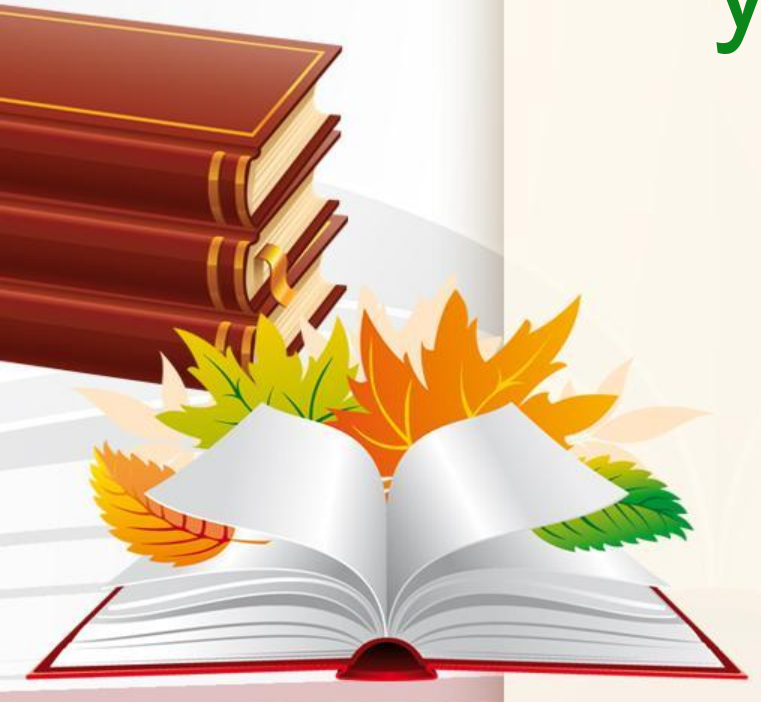
Способы решения квадратных уравнений



«Уравнение представляет собой наиболее серьёзную и важную вещь в математике».

Лодж О.

Цель: Знакомство с различными способами решения квадратных уравнений.

Задачи:

- Познакомиться с устными способами решения квадратных уравнений.
- Рассмотреть нестандартные способы решения квадратных уравнений.
- Расширить кругозор учащихся.
- Повысить интерес к истории математики, к предмету.

Какое уравнение называют квадратным?

- Квадратным уравнением называют алгебраическое уравнение второй степени вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x – переменная,

a, b, c - действительные числа.

Виды квадратных уравнений

Неполные квадратные уравнения.

Неполным квадратным уравнением называют квадратное уравнение, в котором коэффициент ***b*** или свободный член ***c*** равен нулю.

Виды неполных квадратных уравнений:

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

3. $ax^2 = 0$.

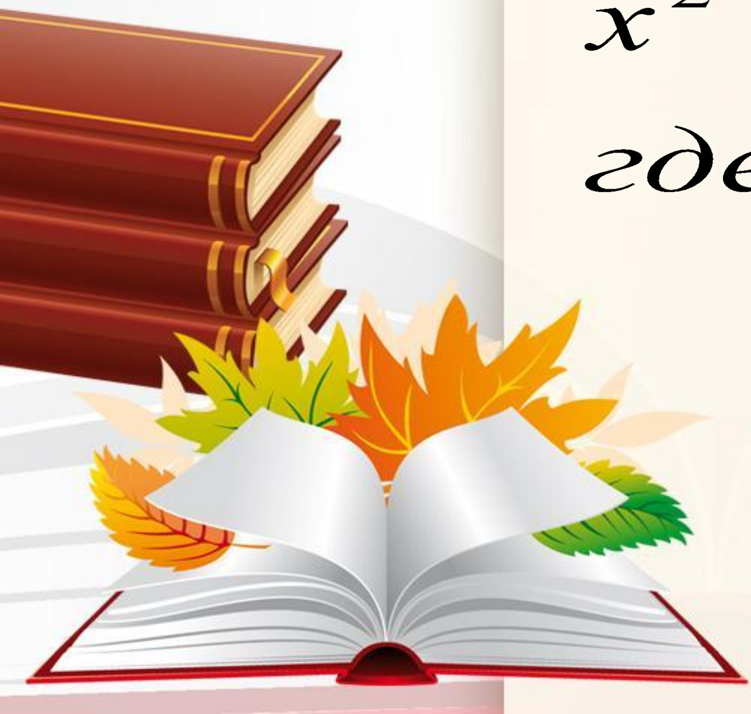
Виды квадратных уравнений

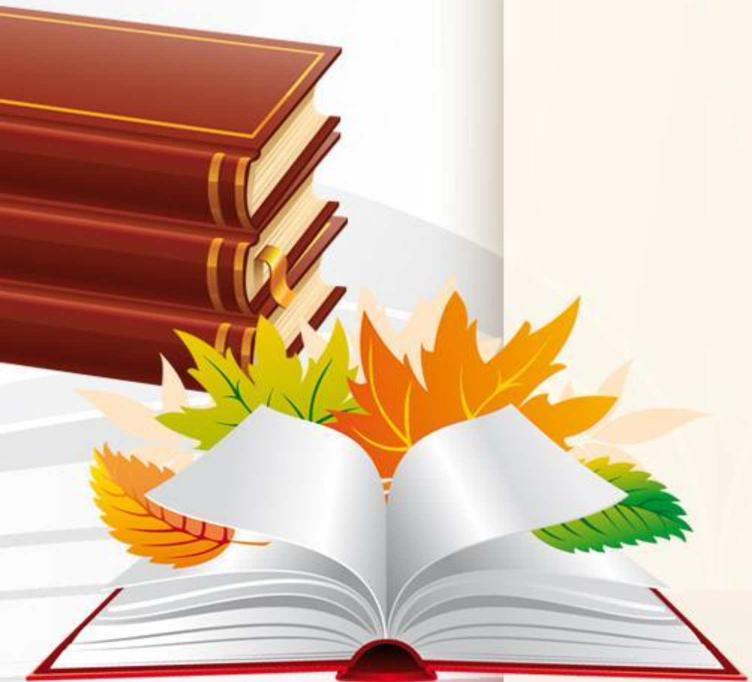
Приведенные квадратные уравнения.

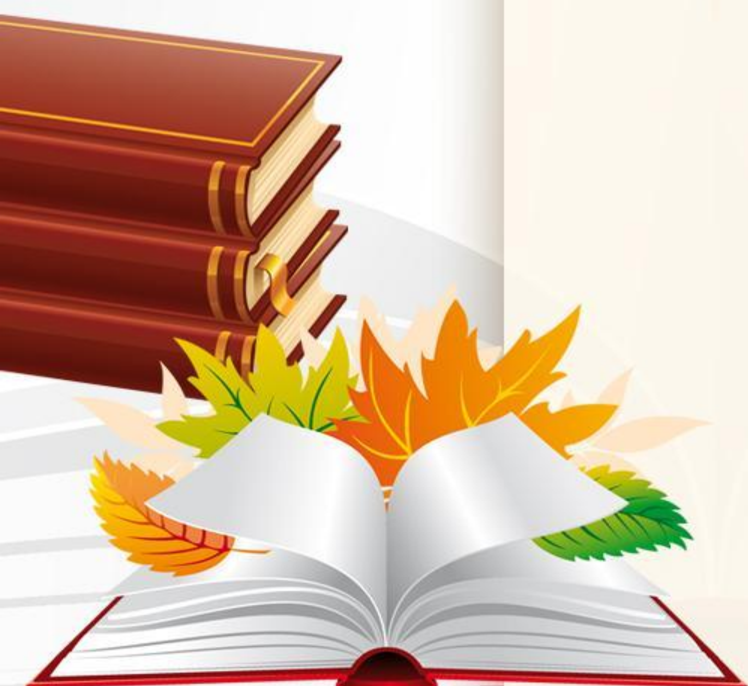
Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$где\ \mathrm{a} = 1.$$

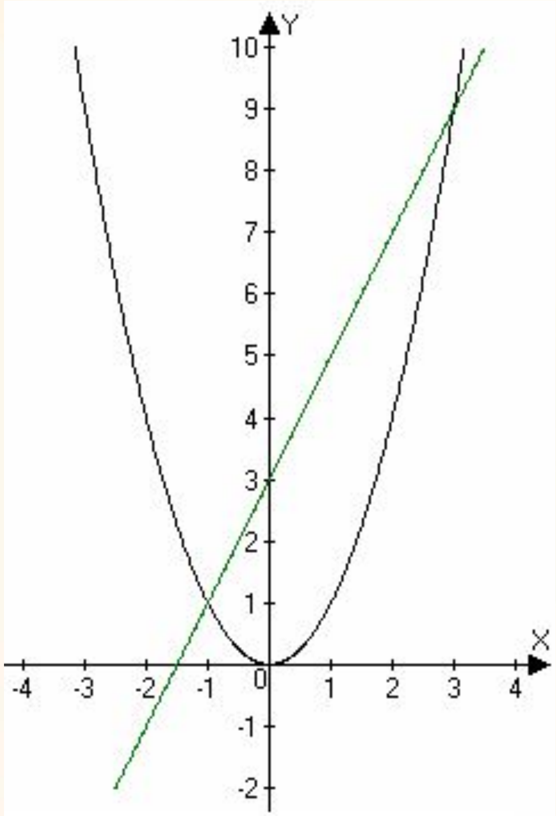






Графический способ

$$ax^2 + bx + c = 0$$



Решение квадратных уравнений по формулам

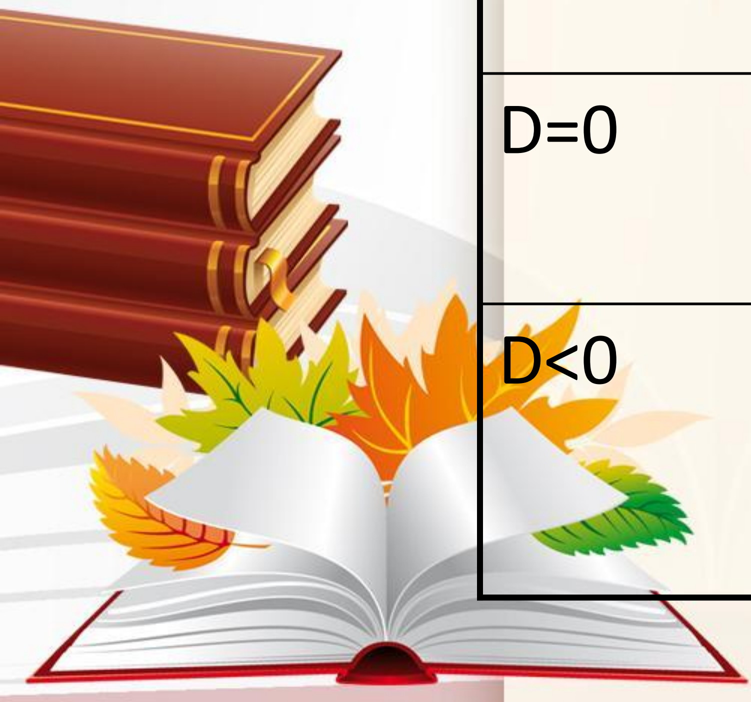
- Корни квадратного уравнения вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Зависимость количества корней от знака дискриминанта



Знак дискриминанта	Количество корней
D>0	Два различных действительных корня.
D=0	Два действительных равных корня(один действительный двукратный корень).
D<0	Нет действительных корней

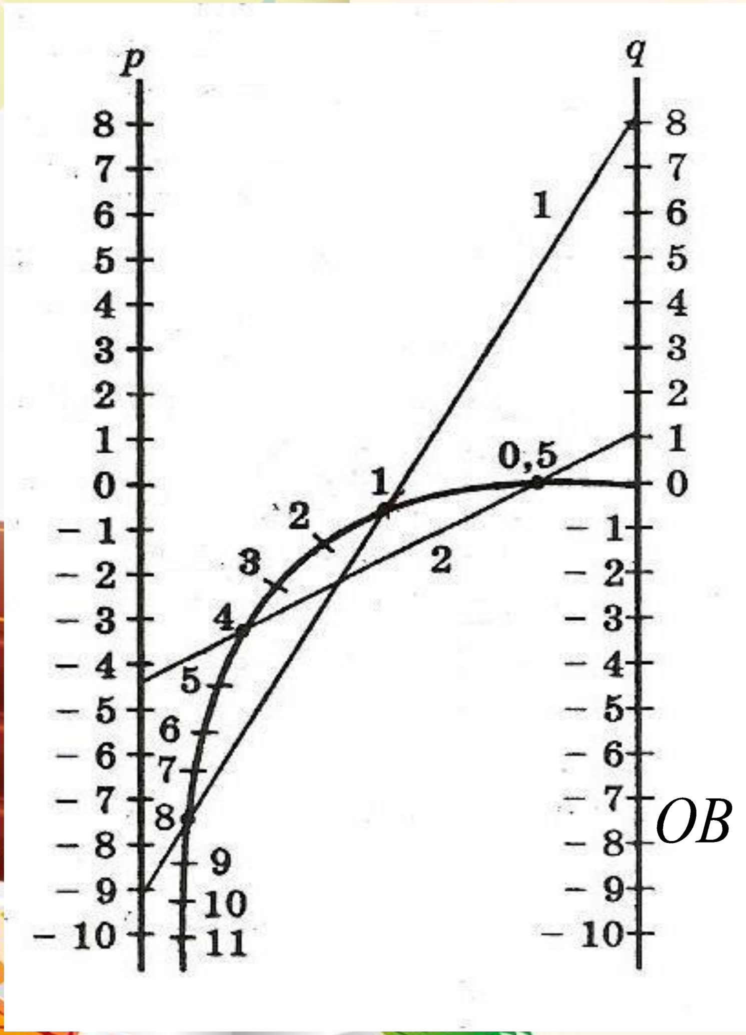
Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Номограмма- графическое представление функции от нескольких переменных, позволяющее с помощью простых геометрических операций (например, прикладывание линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений.

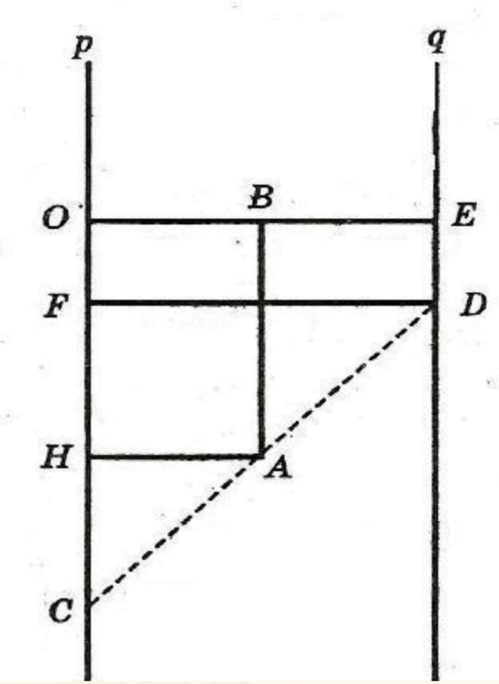
С помощью номограммы можно решить только приведенные уравнения, общая формула таких уравнений:

$$x^2+px+q=0$$

Метод номограммы



Криволинейная шкала номограммы строится формулам:



$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}$$

1.OC=p, ED=q,

Решим уравнение: $\mathbf{x^2 - 9x + 8 = 0}$
с помощью номограммы.

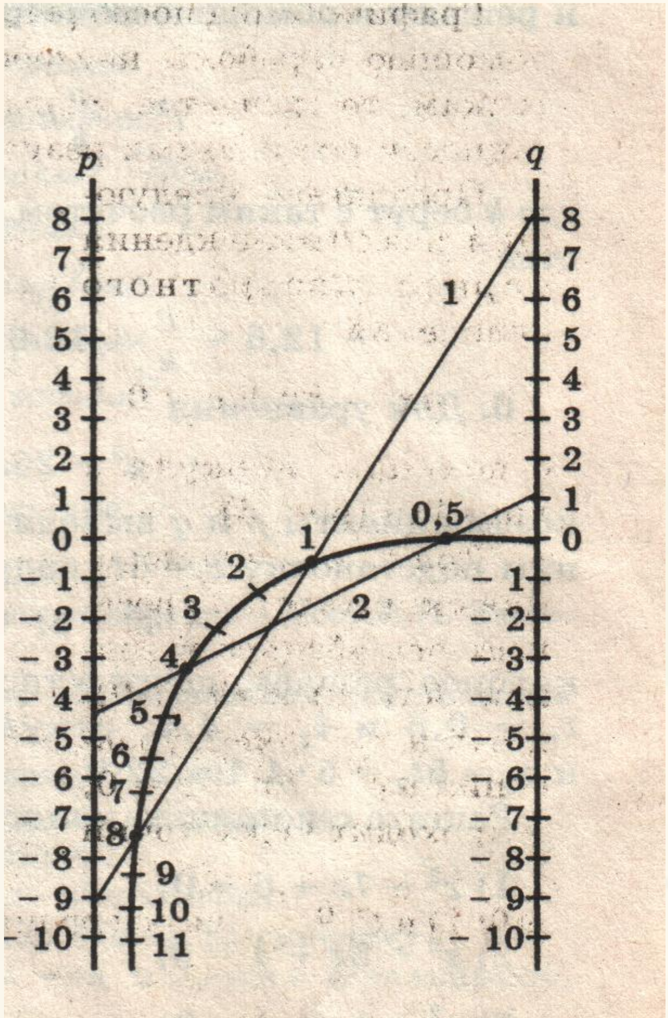


Рис. 12

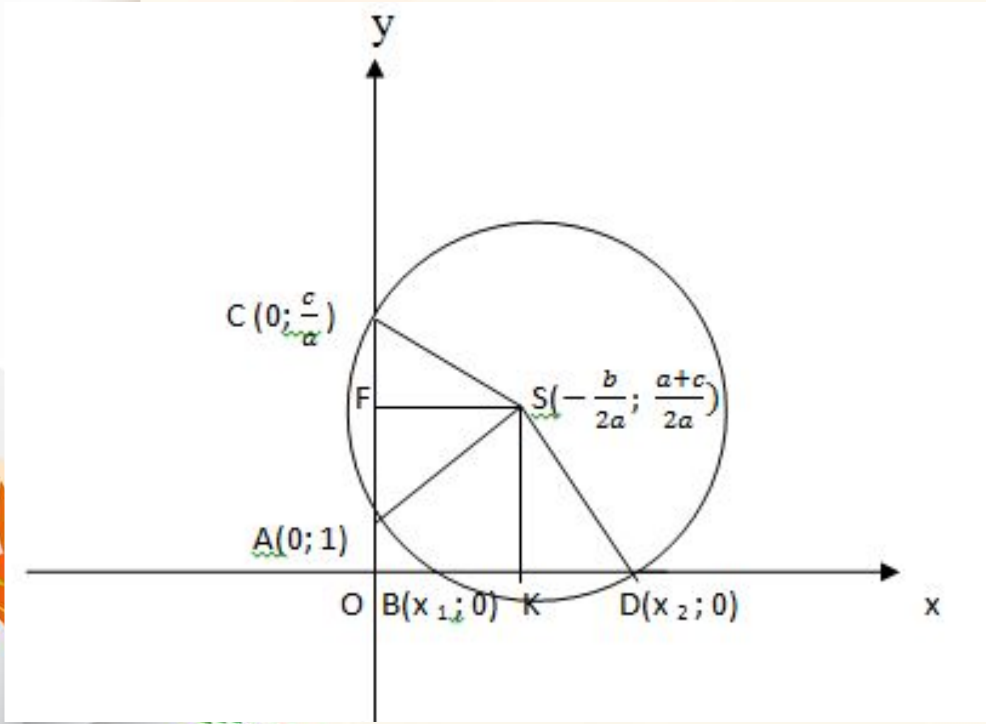
Для этого уравнения номограмма дает корни

$x_1 = 8,0$ и $x_2 = 1,0$

Ответ: $x_1 = 8$; $x_2 = 1$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки:

Центр окружности O(x;y):



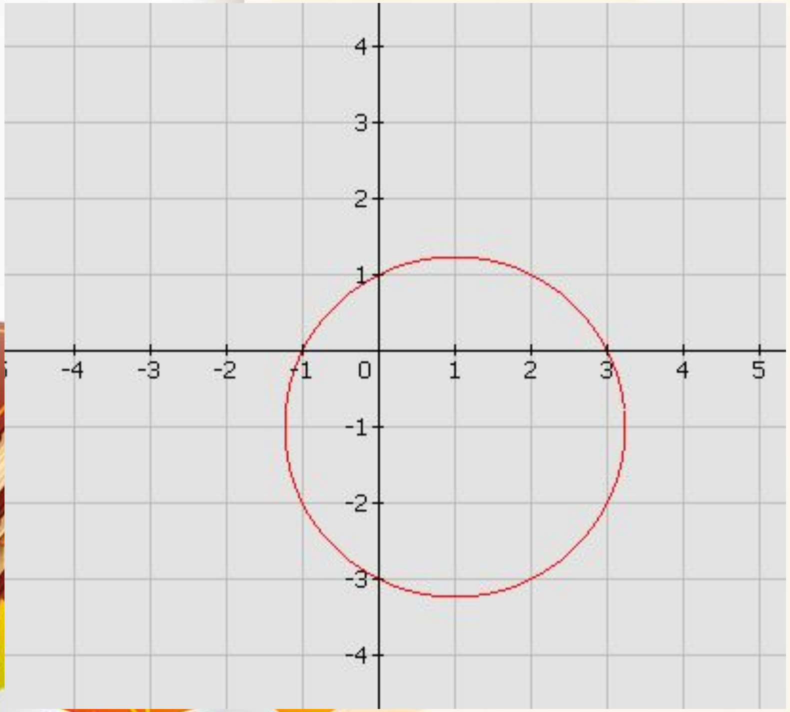
$$x = \frac{b}{2a}$$

$$y = \frac{a+c}{2a}$$

Точка A (0;1)

Решите уравнение с помощью циркуля $x^2 - 2x - 3 = 0$

Центр окружности:



$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

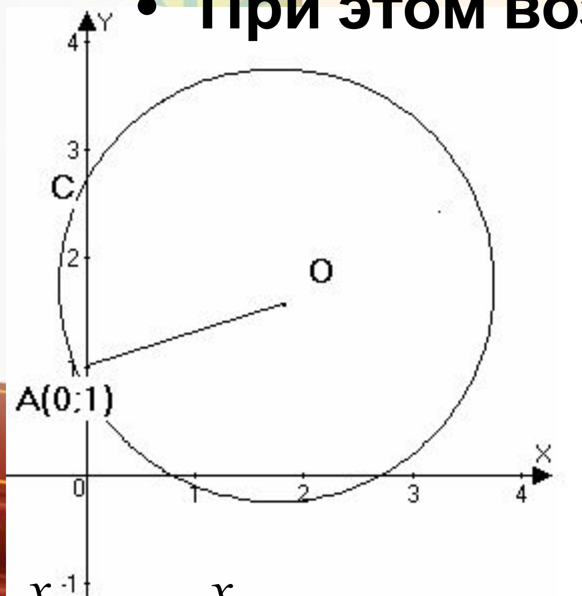
$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = -1$$

Точка А (0;1)

$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$

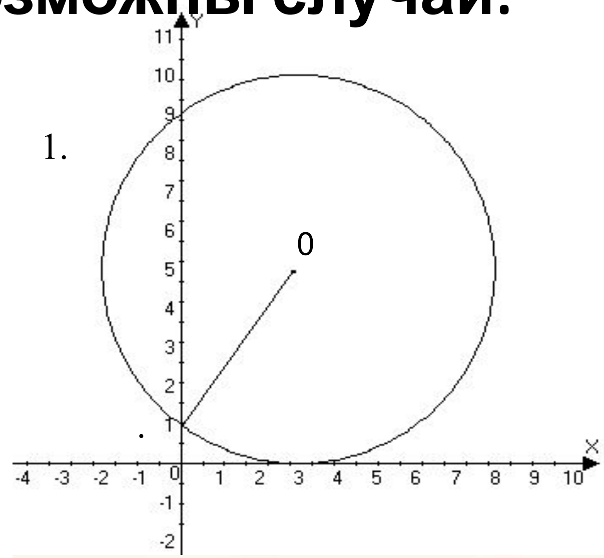
Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

- **При этом возможны случаи:**

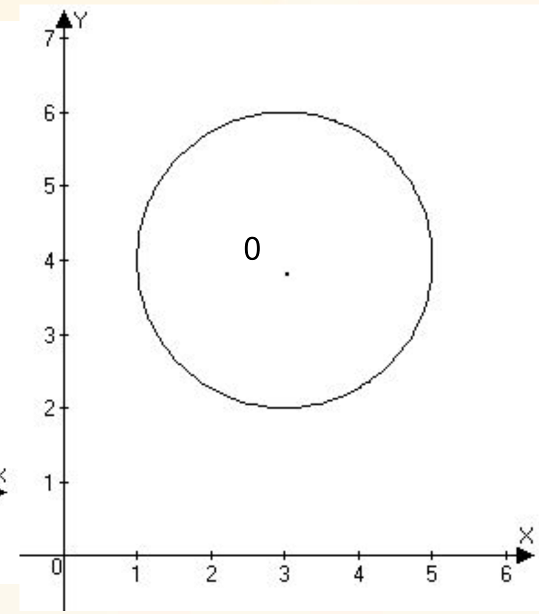


x_1 x_2

1.



x_1



$AS > SK$, или $R > \dfrac{a+c}{2a}$

два корня $x_1,\ x_2$

$AS = SK$, или $R = \dfrac{a+c}{2a}$

Один корень x_1

$AS < SK$, или $R < \dfrac{a+c}{2a}$

Нет корней.

Решения квадратных уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}, \; a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a, получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$

тогда приходим к уравнению

$$\mathbf{y^2 + by + ac = 0},$$

равносильного данному.

Решим уравнение $\mathbf{2x^2 - 11x + 15 = 0}$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

$D=b^2-4ac=(-11)2-4*30=121-120=1$

$y_1=(-b+\sqrt{D})/2a=(-(-11)+1)/2*1=12/2=6$

$y_2=(-b-\sqrt{D})/2a=(-(-11)-1)/2*1=10/2=5$

$x_1=y_1/2=6/2=3$

$x_2=y_2/2=5/2=2,5$

Ответ: $\mathbf{x_1=3}$ **;** $\mathbf{x_2=2,5}$

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, тогда и только тогда, когда произведение корней равно свободному члену.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- **Если в уравнении** $ax^2+bx+c=0$ **, где а $\neq$0 ;** $a+b+c=0$ **(то есть сумма коэффициентов равна нулю), то:** $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$

- **Пример**

Дано уравнение $45x^2-23x-22=0$

Так как a + b + c=0, 45+(-23)+(-22)=0, то

$$x_1=1, x_2=-\frac{22}{45}$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

Пример

Дано уравнение $2008x^2 + 2005x - 3 = 0$

Так как $b = a + c$, 2005=2008-3, то

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2008}$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если $a = c, b = a^2 + 1;$ то x_1=-a, x_2=$\frac{-1}{a}$

Пример

Дано уравнение $7x^2 + 50x + 7 = 0$

Так как $a = c, b = a^2 + 1;$ 7=7, 50=49+1, то

$$x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7}$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

- Если $a = c, b = -(a^2 + 1)$, то

$$x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$$

Пример

Дано уравнение $11x^2 - 122x + 11 = 0$

Так как $a = c, b = -(a^2 + 1);$ 11=11, 122=121+1, то

$$x_1 = 11, x_2 = \frac{1}{11}$$

Вывод

Квадратные уравнения играют огромную роль в развитии математики. Научиться решать их должен каждый. **Использование какого-либо способа зависит от индивидуальных особенностей человека, от его теоретической подготовки.**

Домашнее задание