Равносильность неравенств.
Квадратные неравенства

Выражение, в котором два числа или две функции соединены знаком $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ называются **неравенствами**.

Неравенства, содержащие только числа, называются **числовыми неравенствами**.

Знаки $>$, $<$ называются знаками строгих неравенств.

Также используются знаки нестрогих неравенств: $\geq$, $\leq$.

Решить неравенство – это значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называются равносильными

Преобразования, сохраняющие равносильность неравенств:

- **Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знака неравенства.**

- **Обе части неравенства можно разделить или умножить на одно и то же положительное число (знак неравенства останется тем же).**

- **Обе части неравенства можно разделить или умножить на одно и то же отрицательное число, но при этом <u>знак неравенства нужно изменить</u> на противоположный.**

Линейным неравенством с одним неизвестным называется неравенство вида

$ax + b > 0$ или $ax + b < 0$,

где a и b – действительные числа и $a \neq 0$.

Пусть $f(x)=ax2+bx+c$, где a,b,c- заданные числа, причем $a\neq 0$, x- неизвестное. Тогда неравенства вида $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)\geq 0$ называют **квадратными неравенствами** или неравенствами второй степени, причем первые два из этих неравенств называют *строгими*, другие - *нестрогими*

Квадратным уравнением относительно Х называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0.$$

Квадратное уравнение может иметь один, два, или не иметь вещественных корней.
Наличие корней определяется с помощью дискриминанта квадратного уравнения

$$D=b^2-4ac.$$

Если D>0, то уравнение имеет два различных корня.
Если D=0, то уравнение имеет один корень.
Если D<0, то уравнение не имеет корней.
Находят корни (в случае их наличия) с помощью формулы корней квадратного уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2\div 4ac}}{2a}$$

Если $D=b^2-4ac<0$, то решениями неравенства $ax^2+bx+c>0$, при $a>0$ являются все действительные числа, а неравенство $ax^2+bx+c<0$, при $a>0$ не имеет решений;

Если $D=0$, то решениями неравенства $ax^2+bx+c>0$, являются все действительные значения **x**, кроме $x=-\frac{b}{2a}$

а неравенство $ax^2+bx+c<0$, не имеет решений;

Если $D>0$, то решениями неравенства $ax^2+bx+c>0$ при $a>0$ являются все числа **x** такие, что $x<x_1$ или $x>x_2$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, т. е все значения **x**, лежащие вне отрезка $[x_1, x_2]$.

Решениями неравенства $ax^2+bx+c<0$ являются числа **x** такие, что

$x_1<x<x_2$,

т.е. все значения **x** из интервала (x_1, x_2).

Метод рассмотрения квадратичной функции

1) Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^2 – 5x - 50$ и найдем такие значения x, для которых $f(x) < 0$.

2) Графиком рассматриваемой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1$, $1 > 0$.

3) Найдем нули функции (то есть абсциссы точек пересечения параболы с осью Ох), для этого решим квадратное уравнение

$x^2 – 5x – 50 = 0$.

$x^2 – 5x – 50 = 0, \quad a = 1, \quad b = -5, \quad c = -50.$

$D = b^2 – 4ac;$

$D = (-5)^2 – 4*1*(-50) = 25 + 200 = 225 = 15^2, \quad 225 > 0$, значит уравнение имеет два действительных корня.

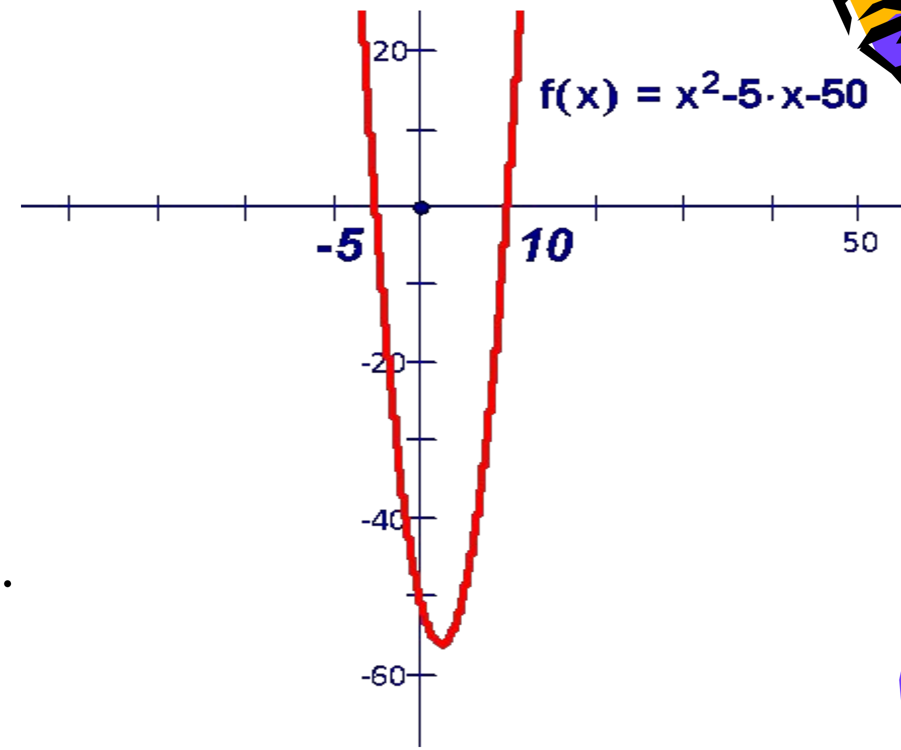
$$x_1 = (-(-5) – 15) : 2 = -5;$$

$$x_2 = (-(-5) + 15) : 2 = 10.$$

Нули функции: $x = -5$ и $x = 10$.

4) Изобразим схематично параболу $f(x) = x^2 - 5x - 50$ в координатной плоскости ***Oxy.***

5) Из рисунка видим, что
$f(x) < 0$, при $-5 < x < 10$
(то есть берем в рассмотрение ту часть параболы, которая лежит ниже оси ***Ox***).



Замечание: ответ записываем в виде числового промежутка.

Ответ: ***(-5; 10).***

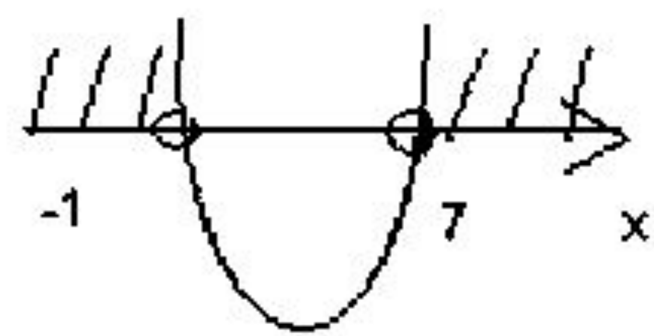
Тест

Данный тест поможет правильно оценить Ваши знания. При выполнении задания Вам необходимо выбрать правильный вариант ответа.

Желаю успеха!

1. Верно ли изображено решение квадратного неравенства (корни квадратного трехчлена найдены верно) .

$$x^2 – 6x – 70 \geq 0$$

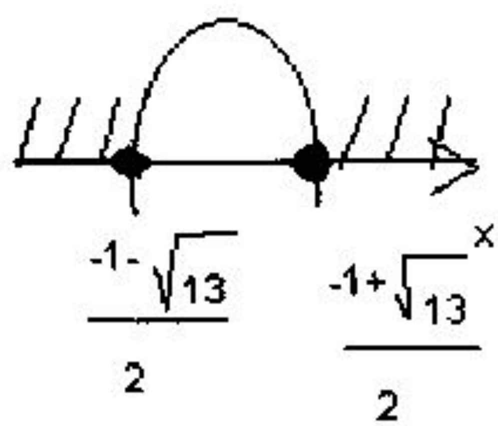


Да.

Нет.

2. Верно ли изображено решение квадратного неравенства (корни квадратного трехчлена найдены верно) .

$$3-x^2\leq x$$

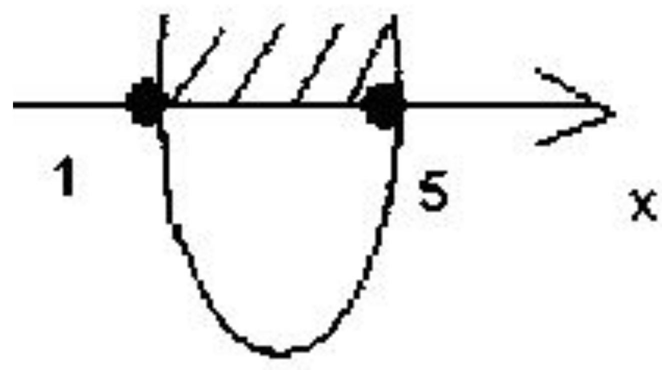


Да.

Нет.

3. Верно ли изображено решение квадратного неравенства (корни квадратного трехчлена найдены верно) .

$$-x^2+6x-5<0$$

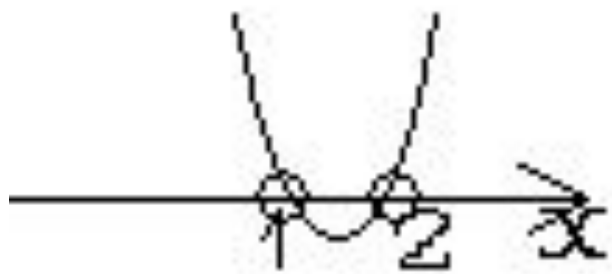


Да.

Нет.

4. Верно ли изображено решение квадратного неравенства (корни квадратного трехчлена найдены верно) .

$$x^2-3x+2\leq 0$$

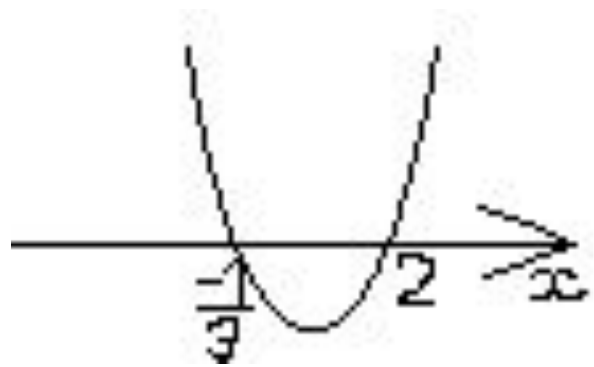


Да.

Нет.

5. Верно ли изображено решение квадратного неравенства (корни квадратного трехчлена найдены верно) .

$3x^2-5x-2>0$



Да.

Нет.