




ТЕМА

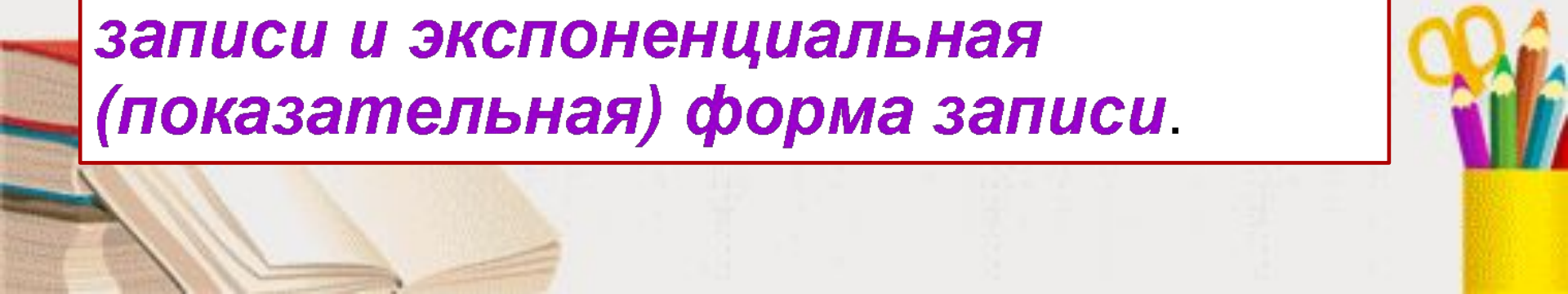
**Тригонометрическая
форма записи
комплексного числа
10 класс**



A background image showing a row of colorful books on a shelf. A large, solid yellow rectangular box is positioned in the upper middle part of the image, partially overlapping the books.

Комплексные числа, заданные парами $(0, y)$, называют **чисто мнимыми числами**.

Для комплексных чисел существует **несколько форм записи: алгебраическая форма записи, тригонометрическая форма записи и экспоненциальная (показательная) форма записи.**

A background image showing a stack of books on the left and a yellow pencil holder with several colored pencils and a pair of yellow scissors on the right.

ТЕМА

Алгебраическая форма - это такая форма записи комплексных чисел, при которой комплексное число z , заданное парой вещественных чисел (x, y) , записывается в виде

$$z = x + iy$$

где использован символ i , называемый **мнимой единицей**.

Определение

Число x называют **вещественной (реальной) частью комплексного числа** $z = x + jy$ и обозначают $\operatorname{Re} z$.

Число y называют **мнимой частью комплексного числа** $z = x + jy$ и обозначают $\operatorname{Im} z$.

Определения

Комплексные числа, у которых $\text{Im } z = 0$, являются **вещественными числами**.

Комплексные числа, у которых $\text{Re } z = 0$, являются **чисто мнимыми числами**.

Сложение и вычитание КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

$$\mathbf{z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),}$$

$$\mathbf{z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).}$$

Умножение комплексных чисел

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - 1 \cdot y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Определение

Два комплексных числа $z = x + jy$ и $\bar{z} = x - jy$, у которых вещественные части одинаковые, а мнимые части отличаются знаком, называются **комплексно сопряжёнными числами**.

Свойства комплексно сопряжённых чисел

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\overline{z}} = z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Определение

Модулем комплексного числа

$z = x + jy$ называют вещественное число, обозначаемое $|z|$ и определенное по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Свойства модулей КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|,$$


$$|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|.$$

Деление комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{\overline{z_2} z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Определение

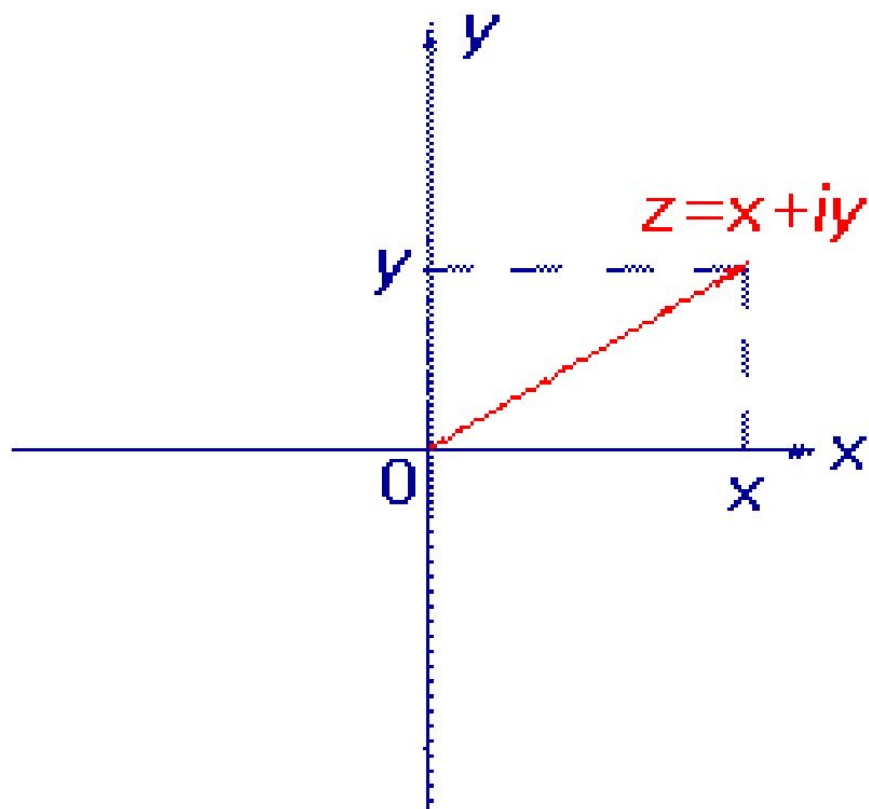
Рассмотрим плоскость с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат  и напомним, что **радиус-вектором** на плоскости называют вектор, начало которого совпадает с началом системы координат.

Определение

Назовем рассматриваемую плоскость **комплексной плоскостью**, и будем представлять комплексное число

$z = x + jy$ радиус-вектором с координатами (x, y) .

Геометрическое представление КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

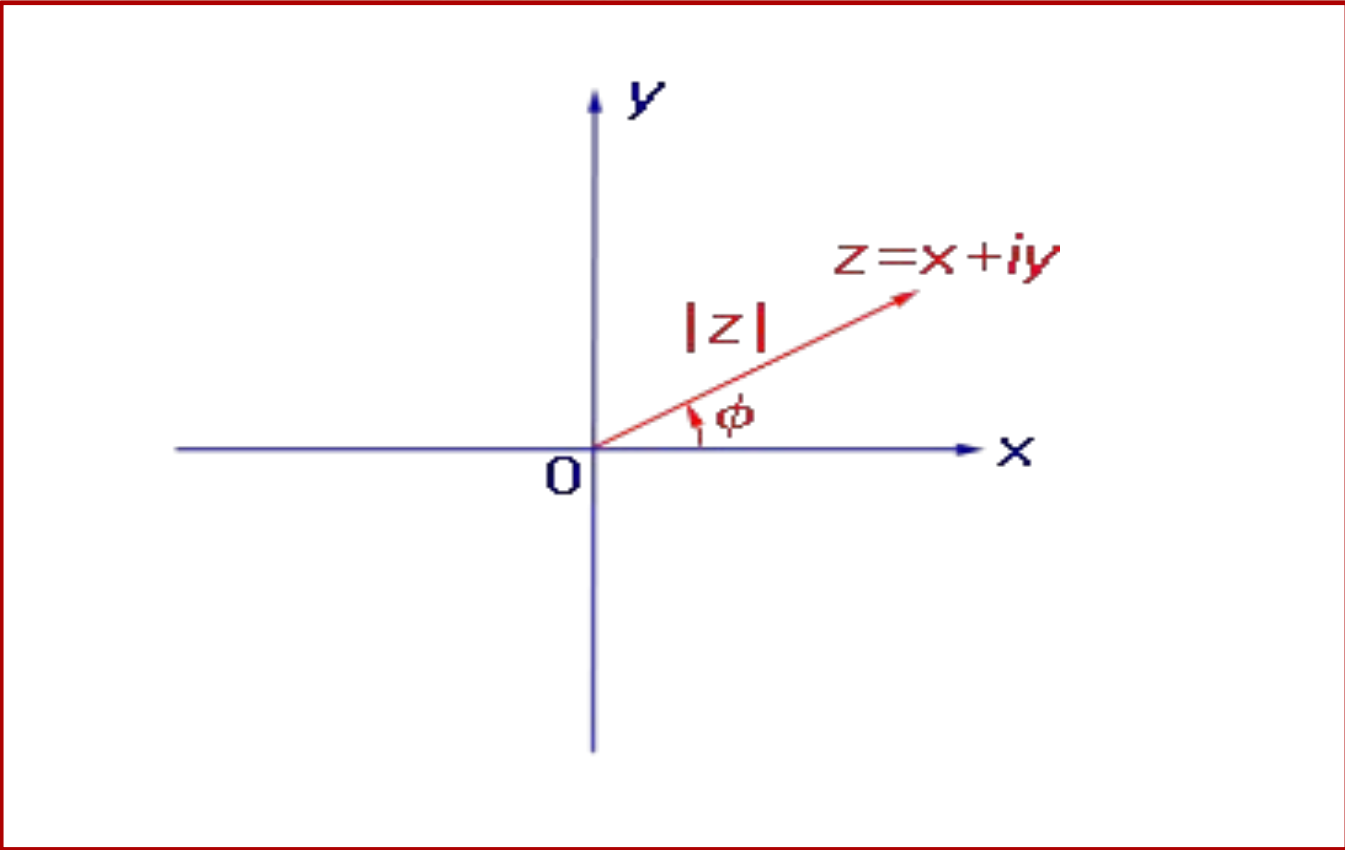


Определение

Аргументом комплексного числа z

называют угол φ между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором z .

Аргумент комплексного числа z считают **положительным**, если поворот от положительного направления вещественной оси к радиус-вектору z происходит **против часовой стрелки**, и **отрицательным** - в случае поворота **по часовой стрелке** (см. рис.).



Определение

Поскольку аргумент любого комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$ где k - произвольное целое число, то вводится, **главное значение аргумента**, обозначаемое $\arg z$ и удовлетворяющее неравенствам:

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Тогда оказывается справедливым равенство:

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометрическое представление комплексного числа

Если для комплексного числа $z = x + jy$
нам известны его модуль $r = |z|$ и его
аргумент φ , то мы можем найти
вещественную и мнимую части по
формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Тригонометрическая запись комплексного числа

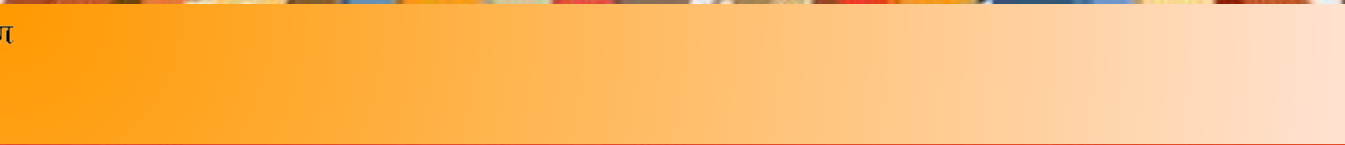
Из формул вытекает, что любое отличное от нуля комплексное число $z = x + iy$ может быть записано в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi$$

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



Расположение числа	Знаки и	Главное значение аргумента	Аргумент	Примеры
Положительная вещественная полуось	$x > 0,$ $y = 0$	0	$\varphi = 2k\pi$	$z = 3,$ $\begin{cases} r = 3, \\ \varphi = 2k\pi \end{cases}$
Первый квадрант	$x > 0,$ $y > 0$	$\arctg \left \frac{y}{x} \right $	$\varphi = \arctg \left \frac{y}{x} \right + 2k\pi$	$z = 3 + 4i,$ $\begin{cases} r = 5, \\ \varphi = \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi \end{cases}$
Положительная мнимая полуось	$x = 0,$ $y > 0$	$\frac{\pi}{2}$	$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$z = 2i,$ $\begin{cases} r = 2, \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$
Второй квадрант	$x < 0,$ $y > 0$	$\pi - \arctg \left \frac{y}{x} \right $	$\varphi = \pi - \arctg \left \frac{y}{x} \right + 2k\pi$	$z = -4 + 4i,$ $\begin{cases} r = 4\sqrt{2}, \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$
Отрицательная вещественная полуось	$x < 0,$ $y = 0$	π	$\varphi = \pi + 2k\pi$	$z = -5,$ $\begin{cases} r = 5, \\ \varphi = \pi + 2k\pi \end{cases}$
Третий квадрант	$x < 0,$ $y < 0$	$-\pi + \arctg \left \frac{y}{x} \right $	$\varphi = -\pi + \arctg \left \frac{y}{x} \right + 2k\pi$	$z = -1 - \sqrt{3}i,$ $\begin{cases} r = 2, \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$
Отрицательная мнимая полуось	$x = 0,$ $y < 0$	$-\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$z = -i,$ $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$
Четвёртый квадрант	$x > 0,$ $y < 0$	$-\arctg \left \frac{y}{x} \right $	$\varphi = -\arctg \left \frac{y}{x} \right + 2k\pi$	$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$ $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

The background features a light-colored desk with various school supplies. At the top, a shelf holds several colorful books. In the bottom left, there is a stack of books and an open notebook. In the bottom right, a yellow pencil holder contains several colored pencils and a pair of yellow scissors.

***Спасибо за работу на
уроке!***