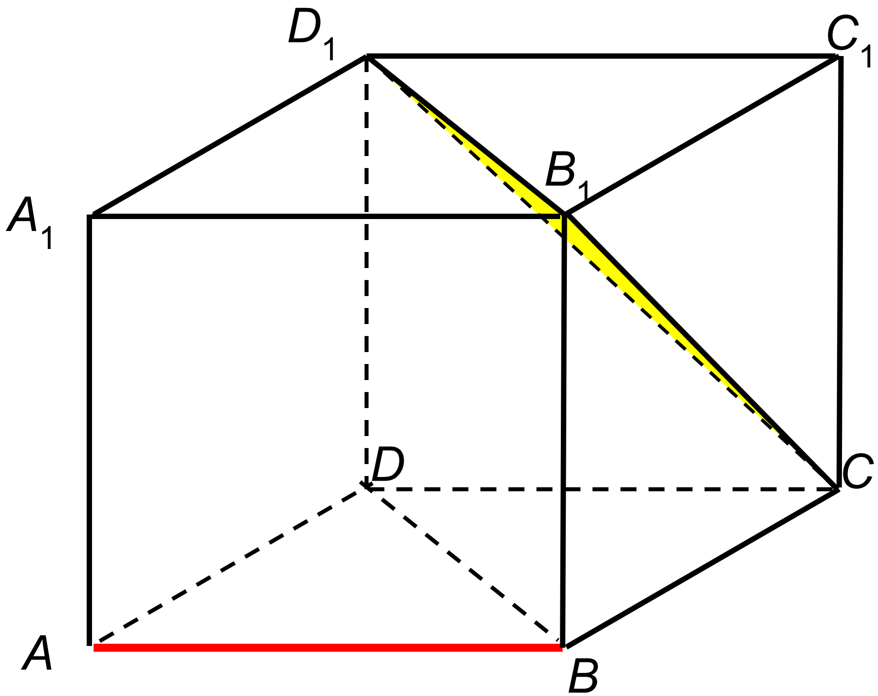
Угол между прямой и плоскостью. Подготовка к ЕГЭ

Галкин Сергей Михайлович, учитель математики
МБОУ «Гимназия № 41», г. Новоуральск, Свердловская обл.
smgal@bk.ru, smgal.ru

1. В кубе A … D_1 найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



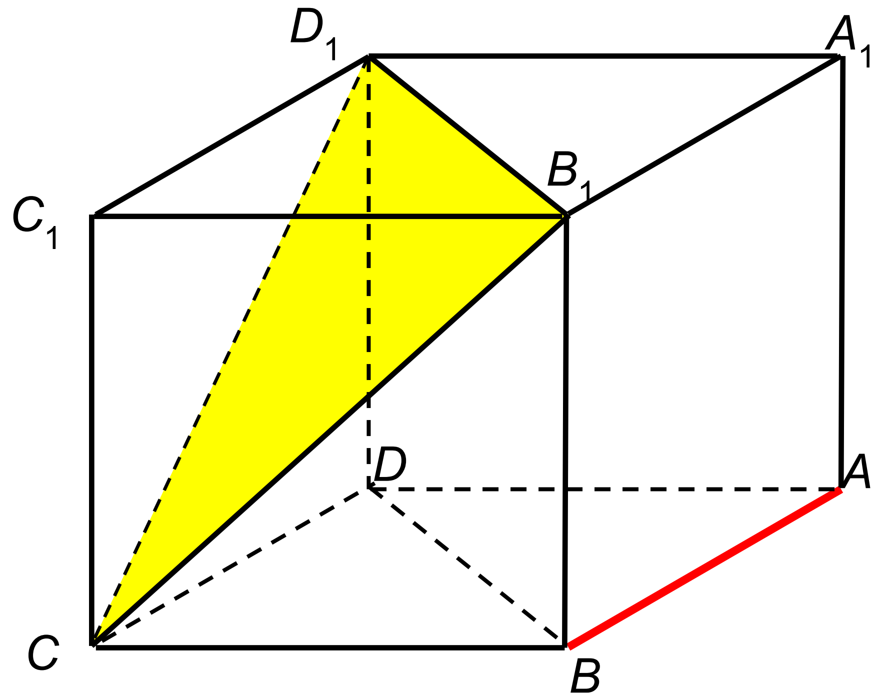
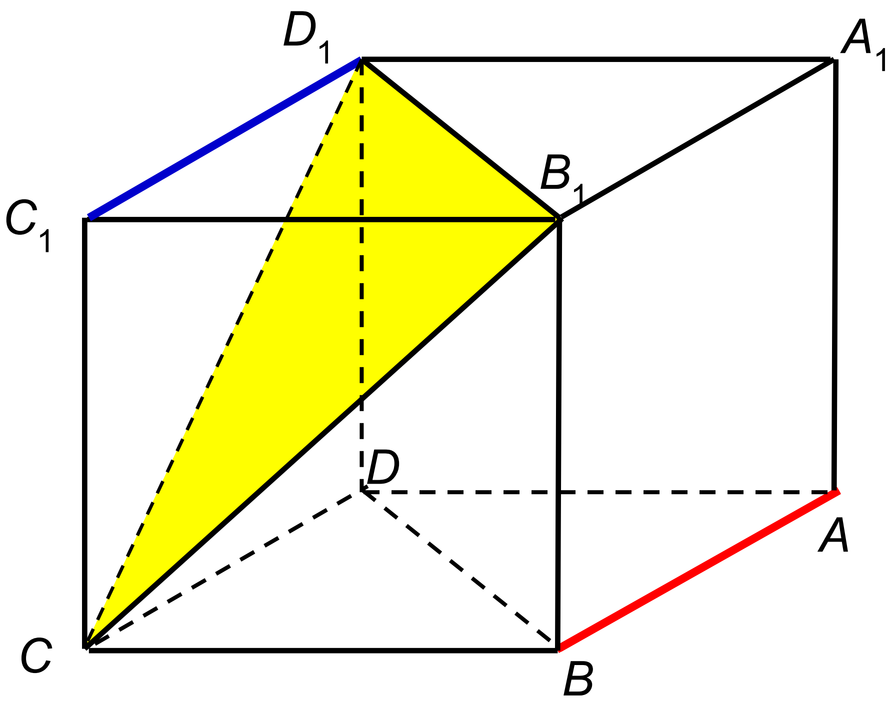


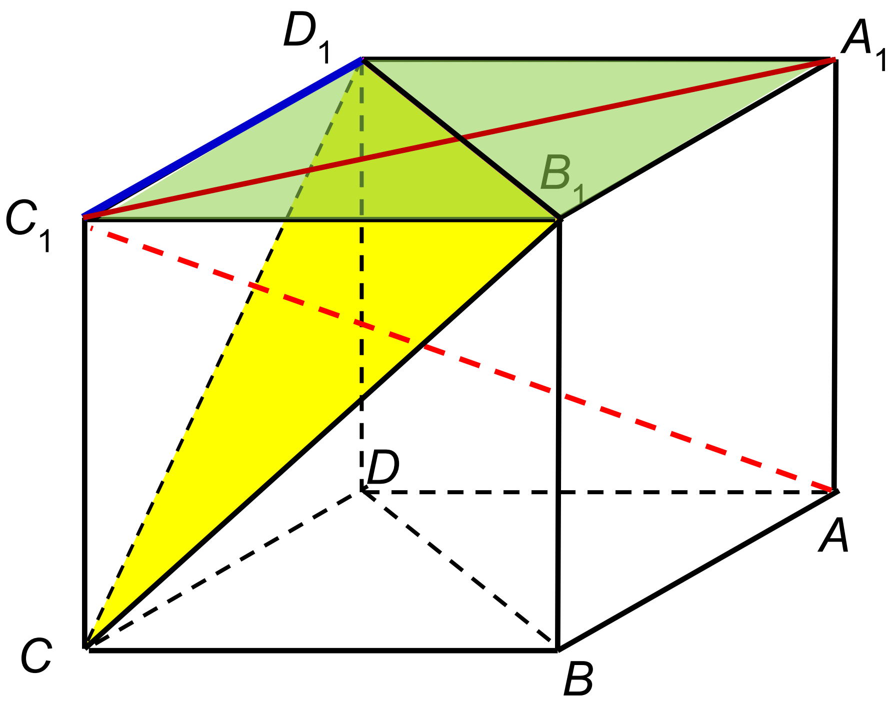
Рисунок неудачный: плоскость треугольника CB_1D_1 плохо просматривается

Поменяли местами буквы A и A_1. Теперь все хорошо просматривается.



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой AB и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой C_1D_1 и пл. CB_1D_1.

1. В кубе A … D_1 найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой **AB** и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой $\mathbf{C_1D_1}$ и пл. CB_1D_1.

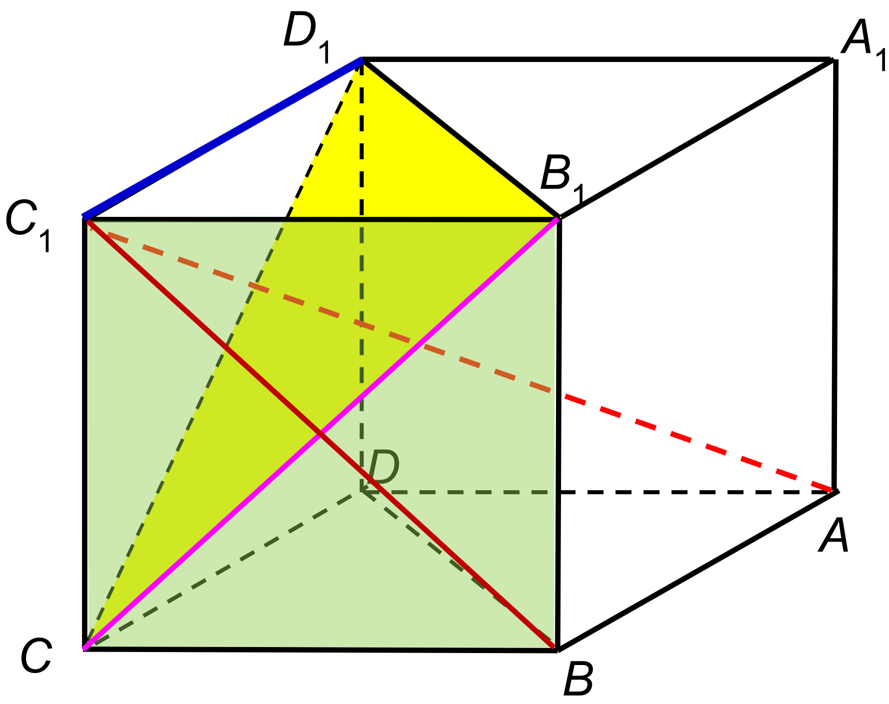
$\mathbf{A_1C_1}$ является проекцией наклонной $\mathbf{AC_1}$ на пл. $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$

По теореме о трех перпендикулярах

$\mathbf{B_1D_1} \perp \mathbf{AC_1}$

(прямая $\mathbf{B_1D_1}$ лежит в плоскости $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ и перпендикулярна к проекции $\mathbf{A_1C_1}$ наклонной $\mathbf{AC_1}$ на плоскость $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ поэтому она ($\mathbf{B_1D_1}$) перпендикулярна и к самой наклонной $\mathbf{AC_1}$)

1. В кубе A … D_1 найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



Так как $AB \parallel C_1D_1$, то угол между прямой **AB** и пл. CB_1D_1 равен углу между прямой $\mathbf{C_1D_1}$ и пл. CB_1D_1.

$\mathbf{A_1C_1}$ является проекцией наклонной $\mathbf{AC_1}$ на пл. $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$

По теореме о трех перпендикулярах

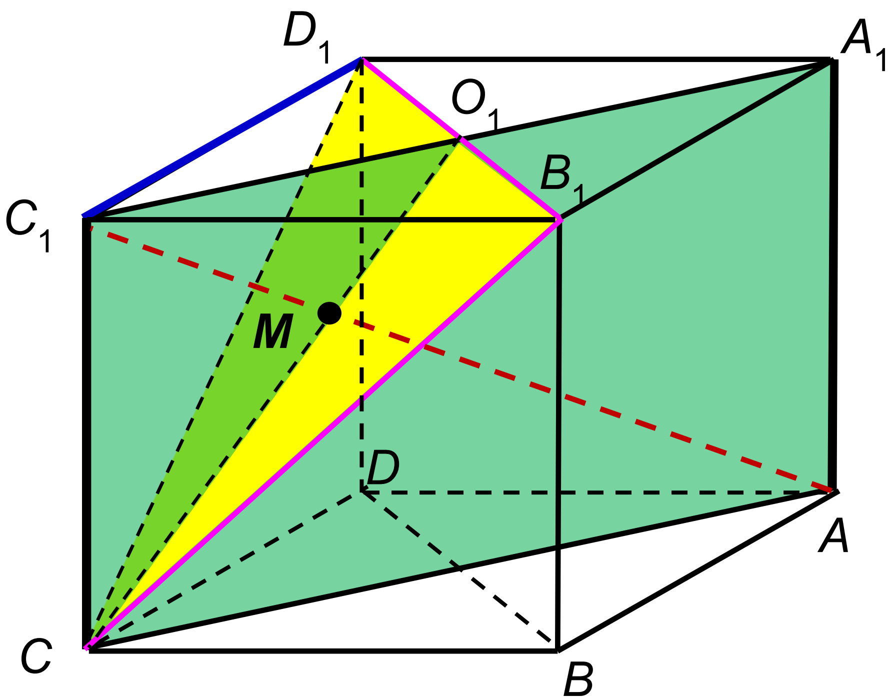
$\mathbf{B_1D_1} \perp \mathbf{AC_1}$

(прямая $\mathbf{B_1D_1}$ лежит в плоскости $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ и перпендикулярна к проекции $\mathbf{A_1C_1}$ наклонной $\mathbf{AC_1}$ на плоскость $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ поэтому она ($\mathbf{B_1D_1}$) перпендикулярна и к самой наклонной $\mathbf{AC_1}$)

Аналогично $\mathbf{CB_1} \perp \mathbf{AC_1}$

(прямая $\mathbf{CB_1}$ лежит в плоскости $\mathbf{CC_1B_1B}$ и перпендикулярна к проекции $\mathbf{BC_1}$ наклонной $\mathbf{AC_1}$ на плоскость $\mathbf{CC_1B_1B}$ поэтому она ($\mathbf{CB_1}$) перпендикулярна и к самой наклонной $\mathbf{AC_1}$)

1. В кубе $A \dots D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



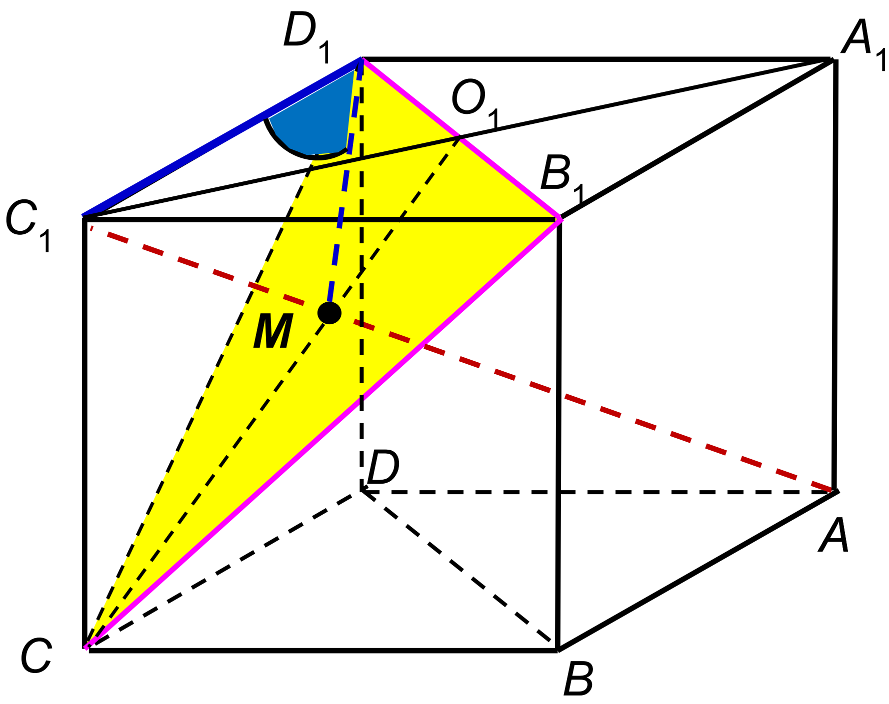
Итак, прямая **AC_1** перпендикулярна к двум пересекающимся прямым **B_1D_1** и **CB_1**, лежащим в плоскости CB_1D_1, значит, эта прямая перпендикулярна плоскости CB_1D_1.

Построим точку пересечения прямой **AC_1** с плоскостью CB_1D_1.

Прямая **AC_1** лежит в диагональной плоскости **AA_1C_1C** , которая пересекает верхнюю грань **$A_1B_1C_1D_1$** по прямой **A_1C_1**, а плоскость CB_1D_1 по прямой **O_1C**, где **O_1** – центр квадрата **$A_1B_1C_1D_1$**.

Прямые **AC_1** и **CO_1** лежат в одной плоскости **AA_1C_1C** и пересекаются в некоторой точке M, которая и является точкой пересечения прямой **AC_1** с плоскостью CB_1D_1 .

1. В кубе A … D_1 найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



Итак, прямая AC_1 перпендикулярна к двум пересекающимся прямым B_1D_1 и CB_1, лежащим в плоскости CB_1D_1, значит, эта прямая перпендикулярна плоскости CB_1D_1.

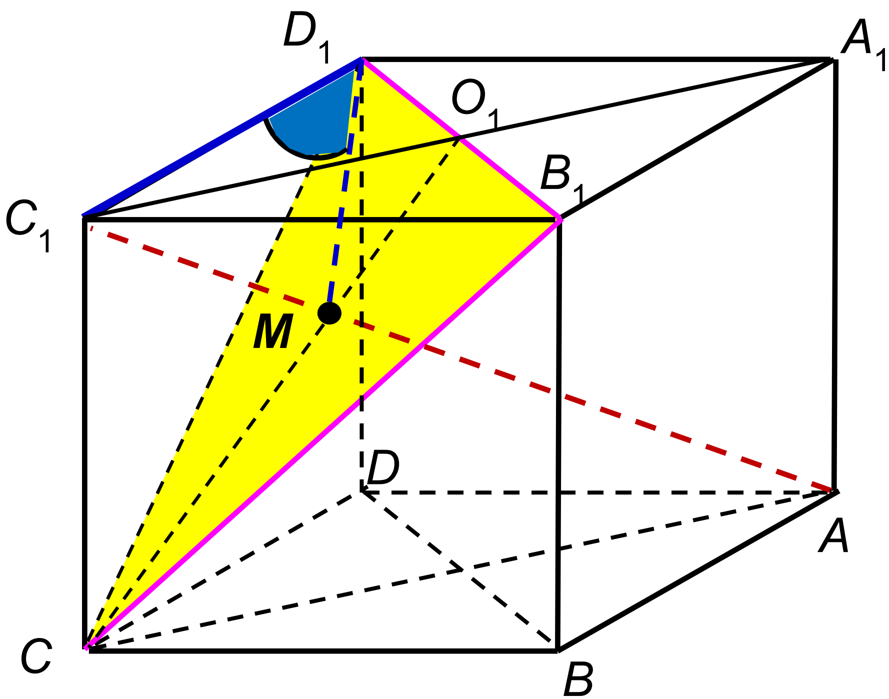
Построим точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1.

Прямая AC_1 лежит в диагональной плоскости AA_1C_1C , которая пересекает верхнюю грань **$A_1B_1C_1D_1$** по прямой **A_1C_1**, а плоскость CB_1D_1 по прямой **O_1C**, где **O_1** – центр квадрата **$A_1B_1C_1D_1$**.

Прямые AC_1 и **CO_1** лежат в одной плоскости AA_1C_1C и пересекаются в некоторой точке M, которая и является точкой пересечения прямой AC_1 с плоскостью CB_1D_1 .

Таким образом, C_1M – перпендикуляр к плоскости CB_1D_1. Тогда MD_1 - проекция C_1D_1 на эту плоскость CB_1D_1 и угол C_1D_1M – искомый угол прямой C_1D_1 (а, значит, и AB) с плоскостью CB_1D_1

1. В кубе A … D_1 найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.



Треугольники C_1MO_1 и AMC подобны по двум углам . Откуда

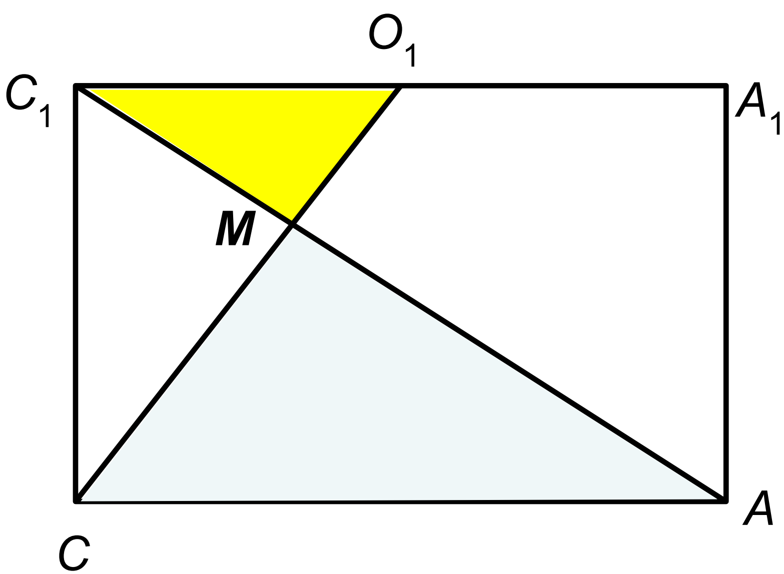
$$\frac{C_1M}{MA} = \frac{C_1O_1}{AC} = \frac{1}{2}$$

Значит, $C_1M = k$, $MA = 2k$, $C_1A = 3k$

$$C_1M = \frac{1}{3}AC$$

Пусть ребро куба равно a. Тогда

$$AC_1 = a\sqrt{3} \qquad C_1M = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$



Из прямоугольного треугольника C_1MD_1

$$\sin\angle C_1D_1M = \frac{C_1M}{C_1D_1} = \frac{\frac{1}{3}a\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $A…D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится ими на три равные части.

Задача 372. Геометрия 10-11: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян и др. 11-е изд. - М. : Просвещение, 2002.