Решение сложных задач по методу математической индукции

З.М.Кенжаев
МБОУ СОШ с. Константиновка, Николаевский район,
Хабаровский край

Прямые и обратные теоремы

Пример 1. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

Решение. Условие M теоремы Пифагора можно записать в виде следующего высказывания:

$$M \equiv \{\text{в треугольнике } ABC \text{ угол } C - \text{прямой}\},$$

а заключение N этой теоремы формулируется так:

$$N \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\},$$

где a, b, c — стороны, лежащие против углов A, B и C соответственно.

Справедлива также теорема, обратная теореме Пифагора: если $c^2 = a^2 + b^2$, то угол C — прямой.

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться либо теоремой косинусов, либо третьим признаком равенства треугольников (по трем сторонам).

Метод математической индукции

Пример 2. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{$четырехугольник Q — ромб$\}$,
$B \equiv \{$диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны$\}$;
2) $A \equiv \{$произведение чисел x и y равно нулю$\}$,
$B \equiv \{$хотя бы одно из чисел x, y равно нулю$\}$.

Решение. 1) Здесь $A \Rightarrow B$, но из B не следует A.
2) В этом случае $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, т. е. $A \Leftrightarrow B$.

Пример 3. Доказать, что число $a = n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Доказательство. Эту задачу можно решить, применив метод математической индукции. Приведем другой способ решения. Заметим, что натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда на 6 делится число $a+6k$, где k — целое число. В частности, число a делится на 6, если число $b = a - 18n = n^3 - n$ делится на 6. Но $b = n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому число b делится на 6, откуда следует, что число a также делится на 6.

Пример 4. Найти последнюю цифру числа $a = 432^{283}$.

Решение. Последняя цифра у числа a такая же, как и у числа 2^{283}. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 2^k такая же, как у числа 2^p, где p — одно из чисел 1, 2, 3, 4, а разность $k - p$ кратна четырем. Так как $283 = 280 + 3$, где 280 делится на 4, то последняя цифра числа 2^{283} — восьмерка ($2^3 = 8$).

Замечание. Если рассматривать последовательные натуральные степени числа 3 (или числа 7), то можно заметить, что последние цифры получаемых чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 3^{214} такая же, как у числа 3^2, т. е. девятка, так как $214 = 53 \cdot 4 + 2$.

Аналогично, последняя цифра числа 7^{365} — семерка, так как $365 = 91 \cdot 4 + 1$.

Пример 5. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 37^{51} \cdot 49^{15}$, $m = 3$;
2) $a = 2^{127} + 18^{21}$, $m = 17$.

Решение. 1) Заметим, что если натуральное число n не делится на 3, т. е. $n = 3p \pm 1$, где $p \in \mathbf{N}$, то $n^2 = 3q + 1$, где $q \in \mathbf{N}$. Поэтому остаток от деления на 3 числа n^2 равен 1, если n не делится на 3. Числа 37 и 49 не делятся на 3 и, следовательно, остаток от деления на 3 каждого из чисел $37^{50} = (37^2)^{25}$, 49^{14} равен 1, а остаток от деления на 3 числа a совпадает с остатком от деления на три числа $b = 37 \cdot 49 = (36+1)(48+1)$, т. е. равен 1.

2) Так как $2^4 = 16 = 17 - 1$, $18 = 17 + 1$, а $127 = 4 \cdot 31 + 3$, то остаток от деления на 17 числа a совпадает с остатком от деления на 17 числа $b = 2^3 \cdot (-1)^{31} + 1^{21} = -8 + 1 = -7$, т. е. равен 10, поскольку $-7 = 17(-1) + 10$.

Ответ. 1) 1; 2) 10.