

# ПРОГРЕССИИ

Республика Крым  
Ученицы 9 класса  
МБОУ «Дачновская СОШ»  
Городского округа Судак  
Нураис Надежды  
Учитель математики Демченко О.В



# Виды прогрессий

**Арифметическая прогрессия**, последовательность чисел  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , из которых каждое следующее получается из предыдущего прибавлением постоянного числа.

**Геометрическая прогрессия**, последовательность чисел  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , из которых каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число  $q$



# Формулы

## Прогрессии

Арифметическая

$$\frac{\bullet}{\bullet} a$$

Геометрическая

$$\frac{\bullet \bullet}{\bullet \bullet} b$$

Определение

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$b_{n+1} = b_n g$$

Формула n первых членов прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$b_n = b_1 g^{n-1}$$

Сумма n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_1(g^n - 1)}{g - 1}$$

Свойства

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n+1} b_{n-1}}$$



# Прогрессии древности

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деления наследства и др.





# НАЗАД, В ИСТОРИЮ!

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функциях.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий **АРХИМЕД** (ок. 287–212 гг. до н.э)



Термин “прогрессия” был введен римским автором Бозцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия “арифметическая” и “геометрическая” были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.



Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида “Начала” (3 век до н.э.).



Правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в 1202г. (Леонардо Пизанский)



# Германия



**КАРЛ ГАУСС**  
**(1777 – 1855)**

Нашел моментально сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, будучи еще учеником начальной школы.

Решение

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$$



# Древняя Греция



*Aristotele*

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

# Древний Египет



Задача из египетского папируса  
Ахмеса:

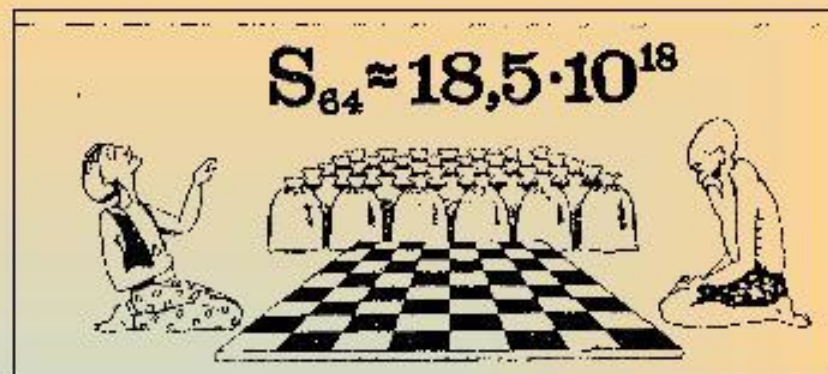
«Пусть тебе сказано: раздели  
10 мер ячменя между 10  
человеками, разность же между  
каждым человеком и его  
соседом равна  $\frac{1}{8}$  меры»

Формула, которой  
пользовались  
египтяне:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1) \cdot \frac{d}{2} \left( S = \frac{a+b}{2} \cdot n \right)$$



# Задача-легенда



Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Обрадованный царь посмеялся над Сетой и приказал выдать ему такую «скромную» награду. Стоит ли царю смеяться?

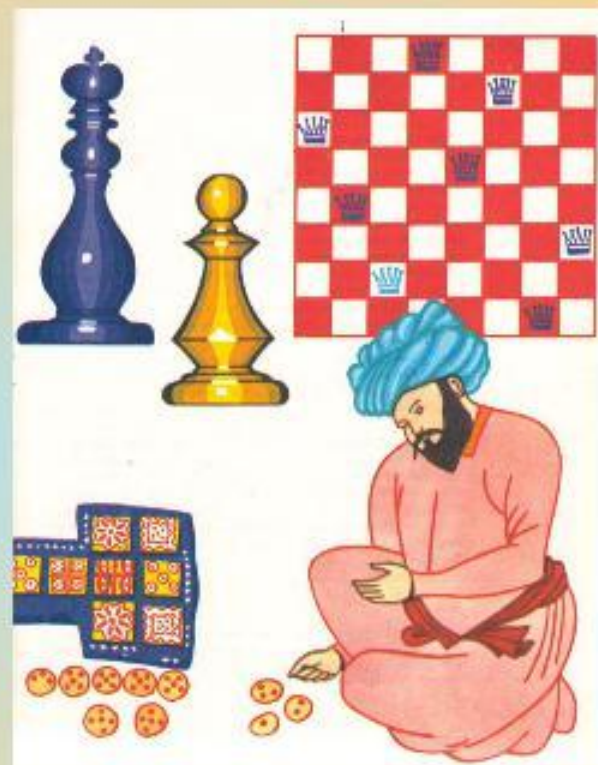
# Решение задачи - легенды

Дано  $\frac{**}{**}$  ; 1, 2, 4, 8, 16...

$$b_1 = 1, \quad g = 2, \quad n = 64$$

$$S_{64} = ?$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$



Сумма равна

**18 446 744 073 709 551 615**



# Задача из арифметики Магницкого

Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, обретя лошадь, раздумал и возвратил продавцу, говоря: «Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: «Если по-твоему цена лошади высока, то купи ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне  $\frac{1}{4}$  коп., за второй- $\frac{1}{2}$  коп., за третий-1 коп., и т.д.» Покупатель, соблазненный низкой ценой, и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.





# Решение задачи из арифметики Магницкого

1. Составим последовательность чисел  $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 2^2; \dots; 2^{21}$ .

2. Данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем  $q=2$ ,  $b_1 = \frac{1}{4}$   $n = 24$ .

3. Попробуем подсчитать сумму  $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 2^2; \dots; 2^{21}$ .

4. Зная формулу 
$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}$$

5. Имеем 
$$S_{24} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4}}{2 - 1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{24} - \frac{1}{4} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4} \approx 42000(p)$$

## **Интересные факты**

- 1) Химия.** При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.
- 2) Геометрия.** Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.
- 3) Физика.** И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.
- 4) Биология.** Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.
- 5) Экономика.** Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии.



# Вывод



Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.



Спасибо за внимание.

