ПРОГРЕССИИ

Республика Крым
Ученицы 9 класса
МБОУ «Дачновская СОШ»
Городского округа Судак
Нураис Надежды
Учитель математики Демченко О.В

Виды прогрессий

Арифметическая прогрессия, последовательность чисел (a_1, a_2, ..., a_n),из которых каждое следующее получается из предыдущего прибавлением постоянного числа.

Геометрическая прогрессия, последовательность чисел (a_1, a_2,¼, a_n¼),из которых каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число *q*

Формулы

	Прогрессии	
	Арифметическая	Геометрическая
	$\div\ a$	$\div\div\ b$
Определение	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n g$
Формула n первых членов прогрессии	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 g^{n-1}$
Сумма n первых членов прогрессии	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \bullet n$	$S_n = \frac{b_1(g^n - 1)}{g-1}$
Свойства	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n+1} b_{n-1}}$

Прогрессии древности

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деления наследства и др.

НАЗАД, В ИСТОРИЮ!

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функциях.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий **АРХИМЕД** (ок. 287–212 гг. до н.э)

Термин "прогрессия" был введен римским автором Боэцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия "арифметическая" и "геометрическая" были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида "Начала" (3 век до н.э.).

Правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в 1202г. (Леонардо Пизанский)

Германия

КАРЛ ГАУСС
(1777 – 1855)

Нашел моментально сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, будучи еще учеником начальной школы.

Решение

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$

Древняя Греция

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2+4+6+......+2n=n(n+1)$$

Древний Египет

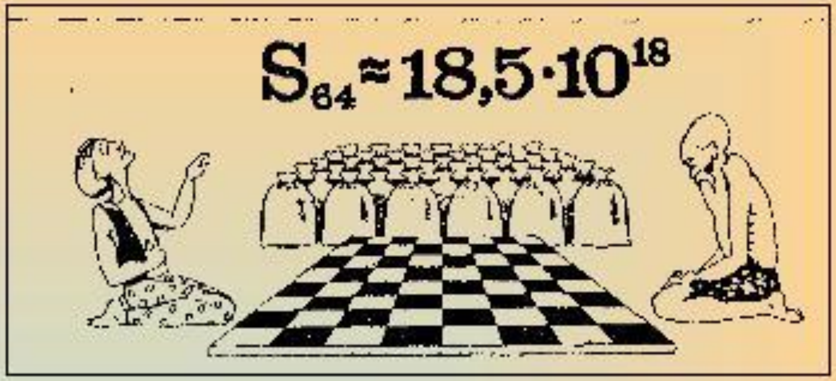
Задача из египетского папируса Ахмеса:

«Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками, разность же между каждым человеком и его соседом равна $\frac{1}{8}$ меры»

Формула, которой пользовались египтяне:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1) \bullet \frac{d}{2} \left(S = \frac{a+b}{2} \bullet n \right)$$

Задача-легенда



Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Обрадованный царь посмеялся над Сетой и приказал выдать ему такую «скромную» награду. Стоит ли царю смеяться?

Решение задачи - легенды

Дано $\boxed{\div\div}$; 1, 2, 4, 8, 16…

$b_1 = 1, \quad g = 2,$ n = 64

$$S_{64} - ?$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

Сумма равна **18 446 744 073 709 551 615**

Задача из арифметики Магницкого

Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, обретя лошадь, раздумал и возвратил продавцу, говоря: «Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: "Если по-твоему цена лошади высока, то купи ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне 1/4 коп., за второй-1/2коп., за третий-1коп., и т.д.“
Покупатель, соблазненный низкой ценой, и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

Решение задачи из арифметики Магницкого

1. Составим последовательность чисел $\frac{1}{4}; \ \frac{1}{2}; \ 1; \ 2; 2^2 ; \ldots 2^{21}.$

2. Данная последовательность является геометрической

прогрессией со знаменателем $q=2$, $b_1 = \frac{1}{4}$ n = 24.

3. Попытаемся подсчитать сумму $\frac{1}{4}; \ \frac{1}{2}; \ 1; \ 2; 2^2 ; \ldots 2^{21}.$

4. Зная формулу $S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}$

5. Имеем $S_{24} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4}}{2-1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303\frac{3}{4} \approx 42000(p)$

Интересные факты
1) Химия. При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.
2) Геометрия. Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.
3) Физика. И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.
4) Биология. Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.
5)Экономика. Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии.

Вывод

Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Спасибо за внимание.