,7 − x, откуда искомая вероятность x = 0,52. Ответ: 0,9975.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,03 = 0,0135. Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно брако ванное: 0,55 · 0,01 = 0,0055. Поэтому по формуле полной веро ятности вероятность того, что случайно купленное в ма газине стекло окажется бракованным равна 0,0135 + 0,0055 = 0,019. *Ответ: 0,019.*

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый по павшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероят ность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон попадает в муху, если схватит пристрелян ный револьвер и попадет из него, или если схватит непри стрелянный револьвер и попадает из него. По формуле услов ной вероятности, вероятности этих событий равны соот ветственно 0,4·0,9 = 0,36 и 0,6·0,2 = 0,12. Эти события несов местны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: 0,36 + 0,12 = 0,48. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна 1 − 0,48 = 0,52. Ответ. 0,52

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», аби туриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.
Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение. В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6·0,8·0,7 = 0,336, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6·0,8·0,5 = 0,24, вероят ность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммер цию»: 0,6·0,8·0,7·0,5 = 0,168. Успешная сдача экзаменов на «Лингви стику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероят ность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, умень шенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408. Ответ: 0,408.

По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет- магазинов. Вероят ность того, что нужный товар доставят из магази на А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна 1 − 0,9 = 0,1. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна 1 − 0,8 = 0,2. Поскольку эти события не зависимы, вероятность их произведения (оба магазина не доста вят товар) равна произведению вероятностей этих событий: 0,1 · 0,2 = 0,02. Ответ: 0,02.

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из ко манд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найди те вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение. Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начи нает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: 0,5·0,5·0,5 = 0,125. Ответ: 0,125.

Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стре лок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность по пасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите веро ятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Решение. Пусть А — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, В — событие, состоя щее в том, что мишень поражена со второго выстрела. Вероят ность события А равна Р(A) = 0,7. Событие В наступает, если, стреляя первый раз, стрелок промахнулся, а, стреляя второй раз, попал. Это независимые события, их вероятность равна произведению вероятностей этих событий: P(B) = 0,3·0,7 = 0,21. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P (A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91. Ответ: 0,91.Ответ: 0,011

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем: Р(А)=0,9•0.05=0,045; Р(В)= 0,01•0,95=0,0095 ,Р(А+В)=Р(А)(В)=0,045+0,0095=0,0545.

Ответ:0,0545.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероят ность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему кон троля. Вероятность того, что система забракует неисправ ную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: A = батарейка дей ствительно неисправна и забракована справедливо или B = ба тарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовмест ные события, вероятность их суммы равна сумме вероятно стей эти событий. Имеем: P(A+B)=P(A)+P (B)=0,02•0,99+0,98•0,01=0,0198+0,0098=0,0296 Ответ: 0,0296.

Ответ: 0,0296

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда *A* должна сыграть два матча — с командой *B* и с командой *C*. Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда *A*.

Решение. Рассмотрим все возможные исходы жеребьёвки.

· КомандаA в матче в обоих матчах первой владеет мячом.

· КомандаA в матче в обоих матчах не владеет мячом первой.

· КомандаA в матче с командой B владеет мячом первой, а в матче с командой C — второй.

· КомандаA в матче с командой C владеет мячом первой, а в матче с командой B — второй.

Из четырех исходов один является благоприятным, вероятность его наступления равна 1:4=0,25. Ответ: 0,25.

Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».Ответ: 0,0625

Решение. Монету бросают 3 раза.
Для команды «Байкал» возможные исходы в трех бросках {О О О},{Р О О}, {О Р О}, {О О Р}, {Р Р О},{Р О Р}, <u>{О Р Р}</u>,{Р Р Р}. Всего исходов 8, благоприятных1(выпадение орла в первой игре) <u>{О Р Р,</u> 1:8=0,125.<u>Ответ 0,125.</u>