УРАВНЕНИЯ

и неравенства

Повторение.11 класс.

Учитель математики МБОУ СОШ №20 Мелюхина Т.А.

Уравнения

- *Равенство, содержащее переменную, называется* ***уравнением.***
- ***Корнем уравнения*** *называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.*
- ***Решить уравнение*** *– значит найти все его корни или доказать, что корней нет.*

Примеры: $2x-3=5x+1$; $\frac{x-4}{x+2}=\frac{x}{x-2}$; $x^2-2x+1=0$.

Тригонометрические уравнения

$\cos t = a$

$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n\in Z$

$\cos t = 1$

$t=2\pi n, n\in Z$

$\cos t = -1$

$t=\pi+2\pi n, n\in Z$

$\cos t = 0$

$t=\pi/2+\pi n, n\in Z$

$\sin t = a$

$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k\in Z$

$\sin t = 1$

$t=\pi/2+2\pi n, n\in Z$

$\sin t = -1$

$t=-\pi/2+\pi n, n\in Z$

$\sin t = 0$

$t=\pi n, n\in Z$

$\mathrm{tg}\, t = a$

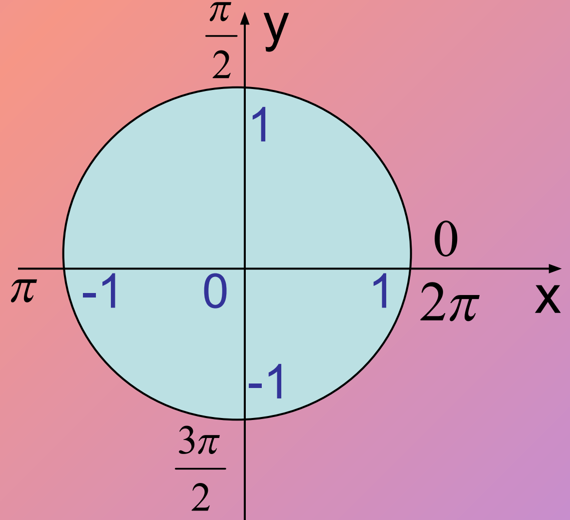
$t=\mathrm{arctg}\, a+\pi n, n\in Z$

$\mathrm{ctg}\, t = a$

$t=\mathrm{arcctg}\, a+\pi n, n\in Z$

Значения sinα, cosα, tgα, ctgα.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-



Примеры уравнений

- *Простые уравнения:* $2\sin x = 1$; $-3\cos x + 1 = 0$
- *Уравнения, приводимые к квадратным:*

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\cos^2 x + 3\sin x = 3$

- *Уравнения с разложением на множители:*

$\cos^2 x - \cos x = 0$; $\sin 2x + \cos x = 0$; $\cos 6x - \cos 2x = 0$

- *Однородные уравнения первой степени:*

$a\sin x + b\cos x = 0$ $\sin x + 2\cos x = 0$

- *Однородные уравнения второй степени:*

$3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

Иррациональные уравнения

- ***Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют <u>иррациональными.</u>***

Пример: $\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$

Алгоритм решения уравнения:

<u>1способ:</u>

1) Решить уравнение,

возведя обе части

уравнения в квадрат;

2) Сделать проверку.

<u>2способ</u>

Привести уравнение к

равносильной системе,

используя определение и

возведение в квадрат.

Примеры уравнений

а) $\sqrt{2x-1} = x-2$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 1$

Проверка:

$\sqrt{2\cdot 5-1} = 5-2$

$3 = 3$

Равенство верное =>
=>**x=5** явл. корнем

$\sqrt{2\cdot 1-1} = 1-2$

$1 = -1$

Равенство неверное =>
=>**x=1** не явл. корнем

Ответ: x=5.

b) $\sqrt{2x-1} = x-2$

$$\begin{cases} 2x-1=(x-2)^2, \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=x^2-4x+4, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,\ x=1, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=5$

Ответ: x=5

Показательные уравнения

Простейшее показательное уравнение:

$\underline{a^x = b}$, *где $a>0$ и $a \neq 1$.*

- *Уравнение имеет единственный корень, если* ***b>0.***

Алгоритм решения простейшего показательного уравнения:

$a^x = b$ *(b представить в виде $b = a^c$)*

$a^x = a^c$ *(основания равны => показатели равны)*

$\underline{x = c}$

- *Уравнение не имеет решений, если* ***b≤0****.*

Примеры уравнений

- Простые уравнения:

$4^{x+2} = 64$

$4^x \cdot 4^2 = 64$

$4^x = 64:16$

$4^x = 4^1$

$x = 1$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5}$$

$$x^2 + 2x - 0,5 = 2,5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1; x_2 = -3}$$

- Уравнения, решаемые другими способами:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

$49 \cdot 7^x + 28 \cdot 7^x = 539$

$7^x(49+28) = 539$

$7^x \cdot 77 = 539$

$7^x = 539:77$

$7^x = 7$

$x = 1$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\text{Пусть } 3^x = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$y_1 = 9; y_2 = -1$$

$$3^x = 9 \qquad 3^x = -1$$

Решений нет

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{x = 2}$$

Логарифмические уравнения

Простейшее логарифмическое уравнение:

$\log_a x = b$ *, где a>0,a≠1 и* **<u>x>0.</u>**

Пример: $\log_2(x - 4) = 3$

Алгоритм решения логарифмических уравнений:

<u>1 способ:</u>

1) *Найти ОДЗ;*
2) *Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;*
3) *Сравнить корни с ОДЗ.*

<u>2 способ:</u>

1) *Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;*
2) *Выполнить проверку.*

Примеры уравнений

- Простые уравнения:

$\log_5(x-4) = 2$ ОДЗ: $x-4 > 0$

$\log_5(x-4) = \log_5 25$ $x > 4$

$x-4 = 25$

$x=29$

- Уравнения, приводимые к квадратным:

$\lg^2 x + 2\lg x - 1 = 0$ ОДЗ: $x>0$

Пусть $\lg x = y$

$y^2 + 2y - 1 = 0$

$y=1$

$\lg x = 1$

$x=10$

- Уравнения с использованием свойств логарифмов:

$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$

$\log_3(x^2+4x+3) = \log_3 3$

$x^2+4x+3=3$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0 \quad x=-4$

Проверка: $x=0$

$\log_3 1+\log_3 3=1$

$1=1 \Rightarrow x=0$ является корнем

$x=-4$

$\log(-3)+\log(-1)=1$

Выражение не имеет смысла $\Rightarrow x=-4$ не является корнем

Ответ: $x=0$

Неравенства

- **<u>Неравенства</u>** – *это выражения, содержащие переменную и записанные с помощью знаков* <u>$>$, $<$, $\geq$, $\leq$</u>.

- ***<u>Решить неравенство</u>*** – *значит найти все значения переменной или доказать, что таких значений нет.*

- *Решения неравенств можно отмечать* ***<u>на координатной прямой</u>*** *или записывать в виде* ***<u>промежутка</u>***.

Примеры: $2x > 6$, $-4x \leq 8$, $x^2 - 16 < 0$, $\frac{(x-6)(x+5)}{x^3-1} \geq 0$

Показательные неравенства

Примеры: $2^x \geq 8$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27}$ $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 > 0$

Алгоритм решения показательных неравенств:

1). Приводим обе части неравенства к степеням с одинаковыми основаниями;

*2). Сравниваем основания с единицей(при **a>1** показательная функция возрастает =>**знак между показателями не меняем**, при **0<a<1** функция убывает => **знак между показателями меняем на противоположный**);*

3). Решаем неравенство относительно показателей.

Примеры решения неравенств

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Основание $\frac{1}{3}$ < 0 =>

=> знак неравенства меняем на противоположный

x ≥ 3

Ответ: x ≥ 3

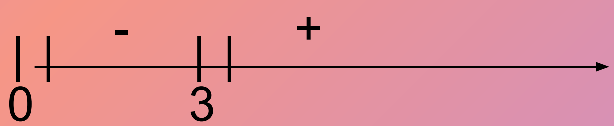
$3^{2x} + 2\cdot 3^x - 15 \ge 0$

Пусть $3^x = y$, ОДЗ: y>0

$y^2 + 2y - 15 \ge 0$

$y_1 = 3$, $y_2 = -5 ¢$ ОДЗ

Решаем методом интервалов



$y \ge 3 \Rightarrow 3^x \ge 3$

Основание 3>0 =>знак неравенства не меняем

x ≥ 1

Ответ: x ≥ 1.

Логарифмические неравенства

Примеры: $\log_4(x-2) \le 3$ $\log_{0,3}(x^2-1) > -3$

Алгоритм решения неравенств: 1). Находим ОДЗ;

2). Решаем логарифмическое неравенство:

- приводим обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;

- сравниваем основания с единицей(при **a>1** функция логарифмическая возрастает => **знак между подлогарифмическими выражениями не меняем**, при **0<a<1** функция убывает => **меняем на противоположный**);

- решаем неравенство с подлогарифмическими выражениями;

3). Находим общие решения.

Примеры решения неравенств

$\log_4(x-2) \leq 3$

ОДЗ: $x-2 > 0$

$x > 2$

$\log_4(x-2) \leq \log_4 64$

Основание $4 \geq 0$ => знак между подлогарифмическими выражениями не меняем

$x-2 \leq 64$

$x \leq 66$

Общее решение $\begin{cases} x \leq 66 \\ x \rangle 2 \end{cases}$ => $2 < x \leq 66$

Ответ: $x \in (2;66]$

Системы уравнений и неравенств

- **Системы уравнений решаются:**

- *способом подстановки;*

- *способом сложения;*

- *графическим способом.*

Системы неравенств:

- *решается первое неравенство;*

- *решается второе неравенство;*

- *находятся общие решения.*

Удачи!

Тест.

Выполнение заданий:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 16.

Ответы:

1	2	3	4	5	6	7	13	14	16
б	а	б	г	г	в	в	2	2πn, nЄZ	(-∞;-4)

Молодцы!

Домашнее задание: **8, 9, 10, 11, 12, 15, 17.**