Понятие производной

11 класс

Ковалева Ирина Константиновна

Эпиграф:

- **Был этот мир глубокой**

- Причем здесь Ньютон?
- И почему свет?
- На эти и другие вопросы мы сегодня и ответим.

Ковалева Ирина Константиновна

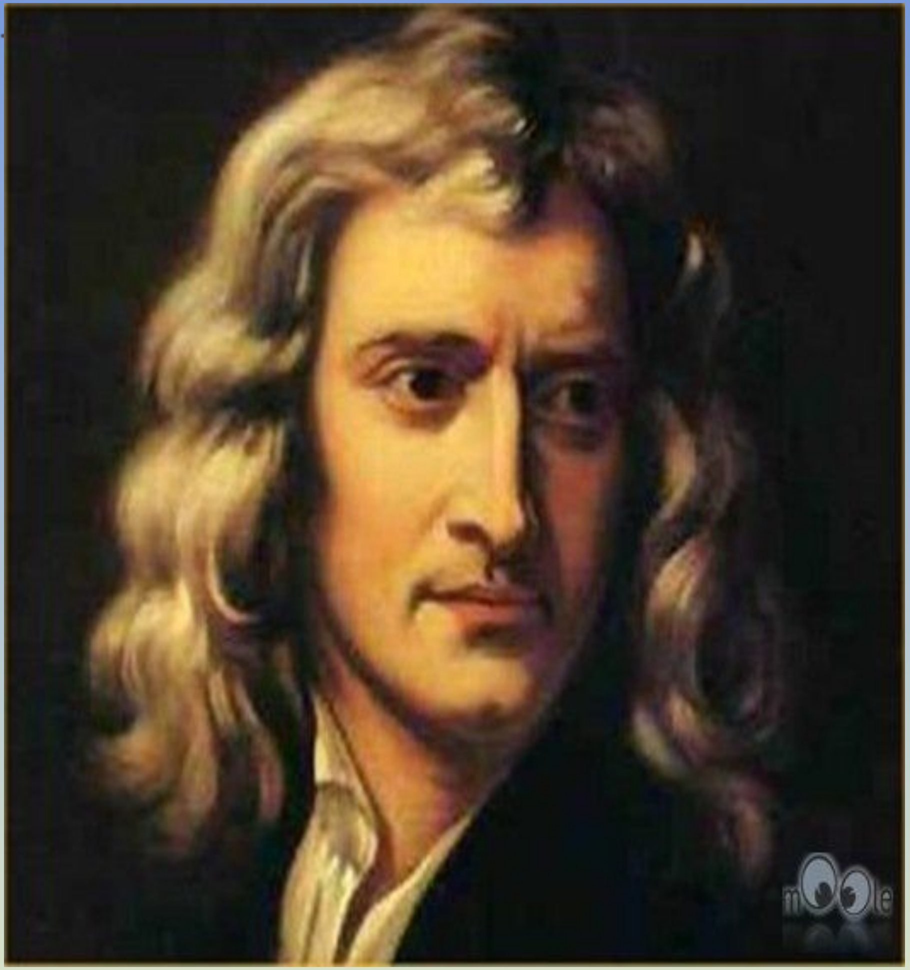
Как это было…

Солнце нещадно палило, обжигая поля, дома и дороги прямыми лучами.

Казалось, все вокруг замерло, оцепенело, подчиняясь жестокой силе солнца.

Не хватало воды. Только в одном Лондоне чума унесла около 100 тысяч человек.

В это тяжелое время , как ни парадоксально, и родилась высшая математика, или, как говорят иногда, анализ бесконечно малых, или еще – дифференциальное и интегральное исчисление.



- **Потребовался гений Ньютона, чтобы подвести итог предшествующей работы десятков математиков разных лет и стран, чтобы в виде метода флюксий преподать человечеству дифференциальное и интегральное исчисление.**

(флюэнтой Ньютон называл функцию, флюксией – ее производную)

Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

- ***В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.***

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

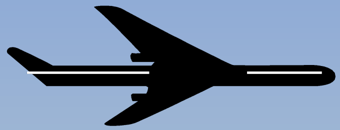
Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – дифференциального и интегрального исчислений.

В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

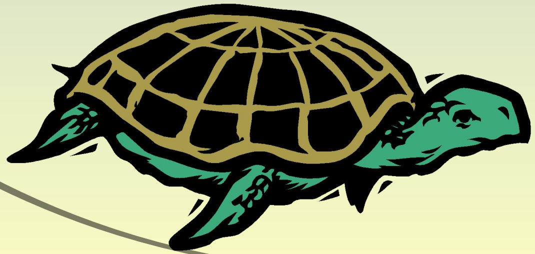
Во второй – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Ньютон пришел к понятию производной , исходя их вопросов механики определения мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения.



Попробуйте ответить на вопрос: что такое скорость?

А мгновенная скорость?



Ковалева Ирина Константиновна

Диалог между водителем-женщиной и полицейским.

(из знаменитых «Фейнмановских лекций по физике»)

-Мадам, Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 км в час.

-Простите, но это невозможно. Как я могла проехать 90 км за час, если я еду всего лишь 7 минут!

- Я имею в виду, мадам, что если бы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы проехали 90 км.

-Если бы я продолжала ехать, как ехала , еще час, то налетела бы на стенку в конце улицы!.

-Ваш спидометр показывает 90 км/час.

-Мой спидометр давно сломан и не работает.

Как видите, полицейский не смог объяснить, что такое скорость 90 км/час. А вы смогли бы?

Именно над этим вопросом задумался Ньютон и… открыл высшую математику.

Возможно, это было так…

- ***Пусть точка движется вдоль прямой по закону S(t).***

Тогда за промежуток времени t точка проходит расстояние S(t).

Пусть Δt – малый промежуток времени. Путь, пройденный за время $t+\Delta t$, равен $S(t+\Delta t)$.

Тогда средняя скорость

$$v_{ср.} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

- **Очевидно, если $\Delta t \longrightarrow 0$, то $V_{ср.} \longrightarrow V_{мгн.}$**

Значит,

$$v_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или $$\boxed{v_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},}$$

где Δt – приращение времени

ΔS - приращение пути.

А в это время…

- *Лейбниц Готфрид Вильгельм, немецкий математик , физик, философ.*

Лейбниц – прямая противоположность И.Ньютону

Если Ньютон с детства увлекался математикой, то Лейбниц – философией и поэзией.

Если первый все-таки прошел систематический курс обучения, то второй – скорее самоучка.

У Ньютона математика была орудием физики, а у Лейбница – орудием философии и логики.

Ньютон не разбрасывался в науке и творил в основном в области физики и математики,

Лейбниц же – личность разносторонняя, увлекающаяся: он был политиком, историком, юристом, дипломатом, философом и, наконец, математиком.

Один жил в Англии и не выезжал из нее,

Лейбниц – в Германии, но бывал во многих других странах Европы.

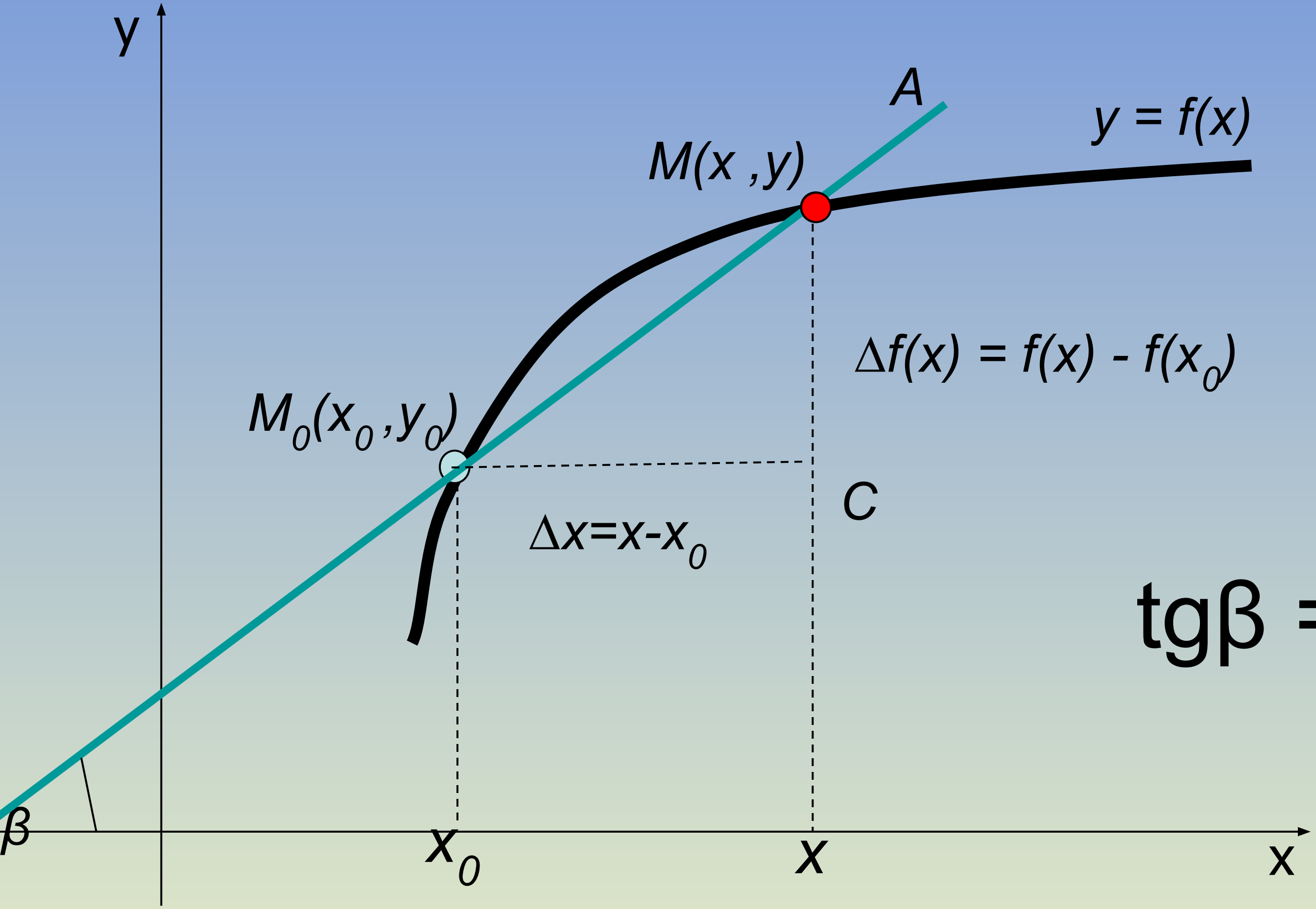
Одновременно, но независимо друг от друга они подошли к открытию анализа бесконечно малых.

Но и тут различия.

Первый подошел к открытию через понятие флюксий, решая задачу механики,

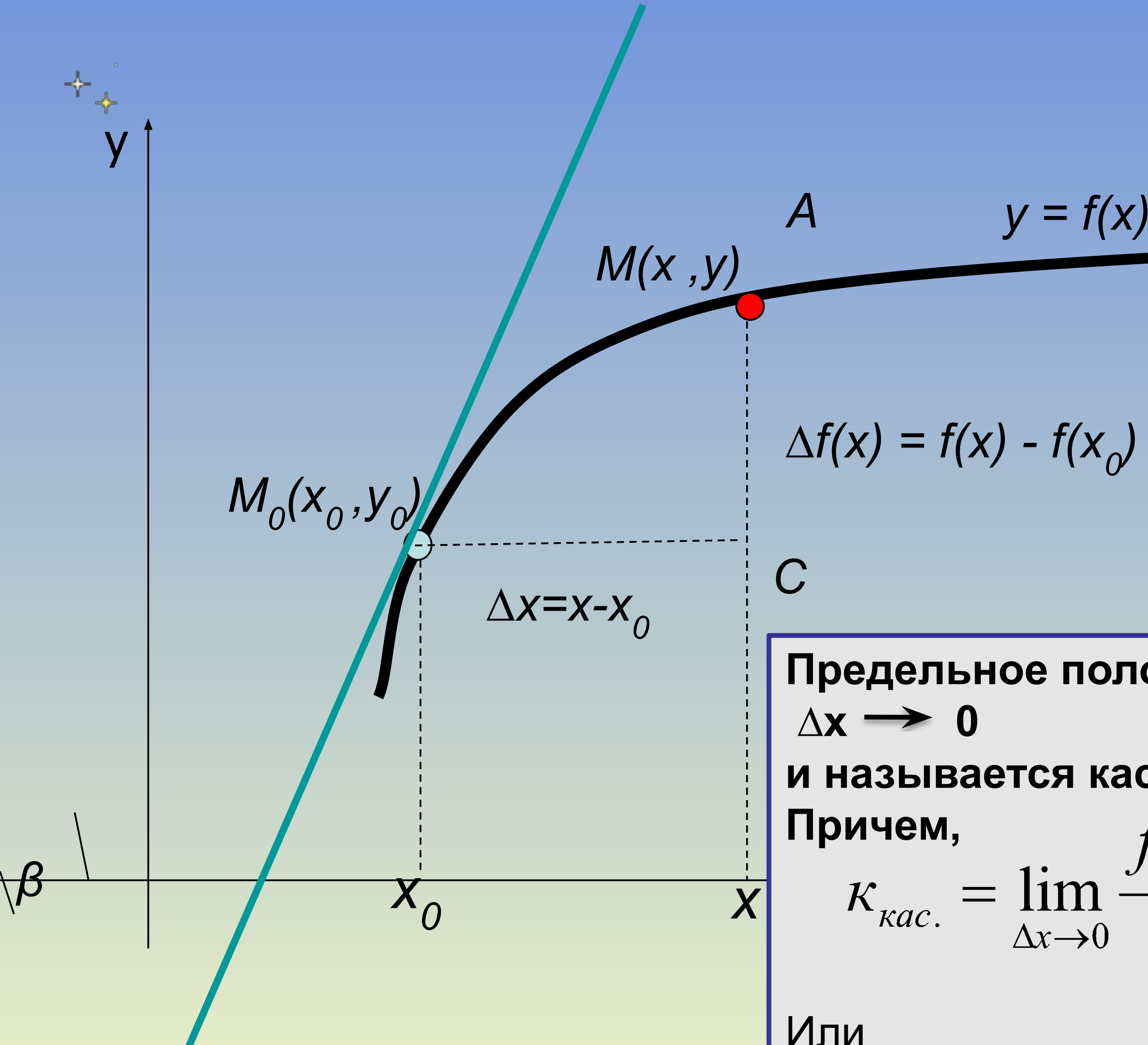
а второй – через дифференциал, решая задачу о касательной к кривой.

Задача о касательной к графику функции



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

При $x \to x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} tg\beta = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



Предельное положение секущей при
$\Delta x \rightarrow 0$
и называется касательной.
Причем,

$$\kappa_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Или

$$\kappa_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

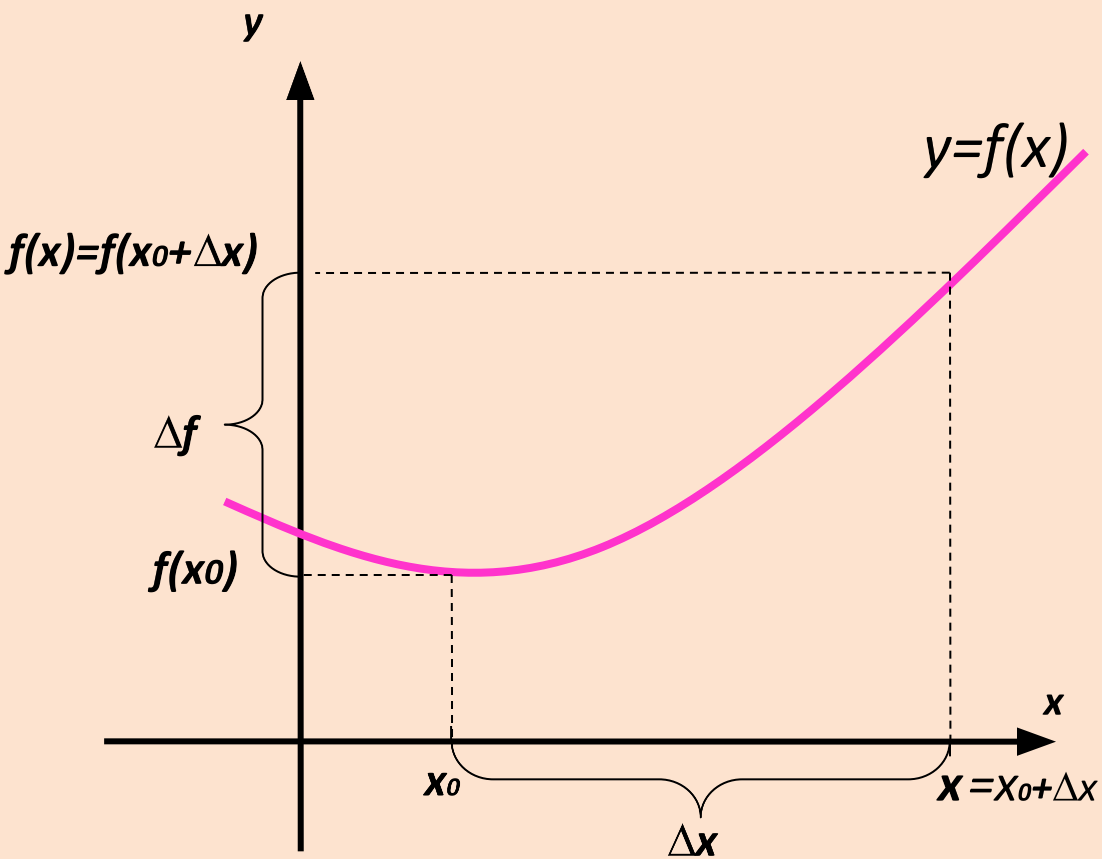
Сравните:

$$v_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \kappa_{кас.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

По секрету:

это и есть производная!

Приращение функции и приращение аргумента



приращение аргумента:

$\Delta x = x - x_0$ *(1)*

Приращение функции :

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *(2)*

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ *(3)*

Расстояние между точками x и x_0 называется приращением аргумента и равно разности между x и x_0:

Задана функция $y = f(x)$ на $(a; b)$

Пусть x_0 – некоторое значение аргумента из инт. $(a; b)$

$f(x_0)$ – значение функции в т. x_0.

Дадим x_0 приращение Δx, получим точку $x = x_0 + \Delta x$ (т.е. $\Delta x = x - x_0$)

Значение функции в этой т.

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Найдем отношение:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Это и есть производная

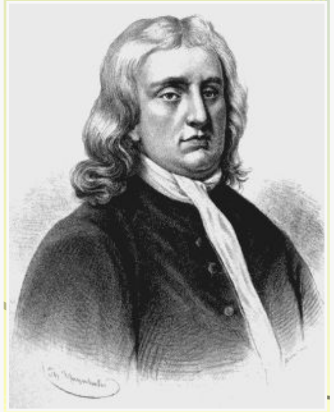
Определение:

Производной функции y= f(x), заданной на интервале (a, b), в точке x этого интервала называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Итак,

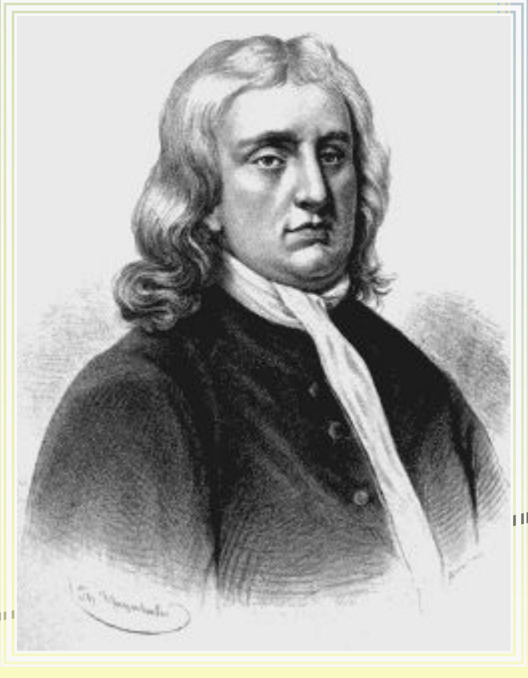
- **Ньютон, а затем Лейбниц, независимо друг от друга, пришли к открытию дифференциального и интегрального исчислений.**



Механический смысл производной:

- **Производная пути по времени есть скорость**

$V(t) = S'(t)$



Геометрический смысл производной:

- **Тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке x_0, равен значению производной в этой точке.**

$$K_{кас.} = f'(x_0)$$

Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t.

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt, при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

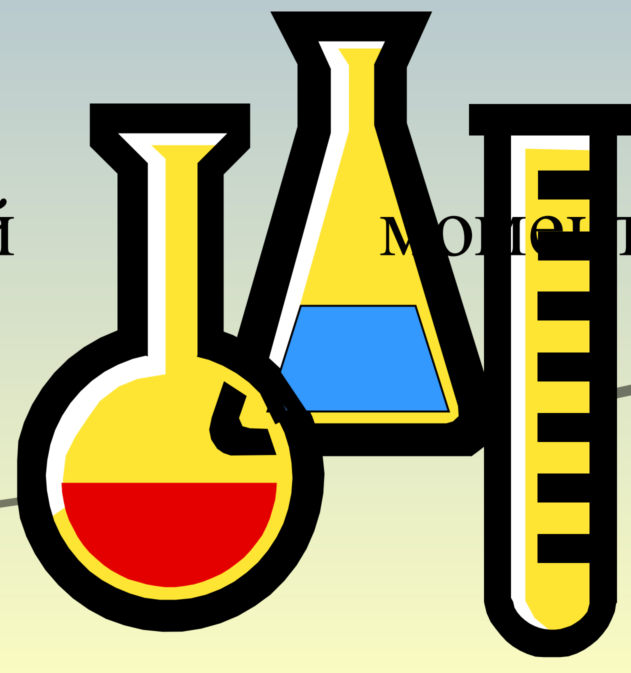
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0;t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону $x = f(t)$) определяется по формуле .

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



А это значит:

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»   Н.И. Лобачевский

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

Алгоритм

1) $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$

3)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

. Используя определение производной, найти производную функции:

1) $f(x) = 2x + 3$; 2) $f(x) = 5x - 6$;

3) $f(x) = -3x^2 + 2$; 4) $f(x) = 3x^2 + 5x$.