Различные способы решения квадратных уравнений

Час науки . Урок с элементами обобщения и исследования в 8 (матем.) классе

Учитель математики СОШ№5 г.Симферополя Проценко Ирина Александровна

Цель урока:

формирование представления о возможности решения квадратных уравнений различными способами.

Проблема:

1. Изменится ли способ решения квадратного уравнения в зависимости от его вида?
2. Можно ли одно и тоже уравнение решить не единственным способом?

Ход урока

1.Орг.момент.Математическая зарядка.

2.Повторение и обобщение изученного материала.

3.Лекция(сообщения учащихся о рассмотренном способе решения с примером применения данного способа).

4.Дом.задание

5.Итог урока , выводы

Математическая зарядка

- *Верный ответ - руки вверх , неверный - руки вперед*

(наклоны вправо – влево и т.д.)

- *Предлагаются задания для устного счета с ответом(верным или неверным).Ученики, обдумывая , «сигналят» об ответе .*

2.Повторение и обобщение изученного материала.

1)Универсальная формула.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D>0$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D=0$

$$X = \frac{-b}{2a}$$

$D<0$

Действ. корней нет

Пример:

$6x^2 + x - 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49,$

$D > 0$, два корня.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{2}$$

2) Формула для четного коэффициента b.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$b = 2m$$

$$D_1 = m^2 - ac$$

$D_1 > 0$	$D_1 = 0$	$D_1 < 0$
$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{D}}{a}$ Действительных	$x = \frac{-m}{a}$	корней нет

Пример: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$D_1 = m^2 - ac = (-2)^2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1,$

$D>0$, два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\ ;\ x_2 = 1$$

(

3) Приведенное квадратное уравнение (Старший коэффициент равен единице).

)² - q

$$x^2 + px + q = 0$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

D>0

D=0

D<0

Действит

ельных

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2}$$

корней нет

Пример:

$x^2 - 14x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8$$

$x_1 = 15$, $x_2 = -1$

4) Теорема Виета.

Чтобы числа x_1 и x_2 являлись корнями уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$$x_1 + x_2 = -b/a \text{ и } x_1 x_2 = c/a$$

Теорема Виета позволяет судить о знаках и абсолютной величине квадратного уравнения, а именно:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Если $b>0$, $c>0$ то оба корня отрицательны.

Если $b<0$, $c>0$ то оба корня положительны.

Если $b>0$, $c<0$ то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного.

Если $b<0$, $c<0$ то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине меньше положительного.

5)Теорема, обратная теореме Виета.

Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0 .$$

Пример: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$ $\qquad$ $x_1 = 3$,

$x_1 \cdot x_2 = 12$ $\qquad$ $x_2 = 4$

6) Разложение левой части уравнения на множители.

- Решим уравнение $x^2 + 10x – 24 = 0$.

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители:
$x^2 + 10x – 24 = x^2 + 12x – 2x – 24 = x (x + 12) – 2 (x +12) = (x + 12)(x – 2)$.
Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x – 2) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то по крайне мере один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. это означает, что числа 2 и – 12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x – 24 =0$.

7) Метод выделения полного квадрата.

- ***Пример***

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$

Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение

$x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2\cdot x\cdot 3.$$

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x, а второе – удвоенное произведение x на 3. поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$$x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2 .$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 3^2. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x + 3)^2 - 16 = 0$, т.е. $(x + 3)^2 = 16$.

Следовательно, $x = 3 = 4$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = - 4$, $x_2 = - 7$.

8). Графическое решение квадратного уравнения

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q .$$

Построим графики зависимостей $y = x^2$ *и* $y = -px - q$.
График первой зависимости – парабола, проходящая через начало координат.
График второй зависимости – прямая.

Возможны следующие случаи: прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка),т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

Пример:.*Решим графически уравнение*

$x^2 - 3x - 4 = 0.$

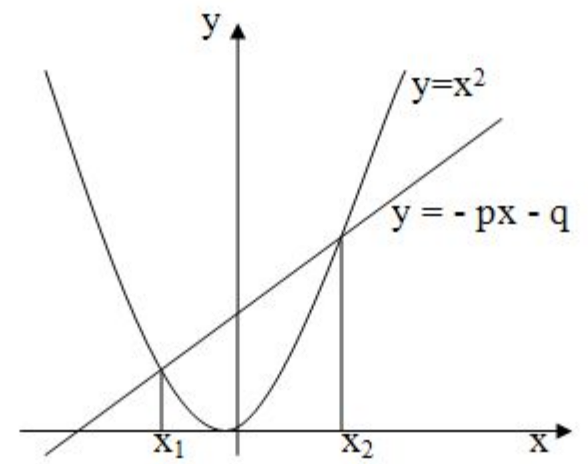
Решение. Запишем уравнение в виде

$x^2 = 3x + 4$

Построим параболу $y = x^2$ *и прямую* $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ *можно построить по двум точкам M (0;4) и N (3;13).*

Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 4$



Новые способы решений квадратных уравнений
9) Решение уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

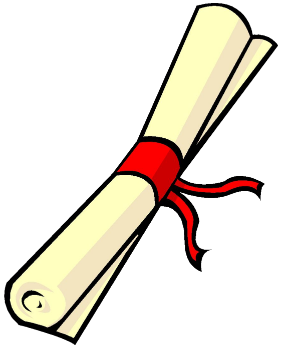
Умножая обе его части на a, получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1 /a$ и $x_2 = y_2 /a$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.



Пример *: Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.*

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 6 \\ y_1 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2.5 \end{array}\right.$$

10). Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то потребуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаем следующий способ нахождения корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

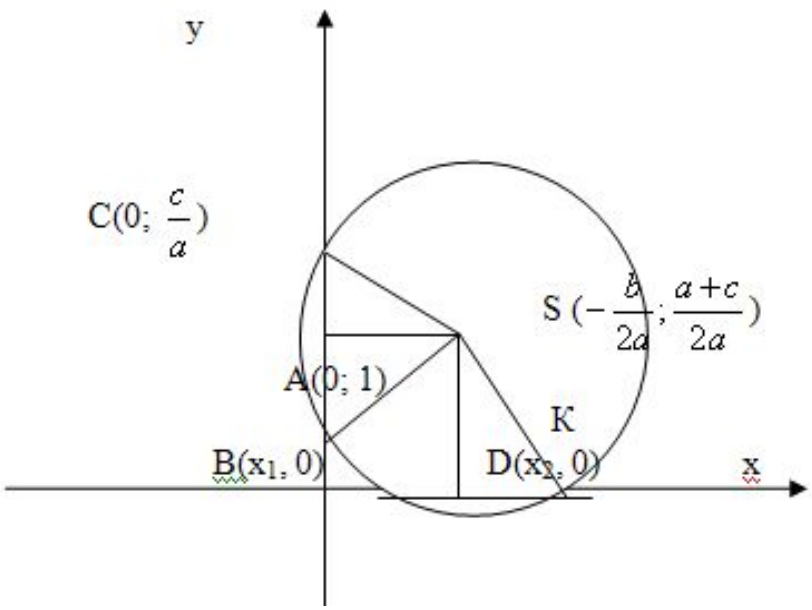
с помощью циркуля и линейки.

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках B (x_1;0) и D (x_2;0), где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки A (0;1) и C (0;) на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем OB·OD = OA · OC, откуда

$$OC = (OB \cdot OD) : OA = (x_1 \cdot x_2) : 1 = c/a$$

Пример:

1) построим точки $S(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a})$ (центр окружности) и $A\ (0;1)$;
2) проведем окружность с радиусом SA;
3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями квадратного уравнения.



2. Решим уравнение

$x^2 - 5x + 4 = 0.$

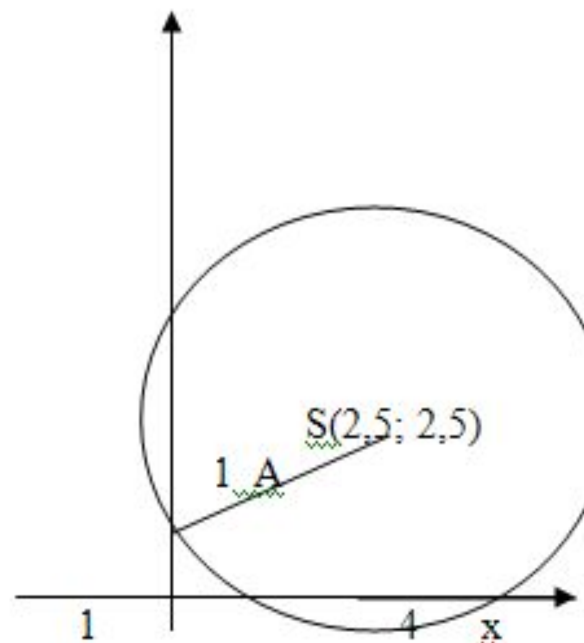
Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = 2,5,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+4}{2 \cdot 1} = 2,5.$$

Проведем окружность радиуса *A*, где *A* (0;1).

y



Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в зависимости от соотношения между коэффициентами a,b,c.

- **1) Если $a+b+c=0$, то $x_1 = 1$,**
- **$x_2 = c/a$.**
-
- ***Пример***: $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- $2+3-5=0$, *значит*
- $x_1 = 1$; $x_2 = -5/2$

2) Если $a - b - c = 0$, то $x_1 = -1$; $x_2 = -c/a$.

- ***Пример***: $2x^2 + 3x - 1=0$
- $2-3+1=0$, значит
- $x_1 = -1$; $x_2 = 1/2$

3) Если $a = c = n$, $b = n^2 + 1$, т. е. $nx^2 + (n^2+1)x + n = 0$, то $x_1 = -n$; $x_2 = -1/n$

- ***Пример***: $2x^2 + 5x + 2 = 0$
- $5 = 2^2 + 1$, $n = 2$
- $x_1 = -2$; $x_2 = -1/2$
-

$4)$ Если $a = c = n$, $b = -(n^2+1)$, т. е. $nx^2 - (n^2+1)x+n=0$, то
$x_1 = n$; $x_2 = 1/n$

- **Пример**: $3x^2 - 10x + 3=0$
- $3x^2-(3^2+1)x+3=0$
- $x_1 = 3$; $x_2 = 1/3$

5) Если $ax^2 + (a^2-1)x - a = 0$, то $x = -a$; $x = 1/a$

- **Пример**: $5x^2 + (5^2-1)x - 5 = 0$
- $x = -5$, $x = 1/5$

6) Если $ax^2 - (a^2-1)x - a = 0$, то $x=a$, $x = -1/a$

- ***Пример***: $5x^2 – (5^2-1)x – 5 = 0$
- $x=5$, $x = -1/5$

Дом.задание:

Используя 1-6 способы решения кв.уравнений в зависимости от соотношений между коэффициентами ,составить уравнения и решить их.

Вывод: *все рассмотренные способы решения квадратных уравнений могут быть использованы при решении квадратных уравнений .*

Спасибо за урок!

Успехов всем!