



Понятие производной

11 класс

✦ ✦
Эпиграф:

- **Был этот мир глубокой**





- При чем здесь Ньютон?
- И почему свет?
- На эти и другие вопросы мы сегодня и ответим.



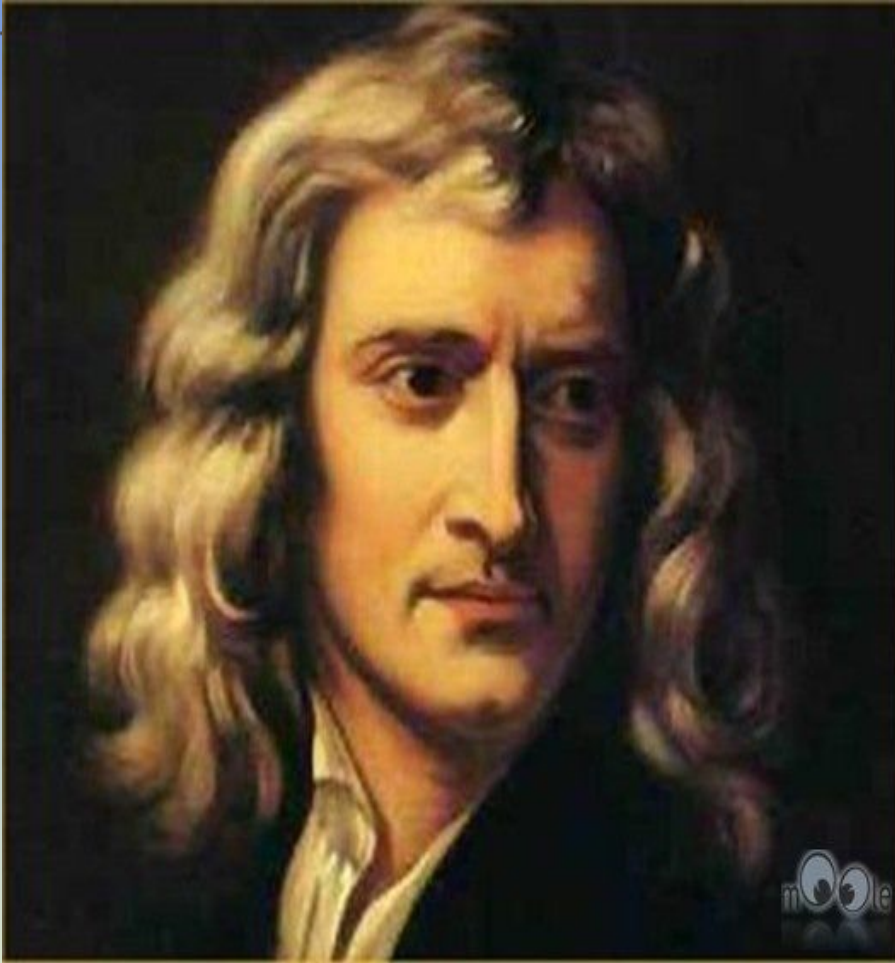
✦ Как это было...

Солнце нещадно палило, обжигая поля, дома и дороги прямыми лучами.

Казалось, все вокруг замерло, оцепенело, подчиняясь жестокой силе солнца.

Не хватало воды. Только в одном Лондоне чума унесла около 100 тысяч человек.

В это тяжелое время, как ни парадоксально, и родилась высшая математика, или, как говорят иногда, анализ бесконечно малых, или еще – дифференциальное и интегральное исчисление.



- Потребовался гений Ньютона, чтобы подвести итог предшествующей работы десятков математиков разных лет и стран, чтобы в виде метода флюксий преподать человечеству дифференциальное и интегральное исчисление.

(флюэнтной Ньютон называл функцию, флюксией – ее производную)



Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым. Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

✦ В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

✦ Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – **дифференциального и интегрального** исчислений.

В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

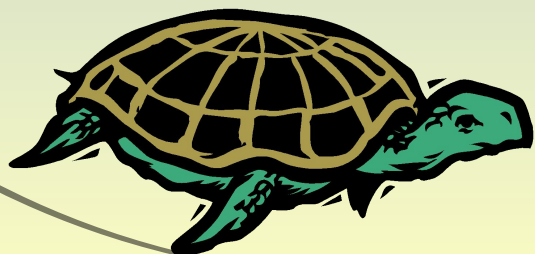
Во второй – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Ньютон пришел к понятию производной, исходя из вопросов механики определения мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения.

*Попробуйте ответить на вопрос:
что такое скорость?*



А мгновенная скорость?



Диалог между водителем-женщиной и полицейским.

(из знаменитых «Фейнмановских лекций по физике»)

-Мадам, Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 км в час.

-Простите, но это невозможно. Как я могла проехать 90 км за час, если я еду всего лишь 7 минут!

объяснить, что такое скорость 90 км/час.

- Я имею в виду, мадам, что если бы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы проехали 90 км.

-Если бы я продолжала ехать, как ехала, еще час, то налетела бы на стенку в конце улицы!.

Именно над этим вопросом задумался Ньютон и...

открыл высшую математику!

Возможно, это было так...

- Пусть точка движется вдоль прямой по закону $S(t)$.

Тогда за промежуток времени t точка проходит расстояние $S(t)$.

Пусть Δt – малый промежуток времени. Путь, пройденный за время $t + \Delta t$, равен $S(t + \Delta t)$.

Тогда средняя скорость

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$



• Очевидно, если $\Delta t \rightarrow 0$, то $V_{\text{ср.}} \rightarrow V_{\text{мгн.}}$

Значит,

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или $v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$,

где Δt – приращение времени

ΔS - приращение пути.

А в это время...



- *Лейбниц Готфрид Вильгельм, немецкий математик, физик, философ.*
- Лейбниц – прямая противоположность И.Ньютону*



Если Ньютон с детства увлекался математикой, то Лейбниц – философией и поэзией.

Если первый все-таки прошел систематический курс обучения, то второй – скорее самоучка.

У Ньютона математика была орудием физики, а у Лейбница – орудием философии и логики.

Ньютон не разбрасывался в науке и творил в основном в области физики и математики,

Лейбниц же – личность разносторонняя, увлекающаяся: он был политиком, историком, юристом, дипломатом, философом и, наконец, математиком.

Один жил в Англии и не выезжал из нее,

Лейбниц – в Германии, но бывал во многих других странах Европы.

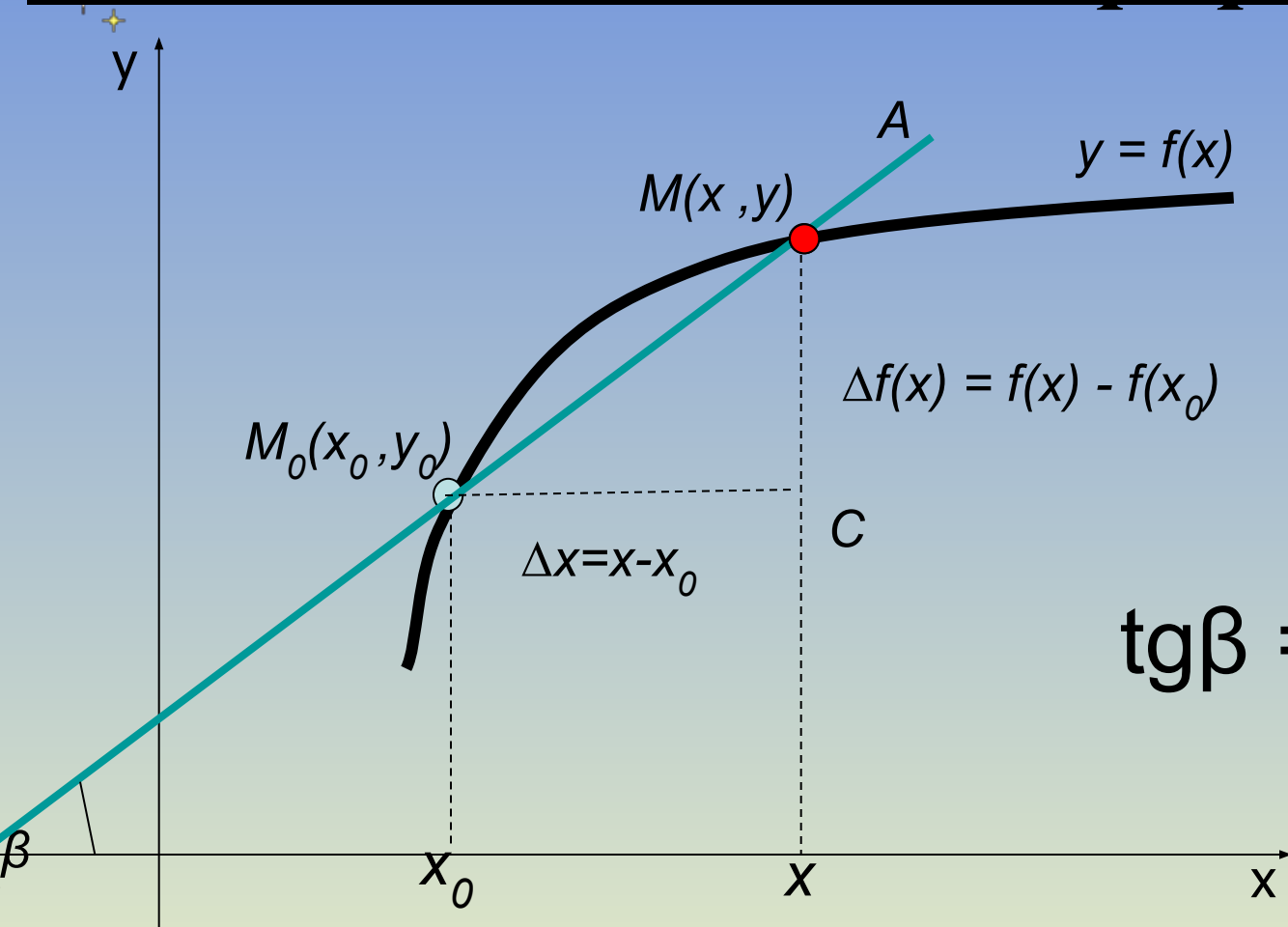


Одновременно, но независимо друг от друга они подошли к открытию анализа бесконечно малых.

Но и тут различия.

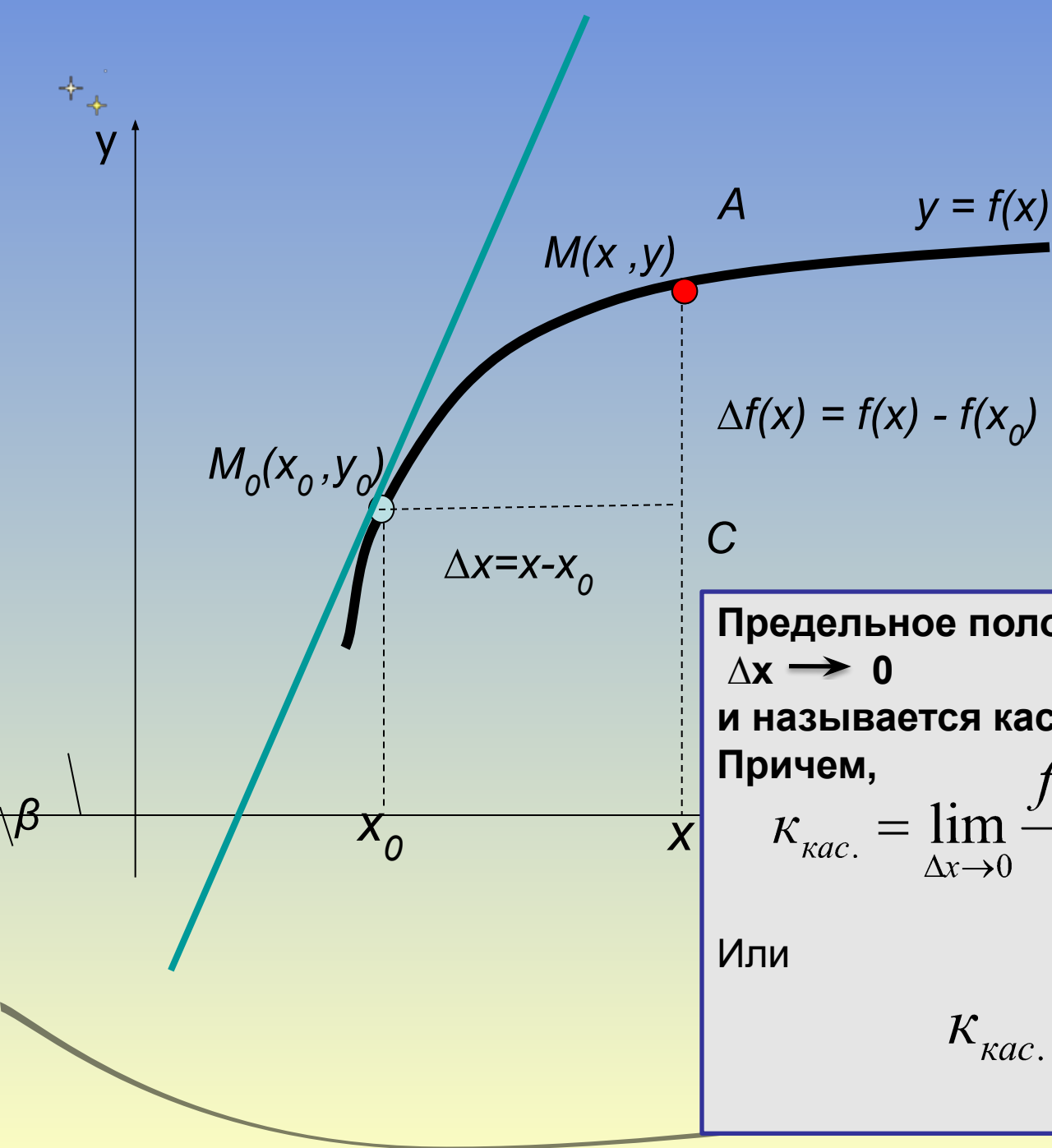
*Первый подошел к открытию через понятие флюксий, решая задачу механики,
а второй – через дифференциал, решая задачу о касательной к кривой.*

Задача о касательной к графику функции



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x \rightarrow x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Предельное положение секущей при $\Delta x \rightarrow 0$ и называется касательной.

Причем,

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Или

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

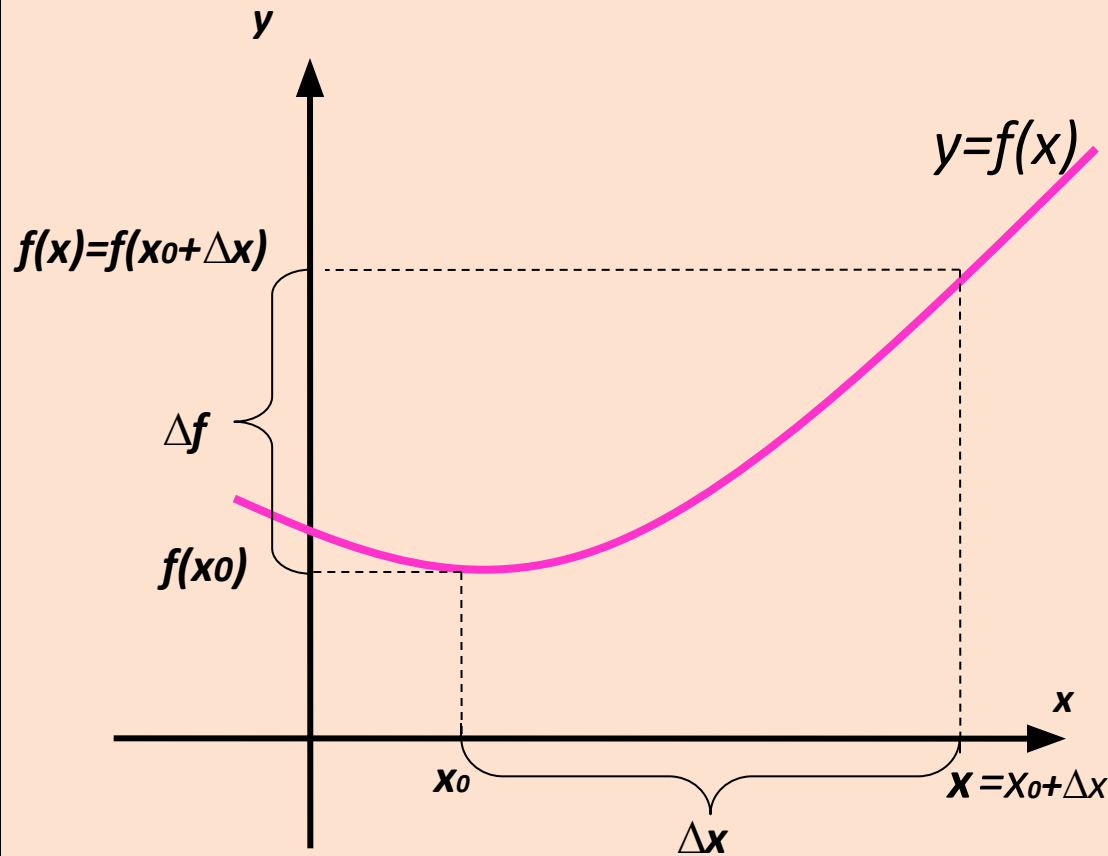
Сравните:

$$v_{\text{МГН.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad K_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

По секрету:

**ЭТО И ЕСТЬ
ПРОИЗВОДНАЯ!**

Приращение функции и приращение аргумента



приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (1)$$

Приращение функции :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \quad (3)$$

Т.е. Дана функция $f(x)$ и

изменность на величину Δx .
Расстояние между точками $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$ на графике функции $y=f(x)$ называется приращением функции и обозначается Δf .
Изменность на величину Δx называется приращением аргумента и равно разности между x и x_0 :

Задача функции $y = f(x)$ на $(a; b)$

Пусть x_0 - некоторое значение аргумента из интер. $(a; b)$

$f(x_0)$ - значение функции в т. x_0 .

Дадим x_0 приращение Δx , получим точку $x = x_0 + \Delta x$ (т.е. $\Delta x = x - x_0$)

Значение функции в этой т.

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Найдем отношение:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Найдем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Это и есть производная

Определение:

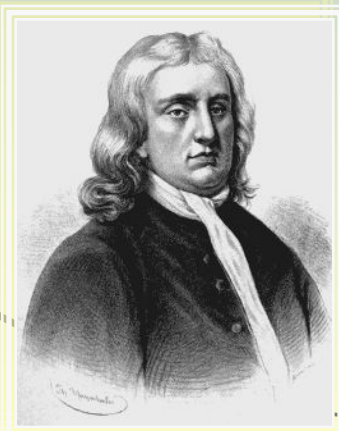
Производной функции $y = f(x)$, заданной на интервале (a, b) , в точке x этого интервала называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Итак,

- **Ньютон, а затем Лейбниц, независимо друг от друга, пришли к открытию дифференциального и интегрального исчислений.**

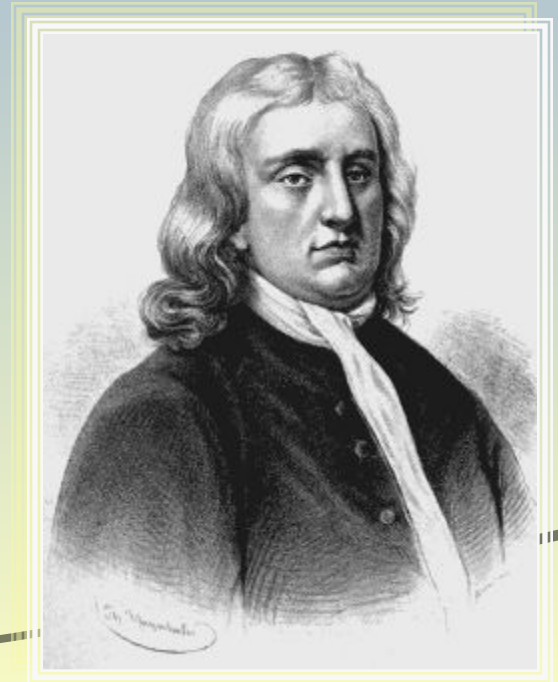




Механический смысл производной:

- Производная пути по времени есть скорость

$$V(t) = S'(t)$$





Геометрический смысл производной:

- **Тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке x_0 , равен значению производной в этой точке.**

$$K_{\text{кас.}} = f'(x_0)$$



Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t .

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt , при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



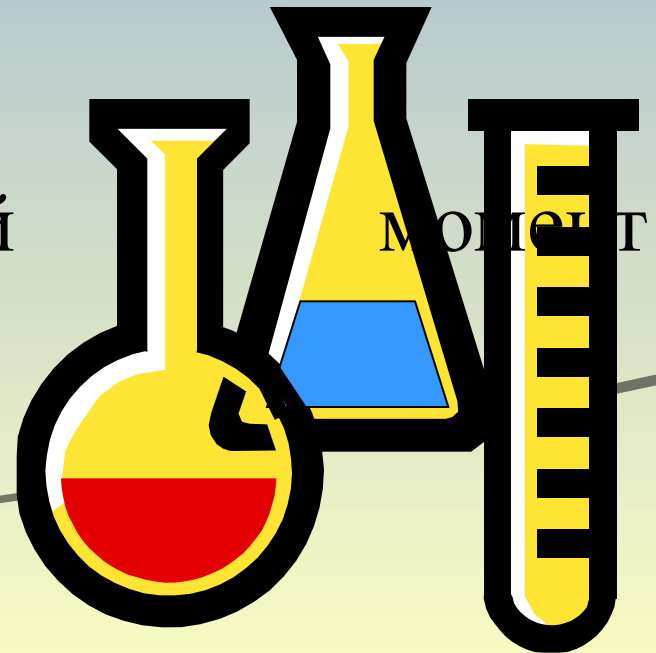
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0; t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону $x = f(t)$) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



А ЭТО ЗНАЧИТ:

«...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...» *Н.И. Лобачевский*

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

А л г о р и т м

$$1) \quad \Delta x = x - x_0$$

$$2) \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Используя определение производной, найти производную функции:

1) $f(x) = 2x + 3;$

2) $f(x) = 5x - 6;$

3) $f(x) = -3x^2 + 2;$

4) $f(x) = 3x^2 + 5x.$