

УРАВНЕНИЯ

и неравенства

Повторение. 11 класс.

Учитель математики МБОУ СОШ №20 Мелюхина Т.А.

Уравнения

- Равенство, содержащее переменную, называется уравнением.
- Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.
- Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Примеры: $2x-3=5x+1$; $\frac{x-4}{x+2} = \frac{x}{x-2}$; $x^2-2x+1=0$.

Тригонометрические уравнения

$$\underline{\cos t = a}$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\cos t = 1}$$

$$t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\cos t = -1}$$

$$t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\cos t = 0}$$

$$t = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = a}$$

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = 1}$$

$$t = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = -1}$$

$$t = -\pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\sin t = 0}$$

$$t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\operatorname{tg} t = a}$$

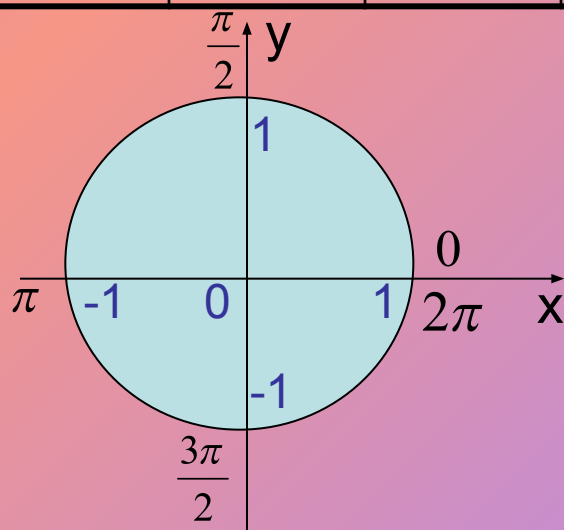
$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\operatorname{ctg} t = a}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-



Примеры уравнений

• Простые уравнения: $2\sin x = 1$; $-3\cos x + 1 = 0$

• Уравнения, приводимые к квадратным:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \cos^2 x + 3\sin x = 3$$

• Уравнения с разложением на множители:

$$\cos^2 x - \cos x = 0; \quad \sin 2x + \cos x = 0; \quad \cos 6x - \cos 2x = 0$$

• Однородные уравнения первой степени:

$$a\sin x + b\cos x = 0 \quad \sin x + 2\cos x = 0$$

• Однородные уравнения второй степени:

$$3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

Иррациональные уравнения

- Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.

Пример: $\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$

Алгоритм решения уравнения:

1 способ:

- 1) Решить уравнение, возведя обе части уравнения в квадрат;
- 2) Сделать проверку.

2 способ

Привести уравнение к равносильной системе, используя определение и возведение в квадрат.

Примеры уравнений

a) $\sqrt{2x-1} = x-2$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$2x-1 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 5, x_2 = 1$$

Проверка:

$$\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 5 - 2$$

$$3 = 3$$

Равенство верное \Rightarrow

$\Rightarrow x=5$ явл. корнем

$$\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1 - 2$$

Равенство неверное \Rightarrow

$\Rightarrow x=1$ не явл. корнем

Ответ: $x=5$.

b) $\sqrt{2x-1} = x-2$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-1=(x-2)^2, \\ x-2 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-1=x^2-4x+4, \\ x \geq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-6x+5=0, \\ x \geq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5, x=1, \\ x \geq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

Ответ: $x=5$

Показательные уравнения

Простейшее показательное уравнение:

$$\underline{a^x = b}, \quad \text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

- Уравнение имеет единственный корень, если $b > 0$.

Алгоритм решения простейшего показательного уравнения:

$$a^x = b \quad (b \text{ представить в виде } b = a^c)$$

$$a^x = a^c \quad (\text{основания равны} \Rightarrow \text{показатели равны})$$

$$\underline{x = c}$$

- Уравнение не имеет решений, если $b \leq 0$.

Примеры уравнений

• Простые уравнения:

$$4^{x+2} = 64$$

$$4^x \cdot 4^2 = 64$$

$$4^x = 64 : 16$$

$$4^x = 4^1$$

$$x = 1$$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$$

$$2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5}$$

$$x^2 + 2x - 0,5 = 2,5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1; x_2 = -3}$$

• Уравнения, решаемые другими способами:

$$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$$

$$49 \cdot 7^x + 28 \cdot 7^x = 539$$

$$7^x(49+28) = 539$$

$$7^x \cdot 77 = 539$$

$$7^x = 539 : 77$$

$$7^x = 7$$

$$x = 1$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\text{Пусть } 3^x = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$y_1 = 9; y_2 = -1$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = -1$$

$$3^x = 3^2$$

Решений нет

$$\underline{x = 2}$$

Логарифмические уравнения

Простейшее логарифмическое уравнение:

$$\log_a x = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1 \text{ и } \underline{x > 0}.$$

Пример: $\log_2(x - 4) = 3$

Алгоритм решения логарифмических уравнений:

1 способ:

- 1) Найти ОДЗ;
- 2) Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;
- 3) Сравнить корни с ОДЗ.

2 способ:

- 1) Решить уравнение, приведя обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;
- 2) Выполнить проверку.

Примеры уравнений

• Простые уравнения:

$$\log_5(x-4) = 2$$

$$\text{ОДЗ: } x-4 > 0$$

$$\log_5(x-4) = \log_5 25$$

$$\underline{x > 4}$$

$$x-4 = 25$$

$$x=29$$

• Уравнения, приводимые к квадратным:

$$\lg^2 x + 2\lg x - 1 = 0 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\text{Пусть } \lg x = y$$

$$y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y=1$$

$$\lg x = 1$$

$$\underline{x=10}$$

- Уравнения с использованием свойств логарифмов:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$$

$$\log_3(x^2+4x+3) = \log_3 3$$

$$x^2+4x+3=3$$

$$x^2+4x=0$$

$$x(x+4)=0$$

$$x=0 \quad x=-4$$

Проверка: $x=0$

$$\log_3 1 + \log_3 3 = 1$$

$1=1 \Rightarrow x=0$ является корнем

$$x=-4$$

$$\log(-3) + \log(-1) = 1$$

Выражение не имеет смысла $\Rightarrow x=-4$ не является корнем

Ответ: $x=0$

Неравенства

- Неравенства – это выражения, содержащие переменную и записанные с помощью знаков $>$, $<$, \geq , \leq .
- Решить неравенство – значит найти все значения переменной или доказать, что таких значений нет.
- Решения неравенств можно отмечать на координатной прямой или записывать в виде промежутка.

Примеры: $2x > 6$, $-4x \leq 8$, $x^2 - 16 < 0$, $\frac{(x-6)(x+5)}{x^3-1} \geq 0$

Показательные неравенства

Примеры: $2^x \geq 8$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27}$ $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 > 0$

Алгоритм решения показательных неравенств:

- 1). Приводим обе части неравенства к степеням с одинаковыми основаниями;
- 2). Сравниваем основания с единицей(при $a > 1$ показательная функция возрастает \Rightarrow знак между показателями не меняем, при $0 < a < 1$ функция убывает \Rightarrow знак между показателями меняем на противоположный);
- 3). Решаем неравенство относительно показателей.

Примеры решения неравенств

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Основание $\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$

\Rightarrow знак неравенства
меняем на
противоположный

$$x \geq 3$$

Ответ: $x \geq 3$

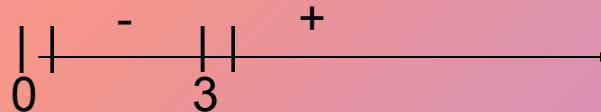
$$3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 \geq 0$$

Пусть $3^x = y$, ОДЗ: $y > 0$

$$y^2 + 2y - 15 \geq 0$$

$$y_1 = 3, y_2 = -5 \notin \text{ОДЗ}$$

Решаем методом интервалов



$$y \geq 3 \Rightarrow 3^x \geq 3$$

Основание $3 > 0 \Rightarrow$ знак неравенства
не меняем

$$x \geq 1$$

Ответ: $x \geq 1$.

Логарифмические неравенства

Примеры: $\log_4(x-2) \leq 3$ $\log_{0,3}(x^2-1) > -3$

Алгоритм решения неравенств: 1). Находим ОДЗ;

2). Решаем логарифмическое неравенство:

- приводим обе части к логарифмам с одинаковыми основаниями;

- сравниваем основания с единицей(при $a > 1$ функция логарифмическая возрастает \Rightarrow знак между подлогарифмическими выражениями не меняем, при $0 < a < 1$

функция убывает \Rightarrow меняем на противоположный);

- решаем неравенство с подлогарифмическими выражениями;

3). Находим общие решения.

Примеры решения неравенств

$$\log_4(x-2) \leq 3$$

$$\text{ОДЗ: } x-2 > 0$$

$$\log_4(x-2) \leq \log_4 64$$

$$x > 2$$

Основание $4 \geq 0 \Rightarrow$ знак между
подлогарифмическими
выражениями не меняем

$$x-2 \leq 64$$

$$x \leq 66$$

$$\text{Общее решение } \begin{cases} x \leq 66 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 66$$

Ответ: $x \in (2; 66]$

Системы уравнений и неравенств

• Системы уравнений решаются:

- способом подстановки;
- способом сложения;
- графическим способом.

Системы неравенств:

- решается первое неравенство;
- решается второе неравенство;
- находятся общие решения.

удачи!

Тест.

Выполнение заданий:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 16.

ОТВЕТЫ:

1	2	3	4	5	6	7	13	14	16
б	а	б	г	г	в	в	2	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; -4)$

Молодцы!

Домашнее задание: 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17.