

Способы решения квадратных уравнений

«Уравнение представляет собой
наиболее серьёзную и важную вещь
в математике».

Лодж О.



Цель: Знакомство с различными способами решения квадратных уравнений.

Задачи:

- Познакомиться с устными способами решения квадратных уравнений.
- Рассмотреть нестандартные способы решения квадратных уравнений.
- Расширить кругозор учащихся.
- Повысить интерес к истории математики, к предмету.



Какое уравнение называют квадратным?

- Квадратным уравнением называют алгебраическое уравнение второй степени вида

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

где x – переменная,
 a, b, c - действительные числа.



Виды квадратных уравнений

Неполные квадратные уравнения.

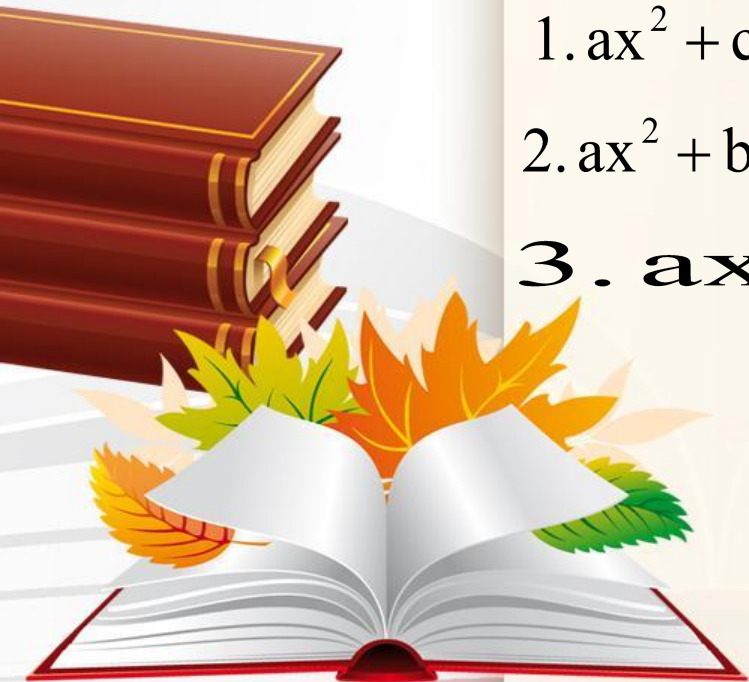
Неполным квадратным уравнением называют квадратное уравнение, в котором коэффициент b или свободный член c равен нулю.

Виды неполных квадратных уравнений:

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

3. $ax^2 = 0$.



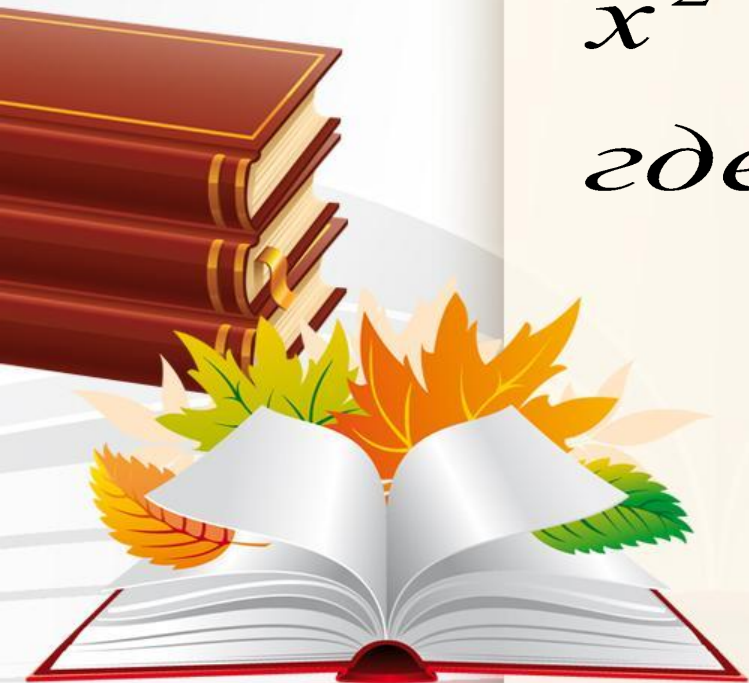
Виды квадратных уравнений

Приведенные квадратные уравнения.

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

где $a = 1$.

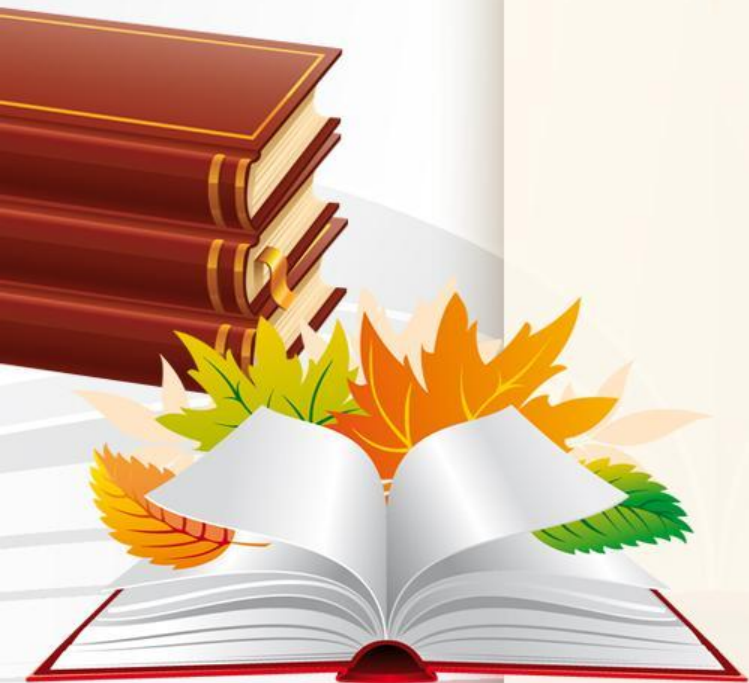
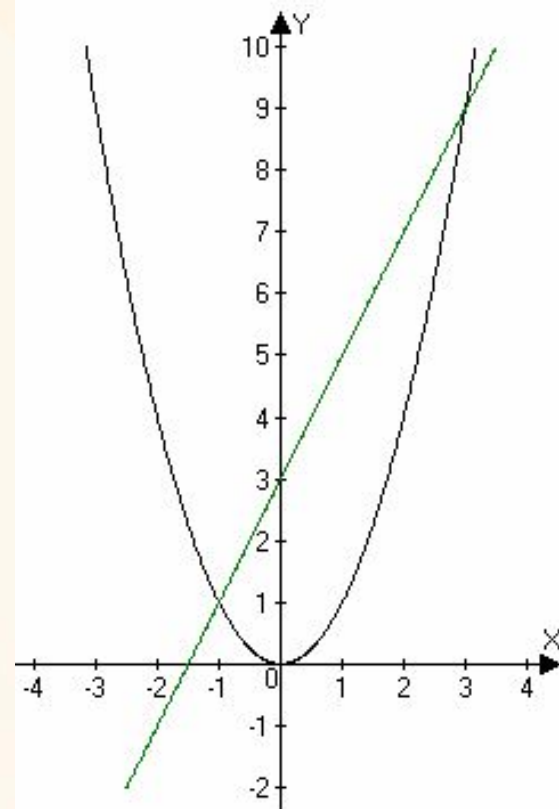






Графический способ

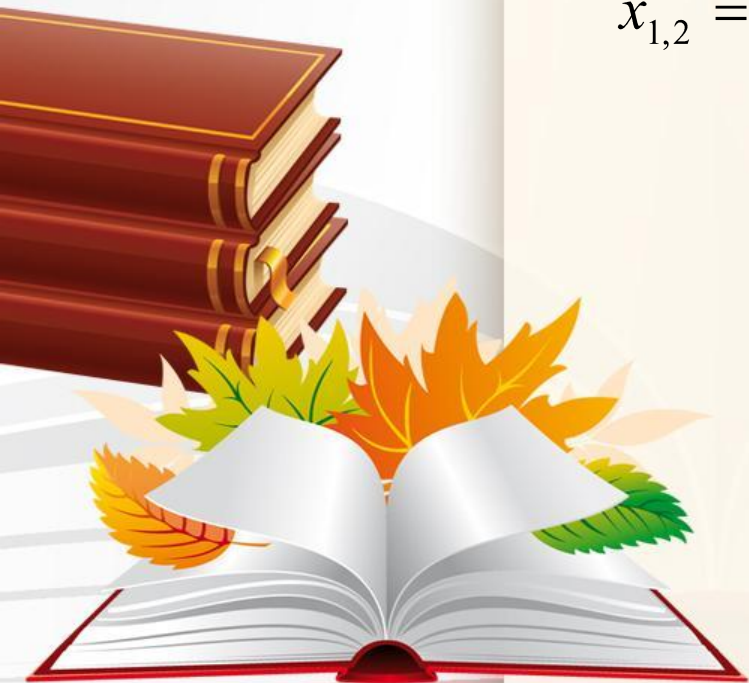
$$ax^2 + bx + c = 0$$



Решение квадратных уравнений по формулам

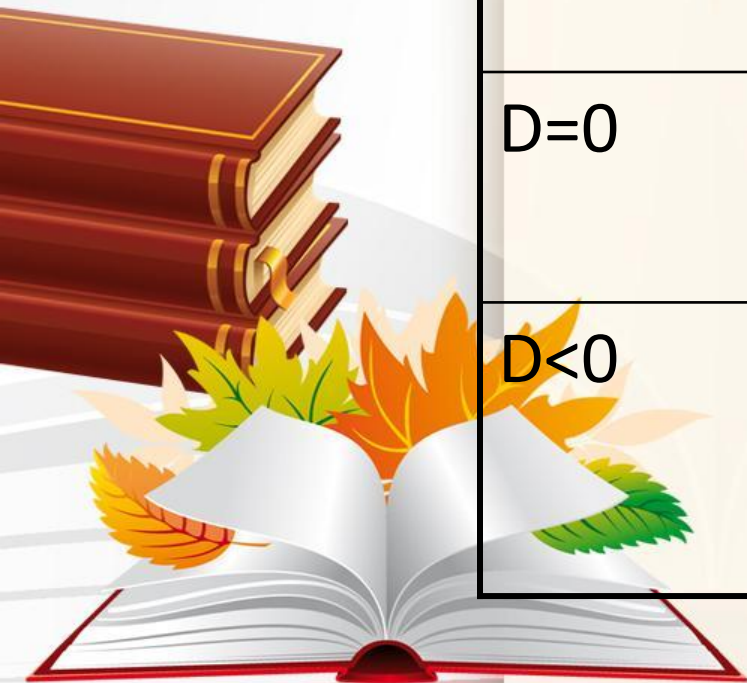
- Корни квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Зависимость количества корней от знака дискриминанта

Знак дискриминанта	Количество корней
$D > 0$	Два различных действительных корня.
$D = 0$	Два действительных равных корня (один действительный двукратный корень).
$D < 0$	Нет действительных корней



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

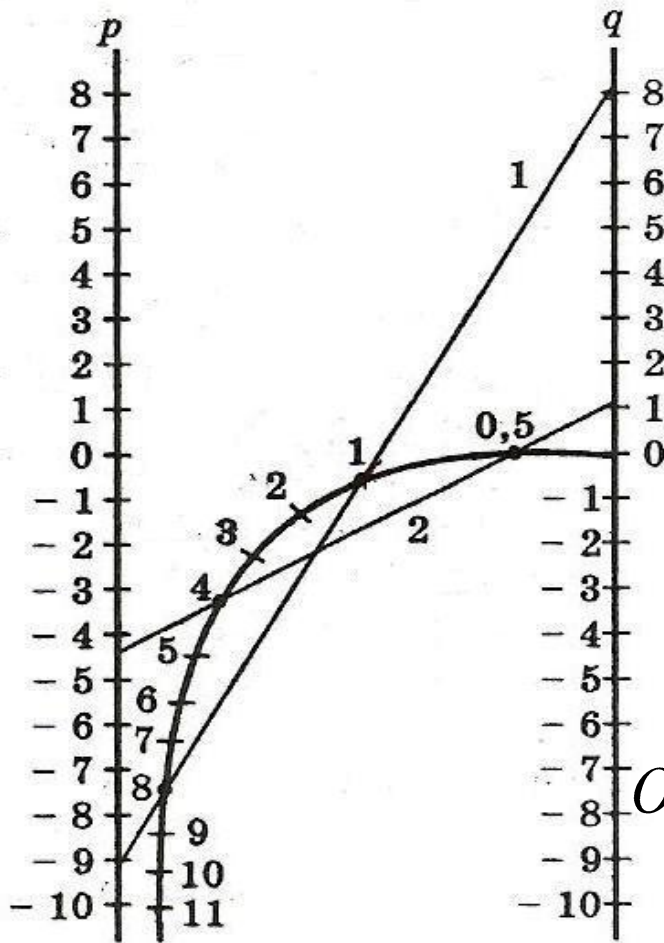
Номограмма- графическое представление функции от нескольких переменных, позволяющее с помощью простых геометрических операций (например, прикладывание линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений.

С помощью номограммы можно решить только приведенные уравнения, общая формула таких уравнений:

$$x^2+px+q=0$$



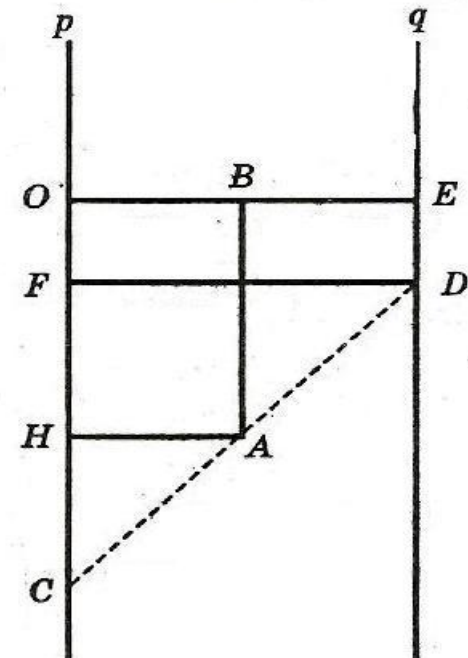
Метод номограммы



Криволинейная шкала номограммы строится формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}$$

$$1.OC=p, ED=q,$$

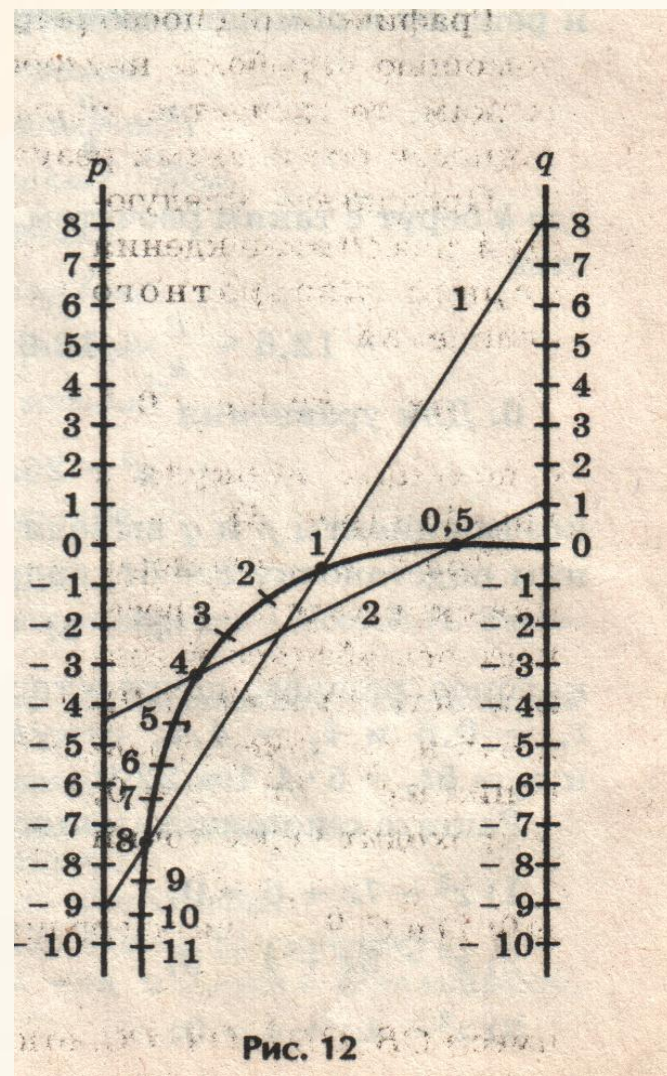


Решим уравнение: $x^2 - 9x + 8 = 0$
с помощью номограммы.

Для этого уравнения номограмма
дает корни

$$x_1 = 8, 0 \text{ и } x_2 = 1, 0$$

Ответ: $x_1 = 8; x_2 = 1$



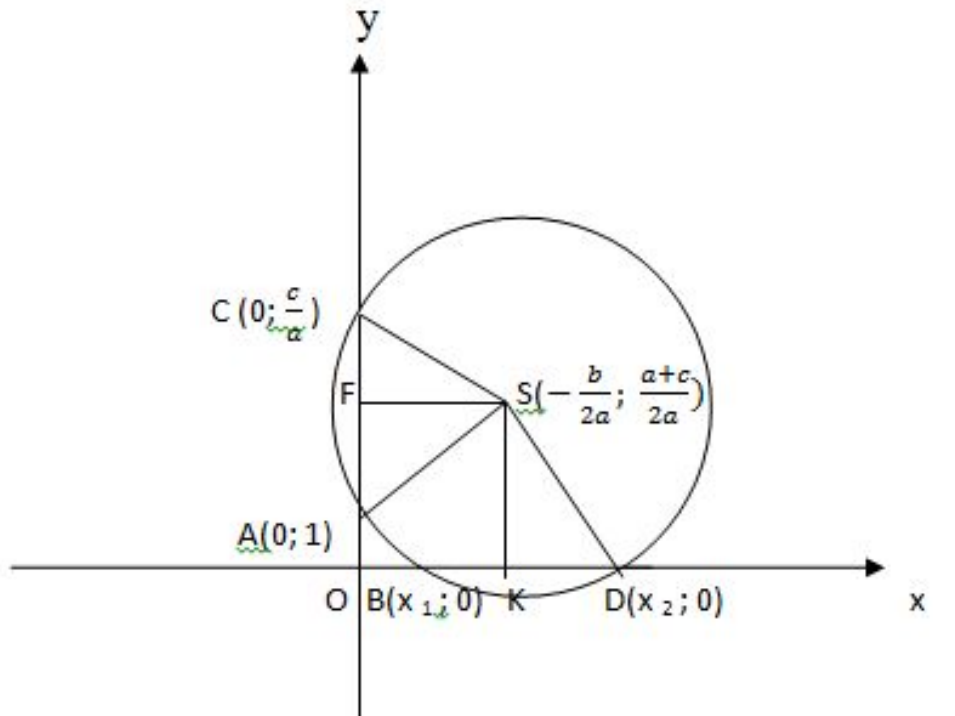
Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки:

Центр окружности $O(x; y)$:

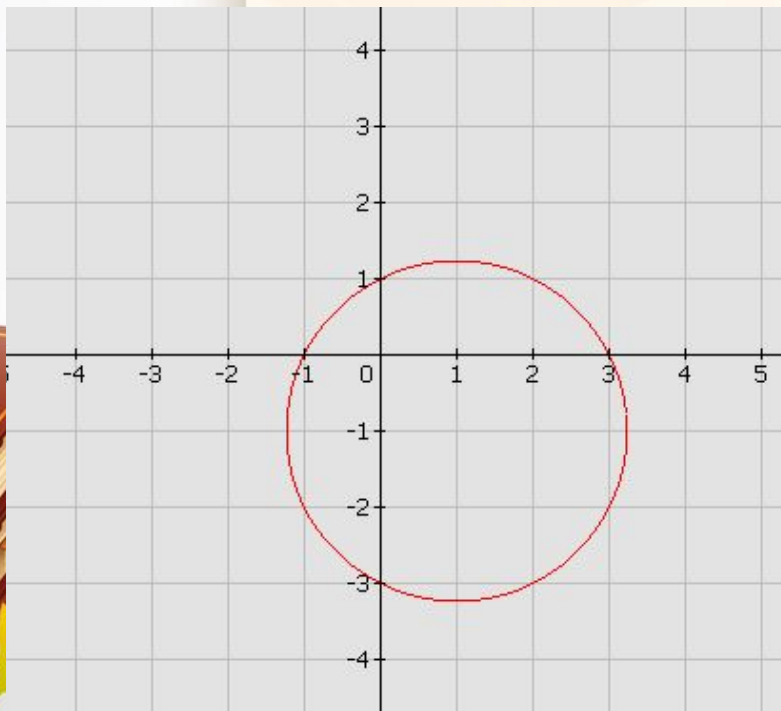
$$x = \frac{b}{2a}$$

$$y = \frac{a + c}{2a}$$

Точка $A(0; 1)$



Решите уравнение с помощью
циркуля $x^2 - 2x - 3 = 0$



Центр окружности:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

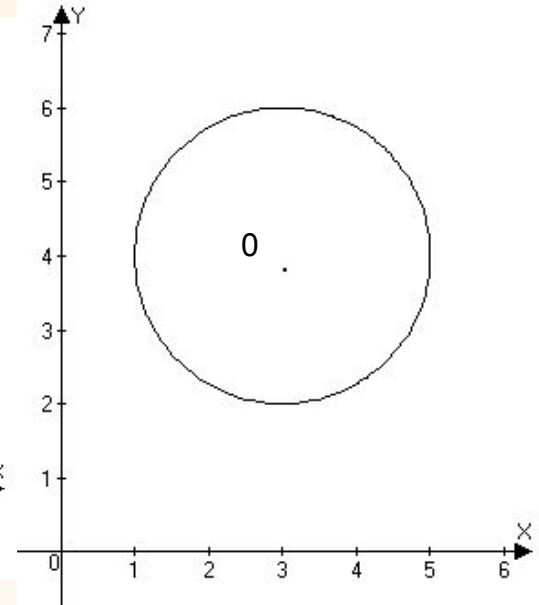
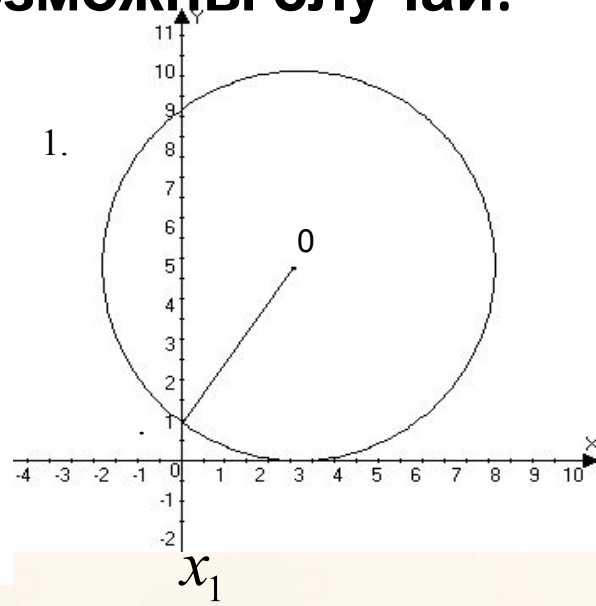
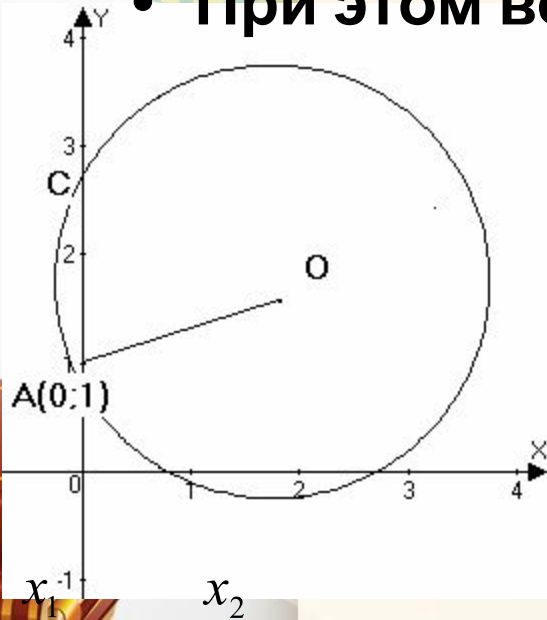
$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = -1$$

Точка А (0;1)

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

• При этом возможны случаи:



$AS > SK$, или $R > \frac{a+c}{2a}$
 два корня x_2 x_1 ,

$AS = SK$, или $R = \frac{a+c}{2a}$
 Один корень x_1

$AS < SK$, или $R < \frac{a+c}{2a}$
 Нет корней.



Решения квадратных уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$

тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному.



Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 30 = 121 - 120 = 1$$

$$y_1 = (-b + \sqrt{D}) / 2a = (-(-11) + 1) / 2 \cdot 1 = 12 / 2 = 6$$

$$y_2 = (-b - \sqrt{D}) / 2a = (-(-11) - 1) / 2 \cdot 1 = 10 / 2 = 5$$

$$x_1 = y_1 / 2 = 6 / 2 = 3$$

$$x_2 = y_2 / 2 = 5 / 2 = 2,5$$

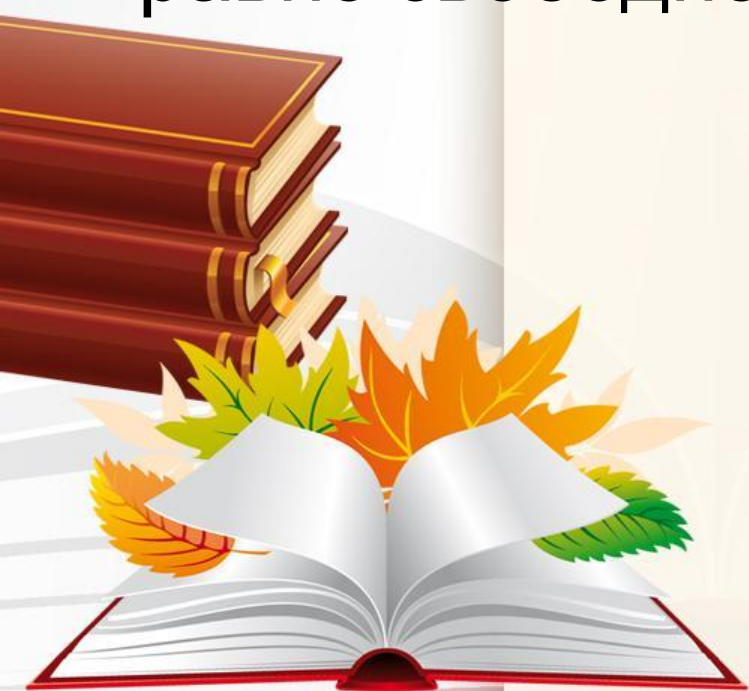
Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 2,5$

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, тогда и только тогда, когда произведение корней равно свободному члену.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$; $a + b + c = 0$ (то есть сумма коэффициентов равна нулю), то: $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

Пример

Дано уравнение $45x^2 - 23x - 22 = 0$

Так как $a + b + c = 0$, $45 + (-23) + (-22) = 0$, то

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{22}{45}$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

Пример

Дано уравнение $2008x^2 + 2005x - 3 = 0$

Так как $b = a + c$, $2005 = 2008 - 3$, то

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2008}$$



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

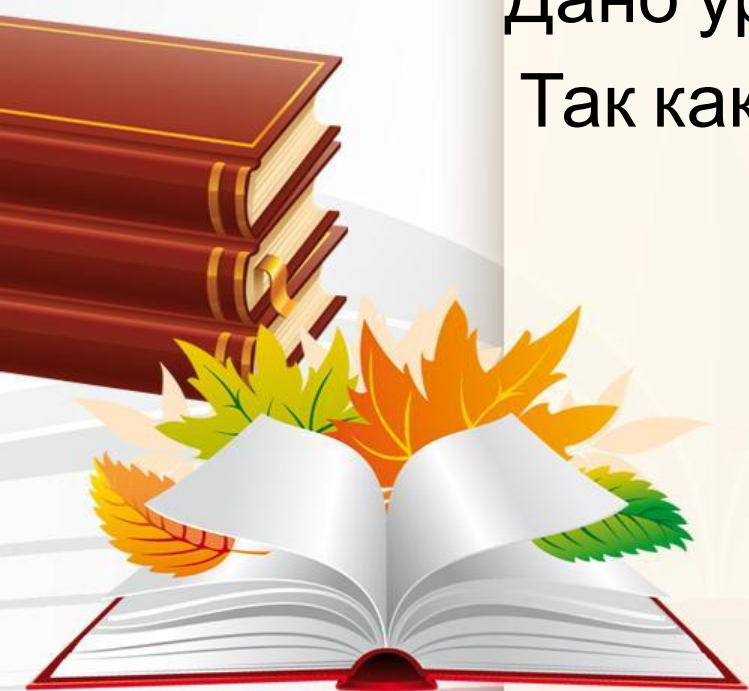
- Если $a = c, b = a^2 + 1$; то $x_1 = -a, x_2 = -\frac{1}{a}$

Пример

Дано уравнение $7x^2 + 50x + 7 = 0$

Так как $a = c, b = a^2 + 1$; $7=7, 50=49+1$, то

$$x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7}$$



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если $a = c, b = -(a^2 + 1)$, то

$$x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$$

Пример

Дано уравнение $11x^2 - 122x + 11 = 0$

Так как $a = c, b = -(a^2 + 1); 11=11, 122=121+1$, то

$$x_1 = 11, x_2 = \frac{1}{11}$$

Вывод

Квадратные уравнения играют огромную роль в развитии математики. Научиться решать их должен каждый. **Использование какого-либо способа зависит от индивидуальных особенностей человека, от его теоретической подготовки.**



Домашнее задание

