# УРАВНЕНИЯ

# и неравенства

**Повторение.11 класс.**

Учитель математики МБОУ СОШ №20 Мелюхина Т.А.

# Уравнения

- Равенство, содержащее переменную, называется **уравнением.**
- **Корнем уравнения** называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.
- **Решить уравнение** – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Примеры: $2x-3=5x+1$; $\frac{x-4}{x+2}=\frac{x}{x-2}$ ; $x^2-2x+1=0$.

# Тригонометрические уравнения

<u>**cos t = a**</u>

$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

<u>**cos t = 1**</u>

$t=2\pi n, n \in Z$

<u>**cos t = -1**</u>

$t=\pi+2\pi n, n \in Z$

<u>**cos t = 0**</u>

$t=\pi/2+\pi n, n \in Z$

<u>**sin t = a**</u>

$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$

<u>**sin t = 1**</u>

$t=\pi/2+2\pi n, n \in Z$

<u>**sin t = -1**</u>

$t=-\pi/2+\pi n, n \in Z$

<u>**sin t = 0**</u>

$t=\pi n, n \in Z$

<u>**tg t = a**</u>

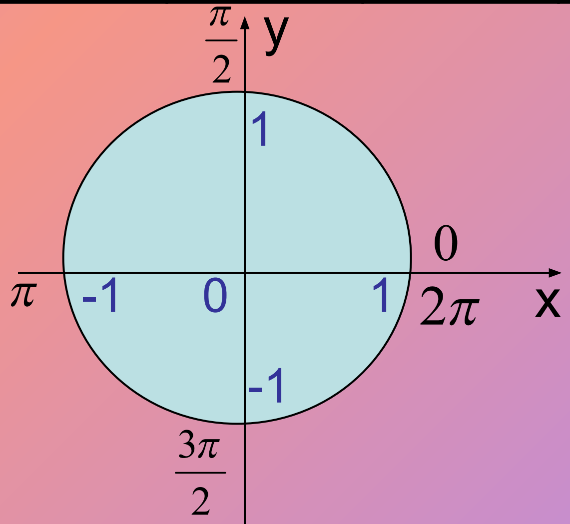
$t=\operatorname{arctg} a+\pi n, n \in Z$

<u>**ctg t = a**</u>

$t=\operatorname{arcctg} a+\pi n, n \in Z$

# Значения sinα, cosα, tgα, ctgα.

| α | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sinα | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| cosα | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| tgα | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 | - | 0 |
| ctgα | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | - | 0 | - |



# Примеры уравнений

- *Простые уравнения:* $2\sin x = 1$; $-3\cos x + 1 = 0$
- *Уравнения, приводимые к квадратным:*

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\cos^2 x + 3\sin x = 3$

- *Уравнения с разложением на множители:*

$\cos^2 x - \cos x = 0$; $\sin 2x + \cos x = 0$; $\cos 6x - \cos 2x = 0$

- *Однородные уравнения первой степени:*

$a\sin x + b\cos x = 0$ $\sin x + 2\cos x = 0$

- *Однородные уравнения второй степени:*

$3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

# Иррациональные уравнения

- ***Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют <u>иррациональными.</u>***

Пример: $\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$

Алгоритм решения уравнения:

**<u>1способ:</u>**

*1) Решить уравнение, возведя обе части уравнения в квадрат;*

*2) Сделать проверку.*

**<u>2способ</u>**

*Привести уравнение к равносильной системе, используя определение и возведение в квадрат.*

# Примеры уравнений

а) $\sqrt{2x-1} = x-2$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 1$

Проверка:

$\sqrt{2\cdot5-1} = 5-2$

$3 = 3$

Равенство верное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x=5** явл. корнем

$\sqrt{2\cdot1-1} = 1-2$

$1 \neq -1$

Равенство неверное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x=1** не явл. корнем

***Ответ: x=5***.

b) $\sqrt{2x-1} = x-2$

$$\begin{cases} 2x-1=(x-2)^2, \\ x-2\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=x^2-4x+4, \\ x\geq2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ x\geq2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,\ x=1, \\ x\geq2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=5$

***Ответ: x=5***

# Показательные уравнения

Простейшее показательное уравнение:

$a^x = b$ ,     где $a>0$ и $a \neq 1$.

- Уравнение имеет единственный корень, если **$b>0$.**

**Алгоритм решения простейшего показательного уравнения:**

$a^x = b$   ($b$ представить в виде $b = a^c$)

$a^x = a^c$  (основания равны $\Rightarrow$ показатели равны)

$x = c$

- Уравнение не имеет решений, если **$b \leq 0$**.

# Примеры уравнений

- Простые уравнения:

$4^{x+2} = 64$

$4^x \cdot 4^2 = 64$

$4^x = 64:16$

$4^x = 4^1$

$\underline{x = 1}$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5}$$

$$x^2 + 2x - 0,5 = 2,5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1; x_2 = -3}$$

- Уравнения, решаемые другими способами:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

$49 \cdot 7^x + 28 \cdot 7^x = 539$

$7^x(49+28) = 539$

$7^x \cdot 77 = 539$

$7^x = 539:77$

$7^x = 7$

$\underline{x = 1}$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$Пусть\, 3^x = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$y_1 = 9; y_2 = -1$$

$$3^x = 9 \qquad 3^x = -1$$

**Решений нет**

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{x = 2}$$

# Логарифмические уравнения

*Простейшее логарифмическое уравнение:*

**$\log_a x = b$** *, где a>0,a≠1 и* ***x>0.***

Пример: $\log_2(x - 4) = 3$

**Алгоритм решения логарифмических уравнений:**

1 способ:

1) *Найти ОДЗ;*
2) *Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;*
3) *Сравнить корни с ОДЗ.*

2 способ:

1) *Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;*
2) *Выполнить проверку.*

# Примеры уравнений

- Простые уравнения:

$\log_5(x-4) = 2$ ОДЗ: $x-4 > 0$

$\log_5(x-4) = \log_5 25$ $x > 4$

$x-4 = 25$

$x=29$

- Уравнения, приводимые к квадратным:

$\lg^2 x + 2\lg x - 1 = 0$ ОДЗ: $x>0$

Пусть $\lg x = y$

$y^2 + 2y - 1 = 0$

$y=1$

$\lg x = 1$

$x=10$

- Уравнения с использованием свойств логарифмов:

$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$

$\log_3(x^2+4x+3) = \log_3 3$

$x^2+4x+3=3$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0 \quad x=-4$

Проверка: $x=0$

$\log_3 1+\log_3 3=1$

$1=1$ => $x=0$ является корнем

$x=-4$

$\log(-3)+\log(-1)=1$

Выражение не имеет смысла => $x=-4$ не является корнем

---

Ответ: $x=0$

# Неравенства

- **<u>Неравенства</u>** – *это выражения, содержащие переменную и записанные с помощью знаков* <u>>, <, ≥, ≤</u>.

- **<u>Решить неравенство</u>** – *значит найти все значения переменной или доказать, что таких значений нет.*

- *Решения неравенств можно отмечать* **<u>на координатной прямой</u>** *или записывать в виде* **<u>промежутка</u>**.

**Примеры:** $2x > 6$, $-4x \le 8$, $x^2 - 16 < 0$, $\frac{(x-6)(x+5)}{x^3-1} \ge 0$

# Показательные неравенства

Примеры: $2^x \geq 8$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27}$ $3^{2x} + 2\cdot 3^x - 15 > 0$

**Алгоритм решения показательных неравенств:**

1). Приводим обе части неравенства к степеням с одинаковыми основаниями;

2). Сравниваем основания с единицей( при **a>1** показательная функция возрастает ═>**знак между показателями не меняем**, при **0<a<1** функция убывает ═> **знак между показателями меняем на противоположный**);

3). Решаем неравенство относительно показателей.

# Примеры решения неравенств

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Основание $\frac{1}{3}$ < 0 =>

=> знак неравенства меняем на противоположный

$x \ge 3$

Ответ: $x \ge 3$

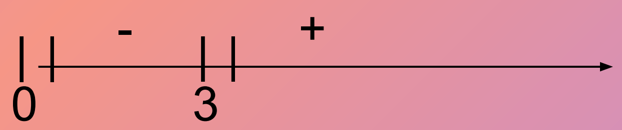
$3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 \ge 0$

Пусть $3^x = y$, ОДЗ: $y > 0$

$y^2 + 2y - 15 \ge 0$

$y_1 = 3$, $y_2 = -5$ ¢ ОДЗ

Решаем методом интервалов




$y \ge 3 \Rightarrow 3^x \ge 3$

Основание 3>0 =>знак неравенства не меняем

$x \ge 1$

Ответ: $x \ge 1$.

# Логарифмические неравенства

Примеры: $\log_4(x-2) \le 3$ $\log_{0,3}(x^2-1) > -3$

**Алгоритм решения неравенств:** 1). Находим ОДЗ;

2). Решаем логарифмическое неравенство:

- приводим обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;

- сравниваем основания с единицей( при **a>1** функция логарифмическая возрастает => **знак между подлогарифмическими выражениями не меняем**, при **0<a<1** функция убывает => **меняем на противоположный**);

- решаем неравенство с подлогарифмическими выражениями;

3). Находим общие решения.

# Примеры решения неравенств

$\log_4(x-2) \le 3$ ОДЗ: $x-2 > 0$

$\log_4(x-2) \le \log_4 64$ $x > 2$

Основание 4≥0 => знак между подлогарифмическими выражениями не меняем

$x-2 \le 64$

$x \le 66$

Общее решение $\begin{cases} x \le 66 \\ x \rangle 2 \end{cases}$ => $2 < x \le 66$

Ответ: x є (2;66]

# Системы уравнений и неравенств

- **Системы уравнений решаются:**

*- способом подстановки;*

*- способом сложения;*

*- графическим способом.*

**Системы неравенств:**

*- решается первое неравенство;*

*- решается второе неравенство;*

*- находятся общие решения.*

# Удачи!

**Тест.**

*Выполнение заданий:*

***1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 16.***

# Ответы:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 13 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| б | а | б | г | г | в | в | 2 | $2\pi n,\ n \in Z$ | $(-\infty;-4)$ |

# Молодцы!

Домашнее задание: **8, 9, 10, 11, 12, 15, 17.**