Неравенства

* Определение: выражения вида $f(x)>g(x)$; $f(x)<g(x)$;
* $f(x)\geq g(x)$; $f(x)\leq g(x)$ называются неравенствами с одной переменной.
* Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

* *Квадратные неравенства*, т. е. неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $a \neq 0$.
* Будем считать, что $a>0$. Если это не так, то умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получим желаемое.
* Чтобы решить неравенство можно:
* квадратный трехчлен разложить на множители, т. е. неравенство записать в виде $a(x - x\ )(x - x\ ) > 0$ (< 0);
* корни многочлена нанести на числовую ось;
* построить «змейку», проходящую через корни, крайний правый промежуток положителен.
* Если квадратный трехчлен не имеет корней, то при $a>0$ и $D<0$ квадратный трехчлен при любом x *положителен*.

* *Рациональные неравенства высших степеней (>2)* ,т.е. неравенства вида (< 0), n > 2.
* Чтобы решить неравенство можно:
* 1) с помощью методов решения рациональных уравнений разложить многочлен на множители, т. е. неравенство записать в виде
* .
* 2) сократим на заведомо положительные выражения или отрицательные (в последнем случае знак неравенства менять на противоположный).
* 3) по правилу «змейки» найдем решение (крайний правый промежуток положителен, а затем знаки чередуются).

* .

* *Дробно-рациональные неравенства.* Для решения неравенства применяется метод интервалов (метод промежутков), который состоит в следующем:

* а) на числовую ось наносят точки x□, x2, …, xn, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение определено и сохраняет знак (плюс или минус). Такими точками могут быть корни уравнений f(x)=0 и g(x)=0. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему;

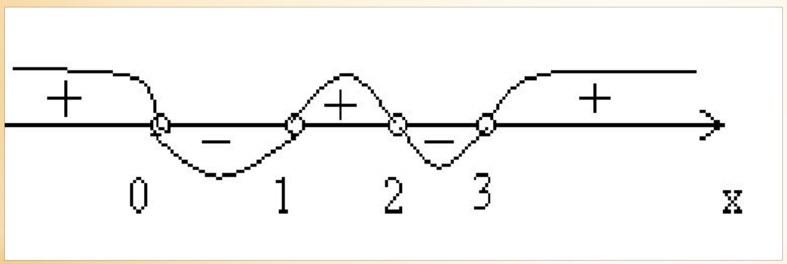
* б) определяют и отмечают на числовой оси знак выражения для значений x, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции f(x) или g(x) являются многочленами и не содержат множителей вида $(x - a)^{2n}$, где n N, то достаточно определить знак функции в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки плюс и минус будут чередоваться.

* *Неравенства с модулем*. При решении неравенств с неизвестным под знаком модуля пользуемся определением модуля, а также необходимо помнить, что решением неравенства $|x|<a$, $a>0$ является множество $(-a;\ a)$, а при решении неравенства $|x|>a$, $a>0$ является объединение множеств
* $(-\infty;\ -a)$ $(a;\ \infty)$.

*$x - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0.$

Разложим на множители многочлен $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$,используя способ подбора (деления многочлена на многочлен), получим:

$x(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0.$



Ответ: $(0;1) \cup (2;3)$.

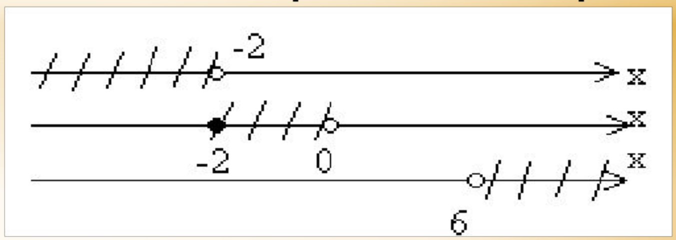
$(x - 1)(x + 2)(2x - 10 - x^2) < 0.$

- Перепишем неравенство следующим образом:
- $(x - 1)(x - 1)(x + 2)(- x^2 + 2x - 10) < 0.$
- Разделим почленно на $(x - 1) > 0$ при $x \neq 1$; обе части неравенства умножим на -1.
- Получим $(x - 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 10) > 0$. Сокращаем на $x^2 - 2x + 10 > 0$ (так как $a = 1$, $a > 0$, $D < 0$). Получаем $(x - 1)(x + 2) > 0$.
- Ответ: $(- \infty; -2)\ \ (1;\infty)$.

* | x - 3 | + | x + 2| - x > 5.

Решение. На числовой оси отметим значения, при которых
x – 3 = 0 и x + 2 = 0,
x = 3 x = -2.
Рассмотрим неравенство на каждом из полученных промежутков.
а) Если x < - 2, то неравенство принимает вид –x + 3 – x – 2 – x > 5, т. е.
-3x > 4, $\tilde{\delta} < -\frac{4}{3}.$

Из соотношений x < - 2 и $\tilde{\delta} < -\frac{4}{3}$ следует, что x < - 2 является решением неравенства.
б) Если -2 ≤ x < 3, то неравенство принимает вид –x + 3 + x + 2 –x >5, т. е. –x > 0, x < 0.
Из соотношений -2 ≤ x < 3 и x < 0 следует, что -2 ≤ x < 0 является решением данного неравенства.
в) Если x ≥ 3, то x – 3 + x + 2 –x > 5, т. е. x >6 – решение неравенства.
Найденные решения данного неравенства на различных промежутках удобно изобразить на числовых осях.



Ответ: (-∞ ; 0) □ (6 ; ∞).