

Управление образования администрации Арзамасского муниципального района  
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
«Чернухинская средняя школа»

## «Основные методы решения логарифмических неравенств»

Алгебра и начала анализа 10 профильный класс.



*Пахутина Галина Михайловна  
учитель математики*

### Цель урока:

обобщить и систематизировать умения и навыки решения алгебраических неравенств методом интервалов, изучить метод замены множителей.

### Задачи урока:

- повторить и обобщить метод интервалов и метод сведения неравенств к совокупности неравенств;
- познакомить учащихся с методом замены множителей, как эффективным способом решения целого класса неравенств.
- подготовка учащихся к решению задач ЕГЭ повышенной степени сложности.

## Алгоритм решения неравенств «методом интервалов» для $f(x)/g(x) < 0$

- а). Найти область определения левой части неравенства, корни числителя и знаменателя.
- б). Нанести найденные корни числителя и знаменателя на числовую ось в пределах ОДЗ.
- в). Определить знаки левой части неравенства на полученных промежутках.
- г). Выяснить принадлежность концов полученных промежутков (критических точек) множеству решений неравенства.
- д). Выбрать промежутки, соответствующие знаку неравенства, записать ответ.

## Примеры решения неравенств:

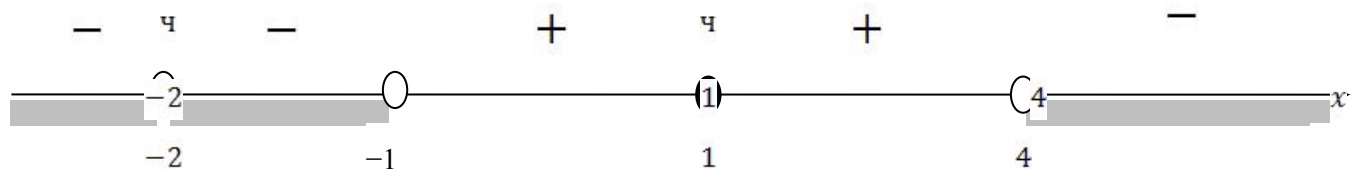
### Задание №1

Решить неравенство:

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 + x - 2)}{8 + 2x - x^2} \leq 0$$

Корни числителя:  $1; -1; 1; -2$

Корни знаменателя:  $4; -2$



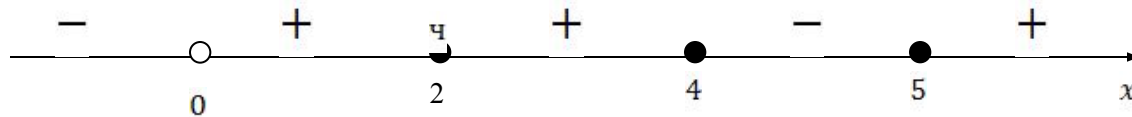
Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$

## Задание №2

Решить неравенство:  $\frac{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 7x + 10)}{x} \geq 0$

Корни числителя: **2; 4; 2; 5**

Корни знаменателя: **0**



Ответ:  $(0; 4] \cup [5; +\infty)$

В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак « $\Rightarrow$ ».  
Укажите этот пример.

$$1) \log_2 x = \log_2 (2 - x^2) \Rightarrow x = 2 - x^2$$

$$2) \log_x \frac{1}{3} = \log_{2-x^2} \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 - x^2.$$

$$3) \log_x (2 - x^2) < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 < x, \\ 2 - x^2 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$4) 2^{\log_2 x} = 2 - x^2 \Rightarrow x = 2 - x^2.$$

$$5) \log_2 x < \log_2 (2 - x^2) \Rightarrow x < 2 - x^2.$$

Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

1)  $\lg x = 0$  и  $x = 1$ .

2)  $x^2 \geq 0$  и  $2^x > 0$ .

3)  $\log_2 x > 1$  и  $x > 2$ .

4)  $\lg x = \lg y$  и  $x = y$ .

5)  $2^x + 2^{-x} = 1$  и  $\lg x = \lg(-x)$

В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак « $\Leftrightarrow$ ». Укажите этот пример

$$1) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 < 1. \end{cases}$$

$$2) \log_x(2 - x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$3) x \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \log_2 x = 0. \end{cases}$$

$$4) \log_2 x = \log_2(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 1, \\ x > 0. \end{cases}$$



# Логарифмические неравенства

Неравенства вида  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , где  $a \neq 1$ ,  $a > 0$  называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

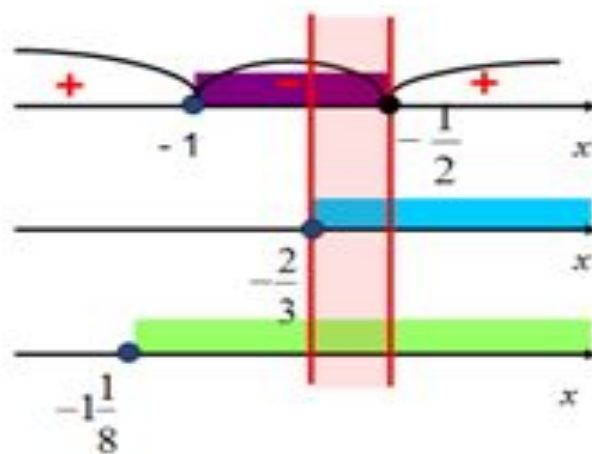
## Пример 1

Решим неравенство:

$$\frac{\log_5(6x+4)}{\log_{0,7}(8x+9)} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{(5-1)(6x+4-1)}{(0,7-1)(8x+9-1)} \geq 0 \\ 8x+9 \neq 1 \\ 6x+4 > 0 \\ 8x+9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x+3}{8x+8} \leq 0 \\ x > -\frac{2}{3} \\ x > -\frac{9}{8} \end{cases}$$



Ответ:

$$\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]$$

Пример 2 Решить неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

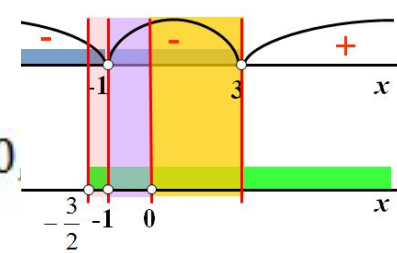
$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x + 3)$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x + 3) < 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \neq 1 \\ 2x + 3 > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x + 3 - 1)(x^2 - 2x - 3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x + 2)(x + 1)(x - 3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + 1)(x + 1)(x - 3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x + 1)^2(x - 3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



Ответ:  $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$

**Пример 3** Решить неравенство:  $\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} \geq 1$ ;

$$\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} \geq 1;$$

$$\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} - \log_{2x-1}(2x-1) \geq 0;$$

$$(2x-1-1) \left( \frac{x^4+2}{2x+1} - (2x-1) \right) \geq 0;$$

$$(2x-2) \left( \frac{x^4+2-4x^2+1}{2x+1} \right) \geq 0;$$

$$(x-1) \left( \frac{x^4-4x^2+3}{2x+1} \right) \geq 0;$$

$$\begin{cases} (x-1) \left( \frac{x^4-4x^2+3}{2x+1} \right) \geq 0; \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

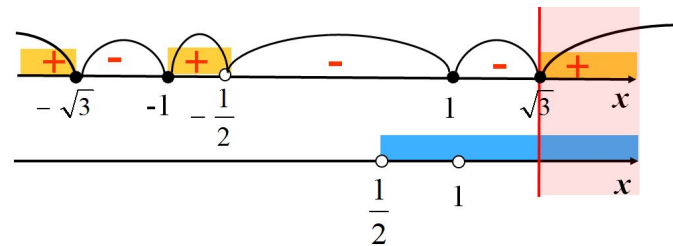
Решая методом интервалов:

$$\begin{cases} (x-1) \left( \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x+\frac{1}{2}} \right) \geq 0; \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

ОДЗ: 
$$\begin{cases} \frac{x^4+2}{2x+1} > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$



Ответ:  $[\sqrt{3}; \infty)$

**Пример 4**  $\log_{(x^2-6x+10)^4}(5x^2+7) \leq \log_{(x^2-6x+10)}(4x^2+11x+7)$

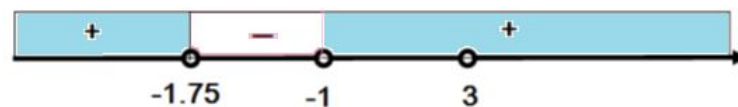
$$\frac{1}{4} \log_{(x^2-6x+10)}(5x^2+7) - \log_{(x^2-6x+10)}(4x^2+11x+7) \leq 0 \cdot \text{ОДЗ} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 10 > 0 \\ x^2 - 6x + 10 \neq 1 \\ 5x^2 + 7 > 0 \\ 4x^2 + 11x + 7 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 6x + 10 - 1)(5x^2 + 7 - (4x^2 + 11x + 7)) \leq 0 & (1) \\ x^2 - 6x + 10 > 0 \\ x^2 - 6x + 10 \neq 1 \\ 5x^2 + 7 > 0 \\ 4x^2 + 11x + 7 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

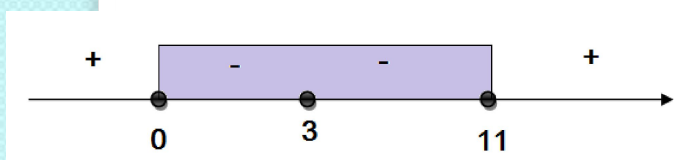
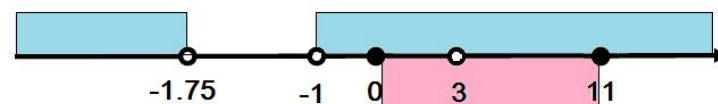
$$\begin{cases} x - \text{любое} \\ (x-3)^2 \neq 0 \\ x^2 > -\frac{7}{5} \Rightarrow x - \text{любое} \\ 4(x+1,75)(x+1) > 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 11x) \leq 0$$

$$x(x-3)^2(x-11) \leq 0$$



Запишем решение с учетом ОДЗ



**Ответ:**  $x \in [0; 3) \cup (3; 11]$

## Полезные схемы неравенств

$$1) \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$3) \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$