Управление образования администрации Арзамасского муниципального района
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Чернухинская средняя школа»

# «Основные методы решения логарифмических неравенств»

Алгебра и начала анализа 10 профильный класс.

*Пахутина Галина Михайловна*
*учитель математики*

**Цель урока**:
обобщить и систематизировать умения и навыки решения алгебраических неравенств методом интервалов, изучить метод замены множителей.

Задачи урока:
**— повторить и обобщить метод интервалов и метод сведения неравенств к** совокупности неравенств;
-познакомить учащихся с методом замены множителей, как эффективным способом решения целого класса неравенств.
— подготовка учащихся к решению задач ЕГЭ повышенной степени сложности.

# Алгоритм решения неравенств «методом интервалов» для $f(x)/g(x)<0$

- а). Найти область определения левой части неравенства, корни числителя и знаменателя.
- б). Нанести найденные корни числителя и знаменателя на числовую ось в пределах ОДЗ.
- в). Определить знаки левой части неравенства на полученных промежутках.
- г). Выяснить принадлежность концов полученных промежутков (критических точек) множеству решений неравенства.
- д). Выбрать промежутки, соответствующие знаку неравенства, записать ответ.

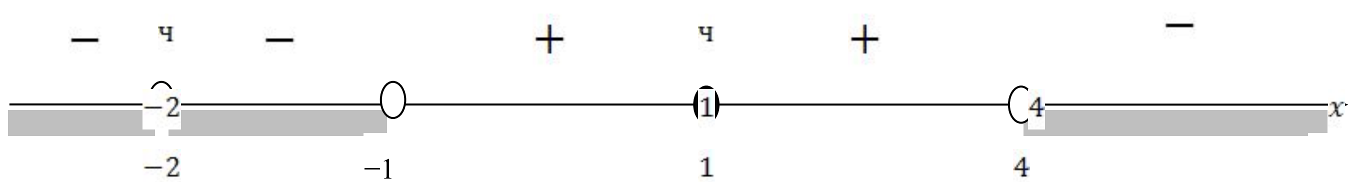
# Примеры решения неравенств:

**Задание №1**

**Решить неравенство:** $$\frac{(x^2-1)(x^2+x-2)}{8+2x-x^2} \le 0$$

Корни числителя: $1; -1; 1; -2$

Корни знаменателя: $4; -2$



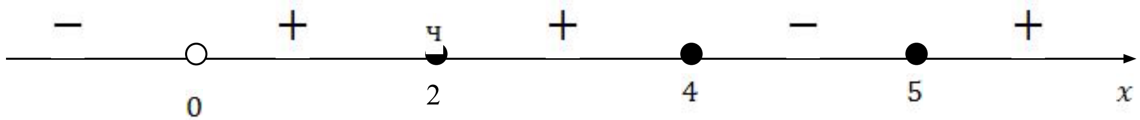

**Ответ:** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$

# Задание №2

**Решить неравенство:** $$\frac{(x^2-6x+8)(x^2-7x+10)}{x} \geq 0$$

**Корни числителя:** $2;4;2;\ 5$

**Корни знаменателя:** $0$




**Ответ:** $(0;4]\cup[5;\ +\infty)$

В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак « $\Rightarrow$ ». Укажите этот пример.

$$1)\ \log_2 x = \log_2\left(2 - x^2\right) \Rightarrow x = 2 - x^2$$

$$2)\ \log_x \frac{1}{3} = \log_{2-x^2} \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 - x^2.$$

$$3)\ \log_x\left(2 - x^2\right) < 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 < x, \\ 2 - x^2 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$4)\ 2^{\log_2 x} = 2 - x^2 \quad \Rightarrow x = 2 - x^2.$$

$$5)\ \log_2 x < \log_2\left(2 - x^2\right) \Rightarrow x < 2 - x^2.$$

Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

1) $\lg x = 0$ и $x = 1.$

2) $x^2 \geq 0$ и $2^x > 0.$

3) $\log_2 x > 1$ и $x > 2.$

4) $\lg x = \lg y$ и $x = y.$

5) $2^x + 2^{-x} = 1$ и $\lg x = \lg(-x)$

В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак « $\Leftrightarrow$». Укажите этот пример

$$1)\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0, \\ x^2-1<1. \end{cases}$$

$$2)\log_x(2-x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=x^2, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

$$3)x\log_2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \log_2 x=0. \end{array}\right.$$

$$4)\log_2 x=\log_2(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1, \\ x>0. \end{cases}$$

# Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$
называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

**$a > 1$**

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

**$0 < a < 1$**

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

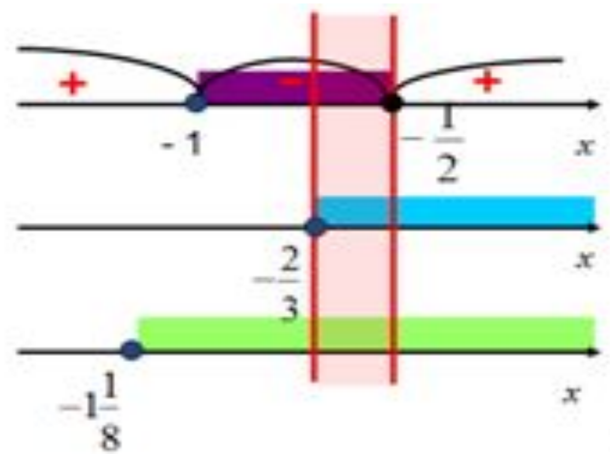
$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

## *Пример1*

Решим неравенство: $\dfrac{\log_5(6x+4)}{\log_{0,7}(8x+9)} \geq 0;$

$$\begin{cases} \dfrac{(5-1)(6x+4-1)}{(0,7-1)(8x+9-1)} \geq 0 \\ 8x+9 \neq 1 \\ 6x+4 > 0 \\ 8x+9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6x+3}{8x+8} \leq 0 \\ x > -\dfrac{2}{3} \\ x > -\dfrac{9}{8} \end{cases}$$




Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}\right]$

***Пример 2*** Решить неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

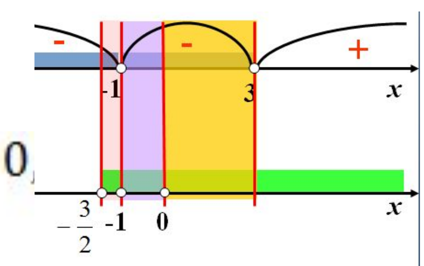
$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3)$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3}(2x+3) < 0$$

$$\begin{cases} 2x+3 \neq 1 \\ 2x+3 > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq -1 \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x+2)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$




Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$

***Пример 3*** Решить неравенство: $log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1} \geq 1;$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x^4+2}{2x+1} > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1. \end{cases}$

$\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1} \geq 1;$$

$$log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1} - log_{2x-1}(2x-1) \geq 0;$$

$$(2x-1-1)\left(\frac{x^4+2}{2x+1} - (2x-1)\right) \geq 0;$$

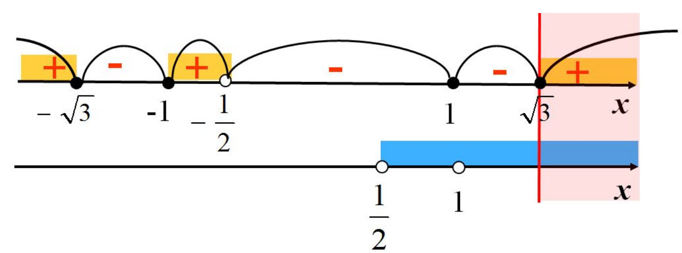
$$(2x-2)\left(\frac{x^4+2-4x^2+1}{2x+1}\right) \geq 0;$$

$$(x-1)\left(\frac{x^4-4x^2+3}{2x+1}\right) \geq 0;$$

$$\begin{cases} (x-1)\left(\frac{x^4-4x^2+3}{2x+1}\right) \geq 0; \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Решая методом интервалов:

$$\begin{cases} (x-1)\left(\frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x+\frac{1}{2}}\right) \geq 0; \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$




Ответ: $[\sqrt{3}; \infty)$

**Пример 4** $\log_{(x^2-6x+10)^4}(5x^2+7) \le \log_{(x^2-6x+10)}(4x^2+11x+7)$

$$\frac{1}{4}\log_{(x^2-6x+10)}(5x^2+7) - \log_{(x^2-6x+10)}(4x^2+11x+7) \le 0$$

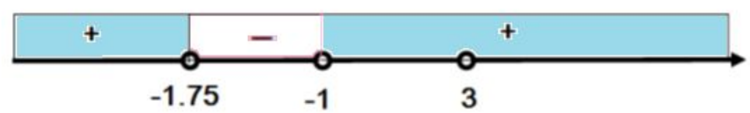
•ОДЗ
$$\begin{cases} x^2-6x+10>0 \\ x^2-6x+10 \ne 1 \\ 5x^2+7>0 \\ 4x^2+11x+7>0 \end{cases}$$

•

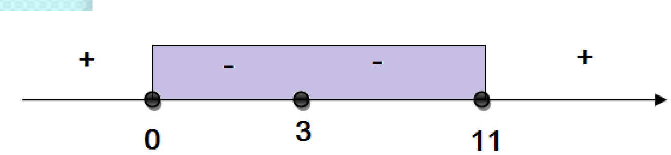
$$\begin{cases} (x^2-6x+10-1)\left(5x^2+7-(4x^2+11x+7)\right) \le 0 \quad (1) \\ x^2-6x+10>0 \\ x^2-6x+10 \ne 1 \\ 5x^2+7>0 \\ 4x^2+11x+7>0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x - \text{любое} \\ (x-3)^2 \ne 0 \\ x^2 > -\frac{7}{5} => \ x - \text{любое} \\ 4(x+1{,}75)(x+1)>0 \end{cases}$$

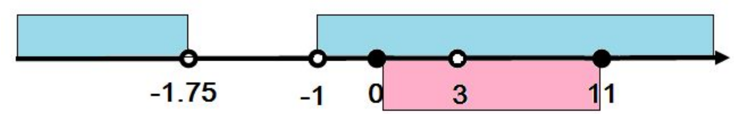
$$(x^2-6x+9)(x^2-11x) \le 0$$




$$x(x-3)^2(x-11) \le 0$$




**Запишем решение с учетом ОДЗ**




**Ответ:** $x \in [0;3) \cup (3;11]$

# Полезные схемы неравенств

$$1)\ \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(a-1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$3)\ \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$