Геометрический смысл производной

Решение задач

Задача 1

В 8 № 27485.

Прямая $y = 7x – 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x – 5$ угловые коэффициенты касательной и прямой равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения : $y' = 7$.

$(y = x^2 + 6x – 8)' = 7;$

$2x + 6 = 7;$

$2x = 1;$ $x = 0,5.$

Ответ: 0,5.

Задача 2

В 8 № 27486.

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

Получим

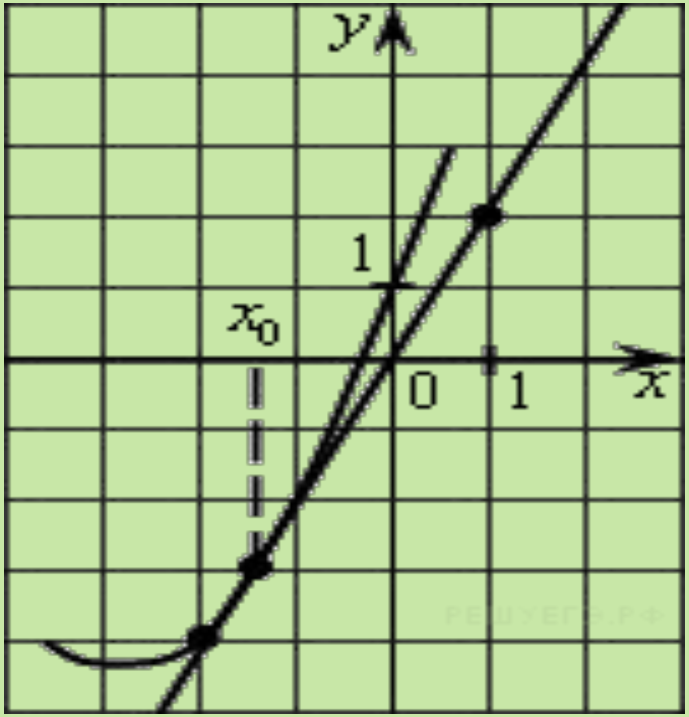
$$\begin{cases} 3x^2+14x+7=-4, \\ x^3+7x^2+7x-6=-4x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x+11=0, \\ x^3+7x^2+11x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{3}, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x^3+7x^2+11x+5=0\ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания (−1).

Ответ: −1.

Задача 3

В 8 № 27503. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

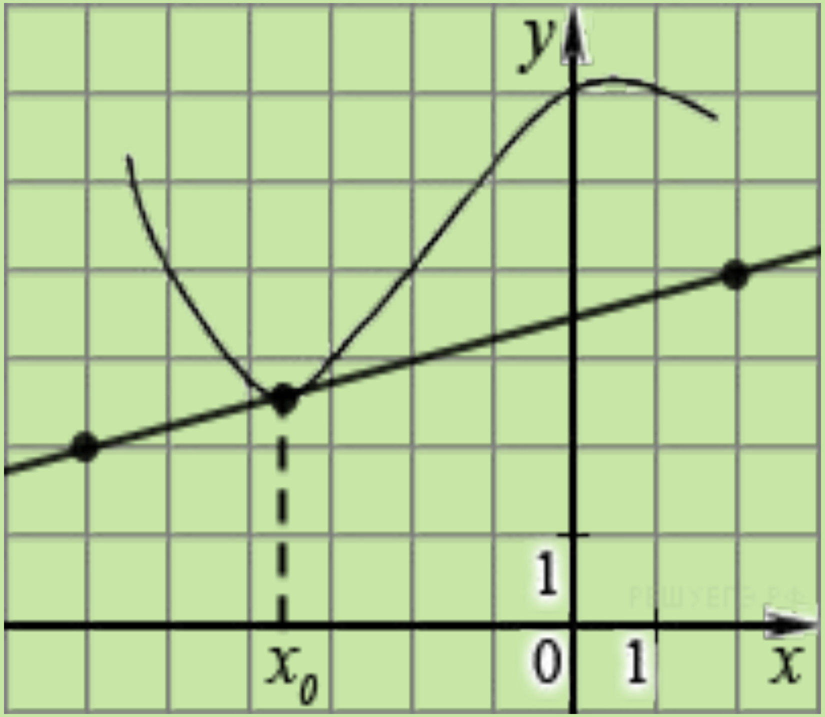
Углом наклона касательной является угол ACB прямоугольного треугольника ABC, у которого A(1;2), B(1;-4), C(-2;-4).

$$y'\left(x_0\right) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

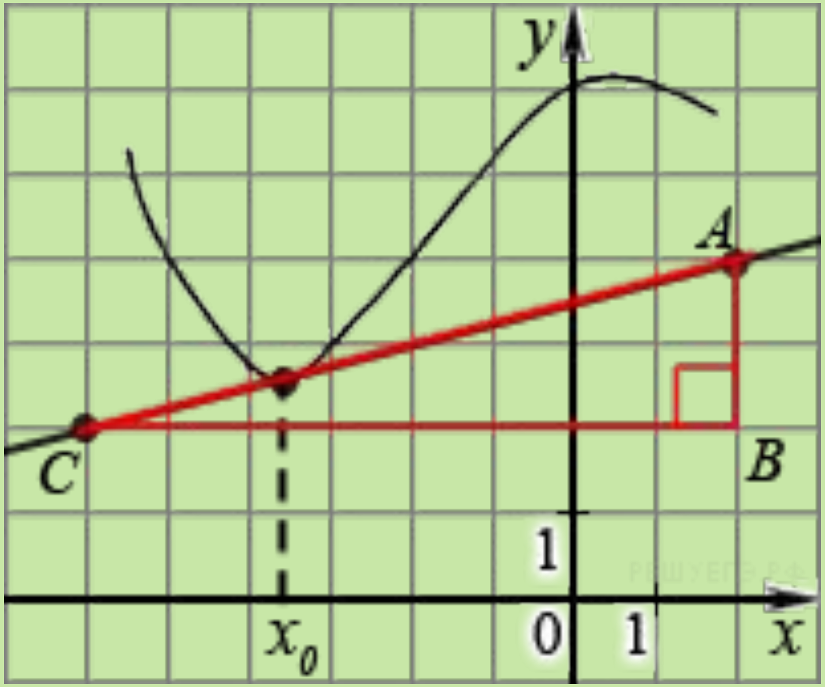
Ответ: 2

Пример 1

- **В 8 № 27504.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



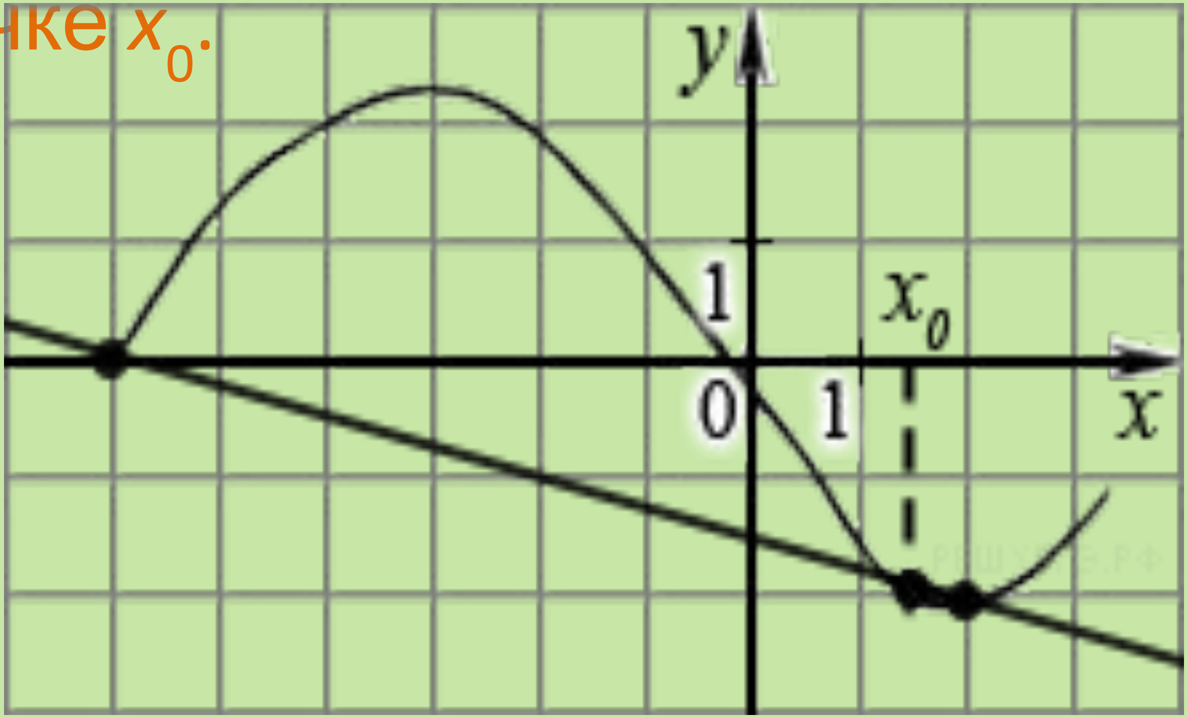
Решение:



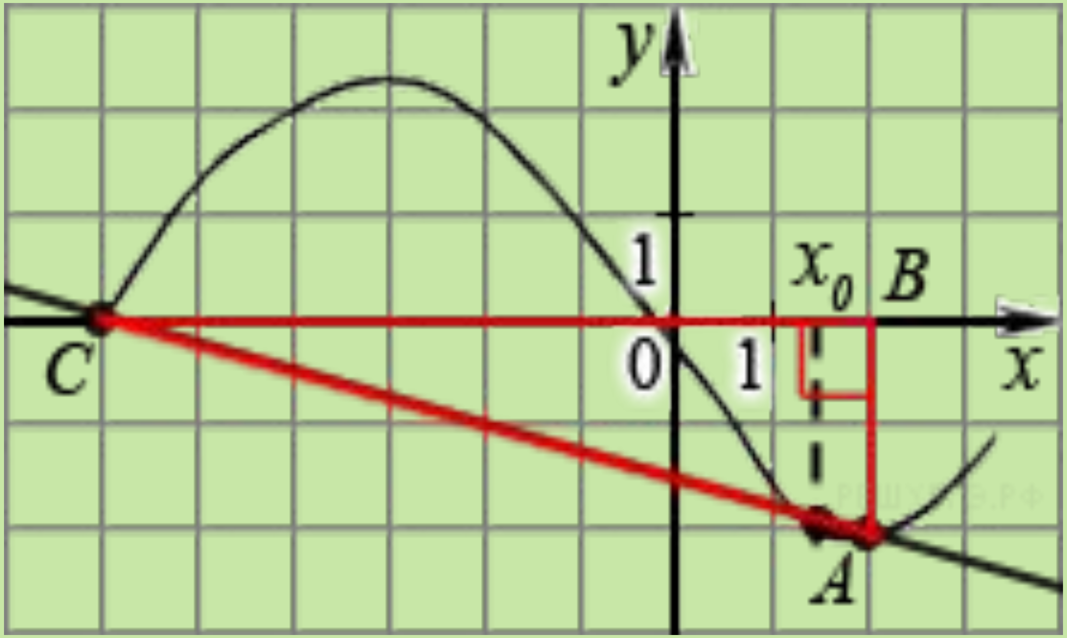
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Пример 2

- **В 8 № 27506.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



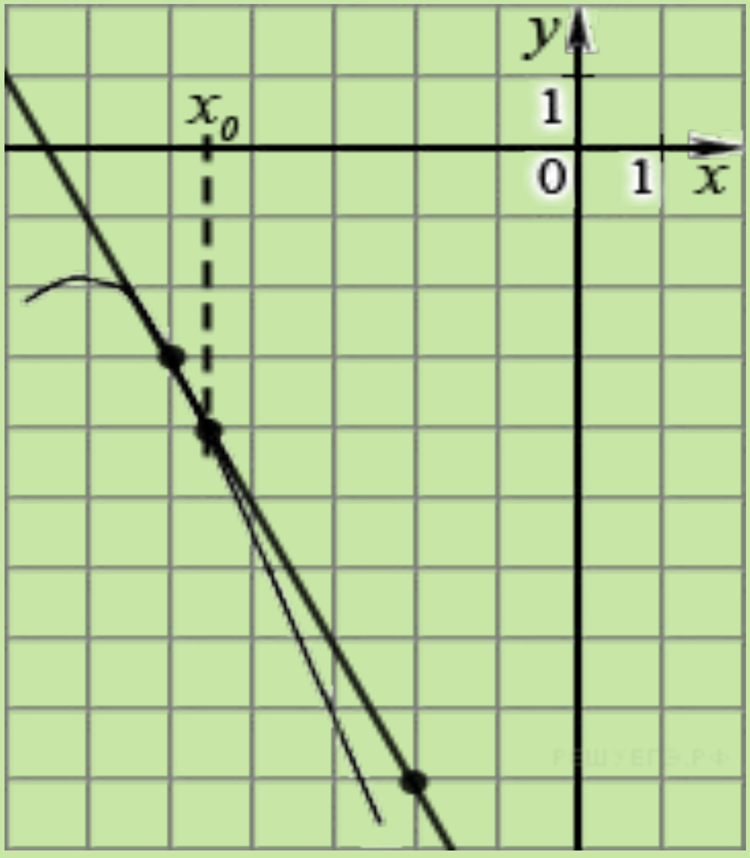
Решение:



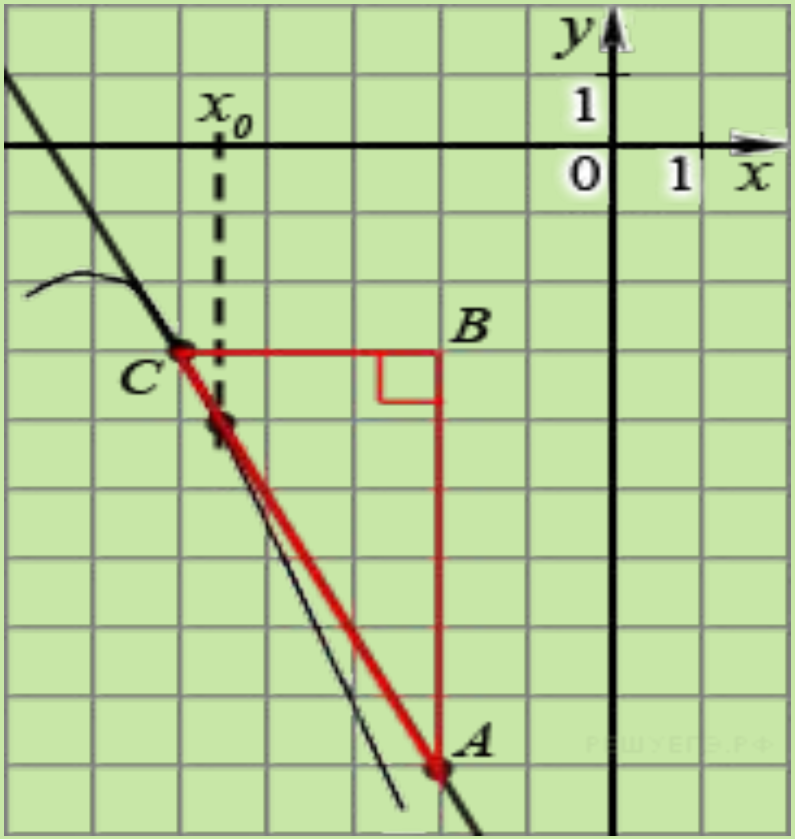
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25$$

Пример 3

- **В 8 № 27505.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Решение:

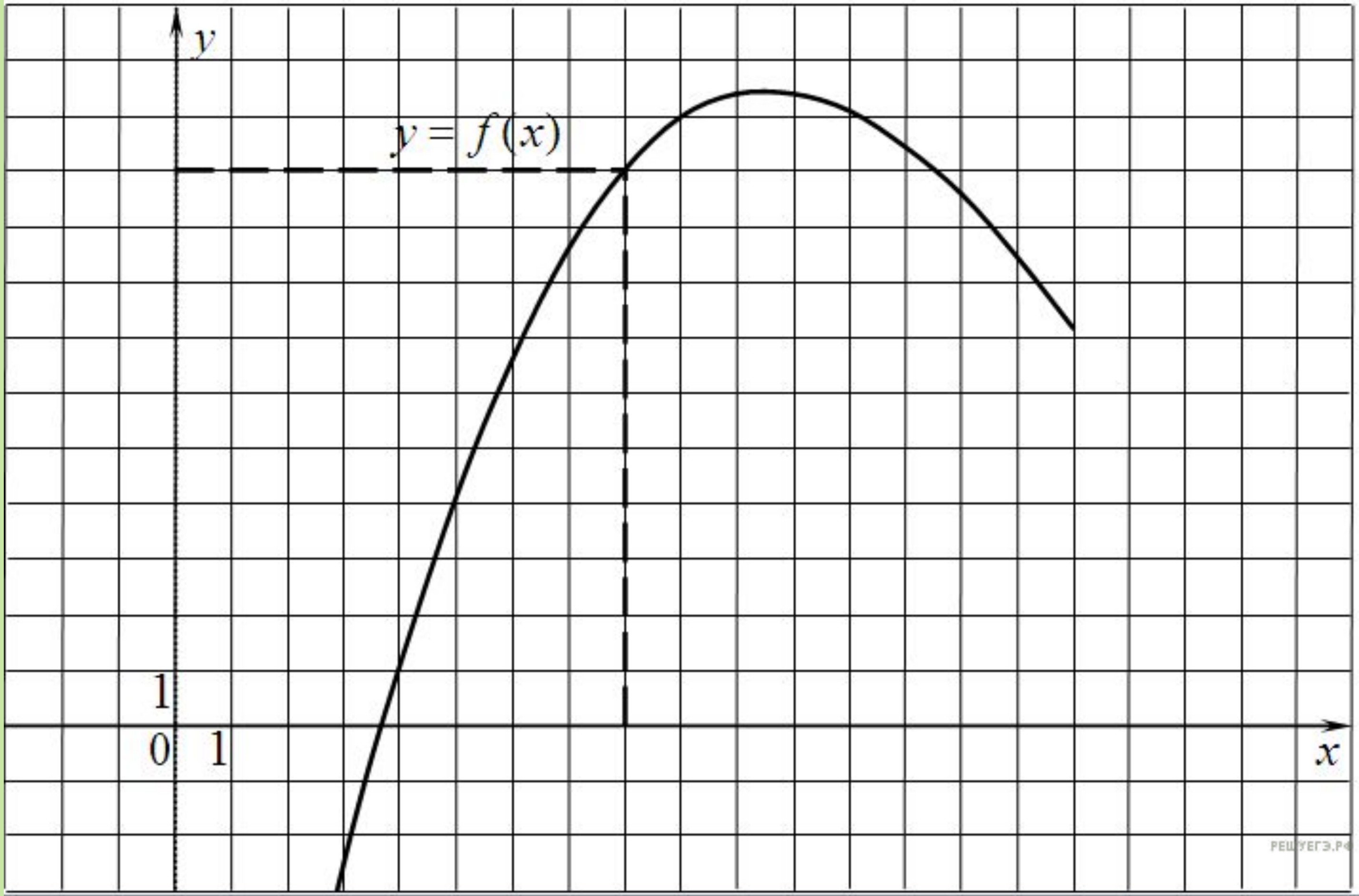


$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2$$

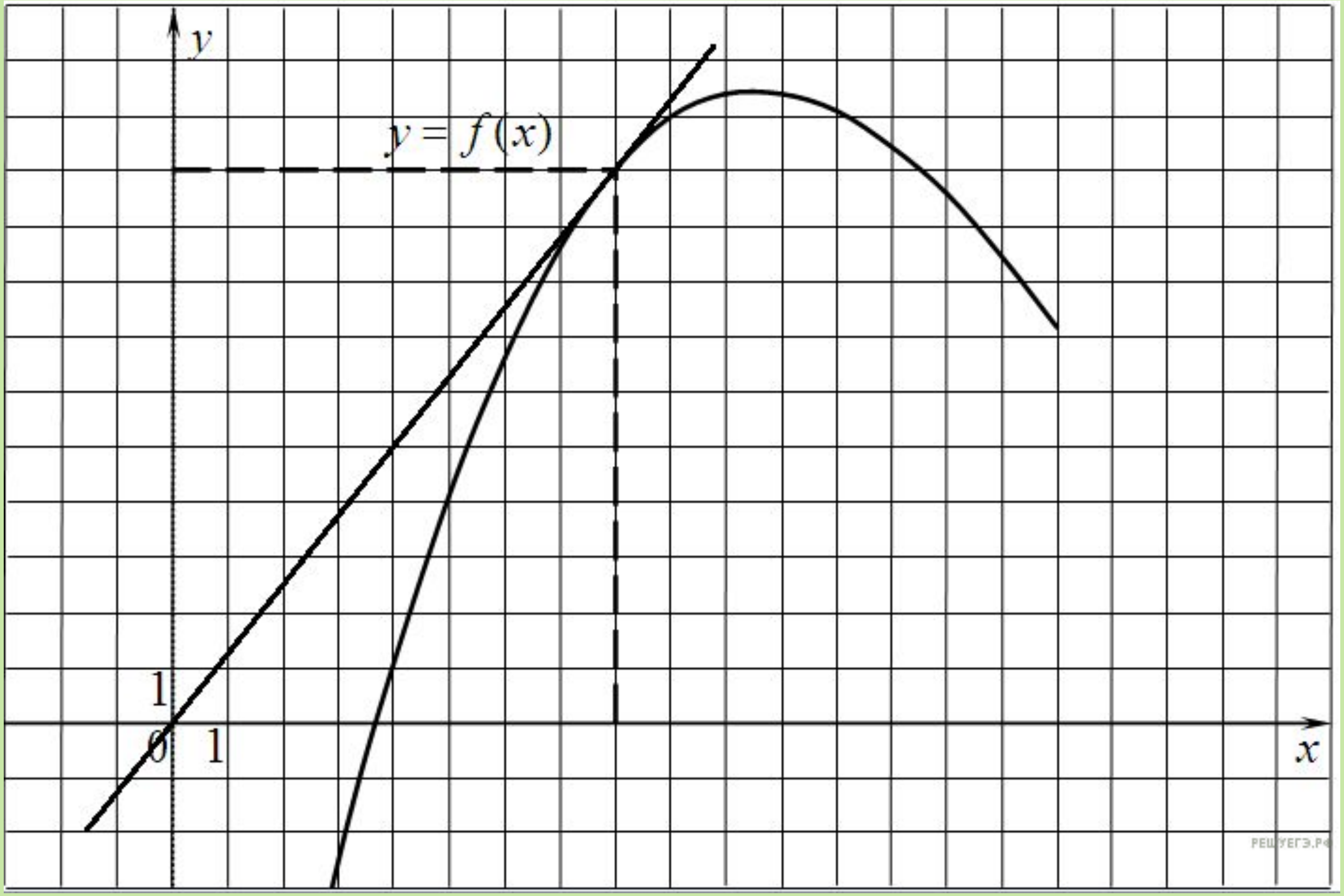
Задача 4

В 8 № 40129.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.


y
y = f (x)
1
0
1
x
РЕШУЕГЭ.РФ

Решение:



Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку

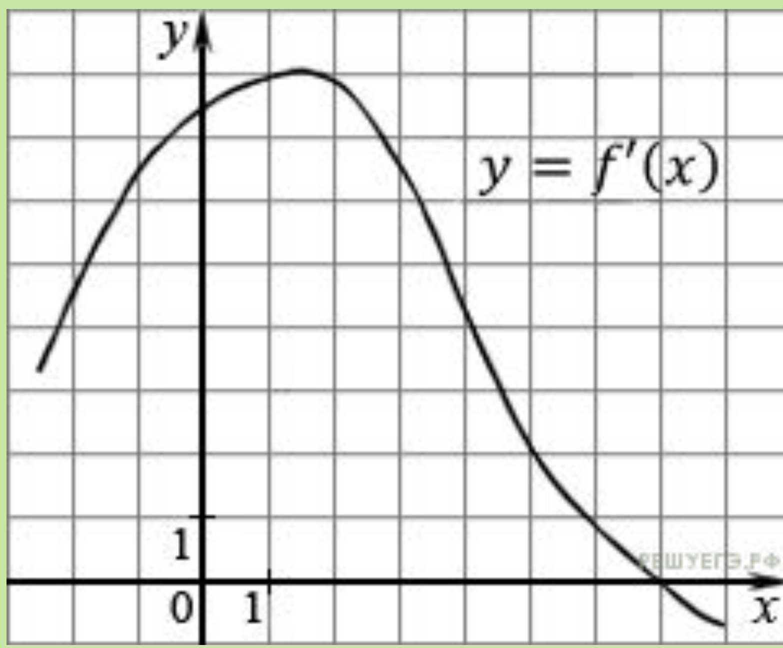
(8; 10), поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.

Задача 5

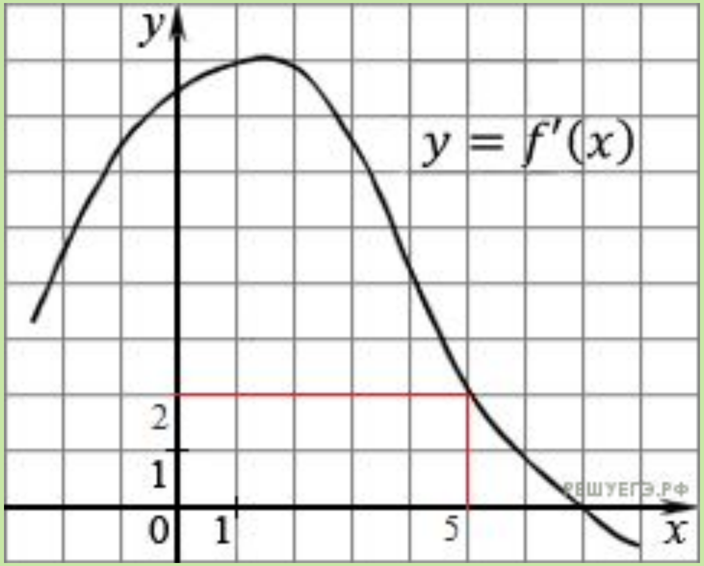
В 8 № 40130. На рисунке изображен **график производной** функции y = f(x). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику y = f(x) параллельна прямой

y = 2x – 2 й.



Решение:

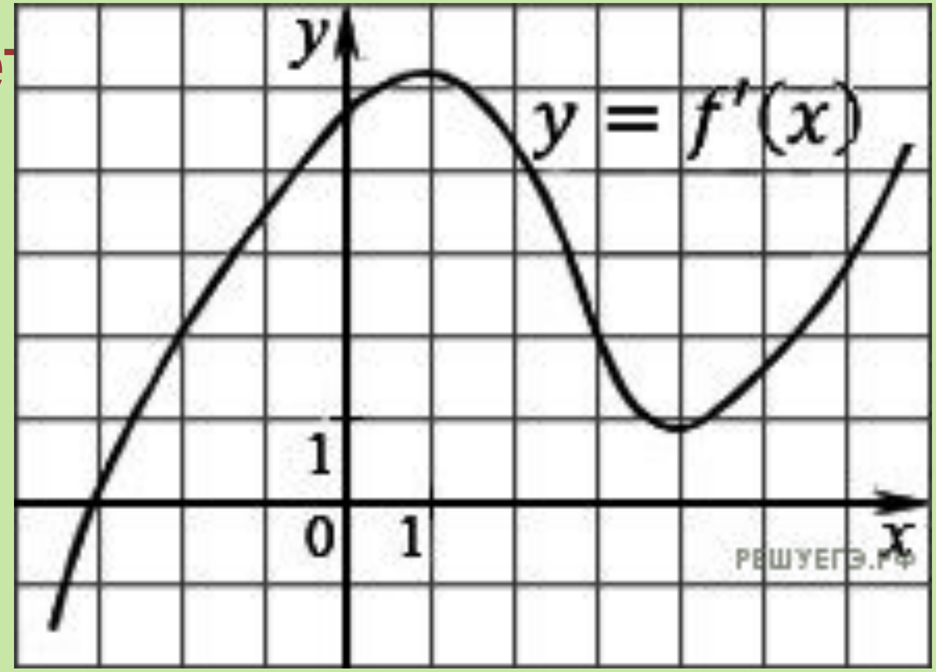
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x – 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.



Пример 1

В 8 № 40131. На рисунке изображен **график производной** функции y = f(x). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику y = f(x) параллельна оси абсцисс

или совпадает



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

Задача 6

В 8 № 119972. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции

$f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + 2x + 3$. Найдите $\boldsymbol{a}$.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

тогда и только тогда, когда одновременно

$f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$.

Получим

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение ***a*** равно 0,125.

Ответ: 0,125

Пример 1

В 8 № 119973. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x = 0{,}5$, откуда $b = -33$.

Ответ: -33

Пример 2

В 8 № 119974. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 3x + c$. Найдите с.

Решение:

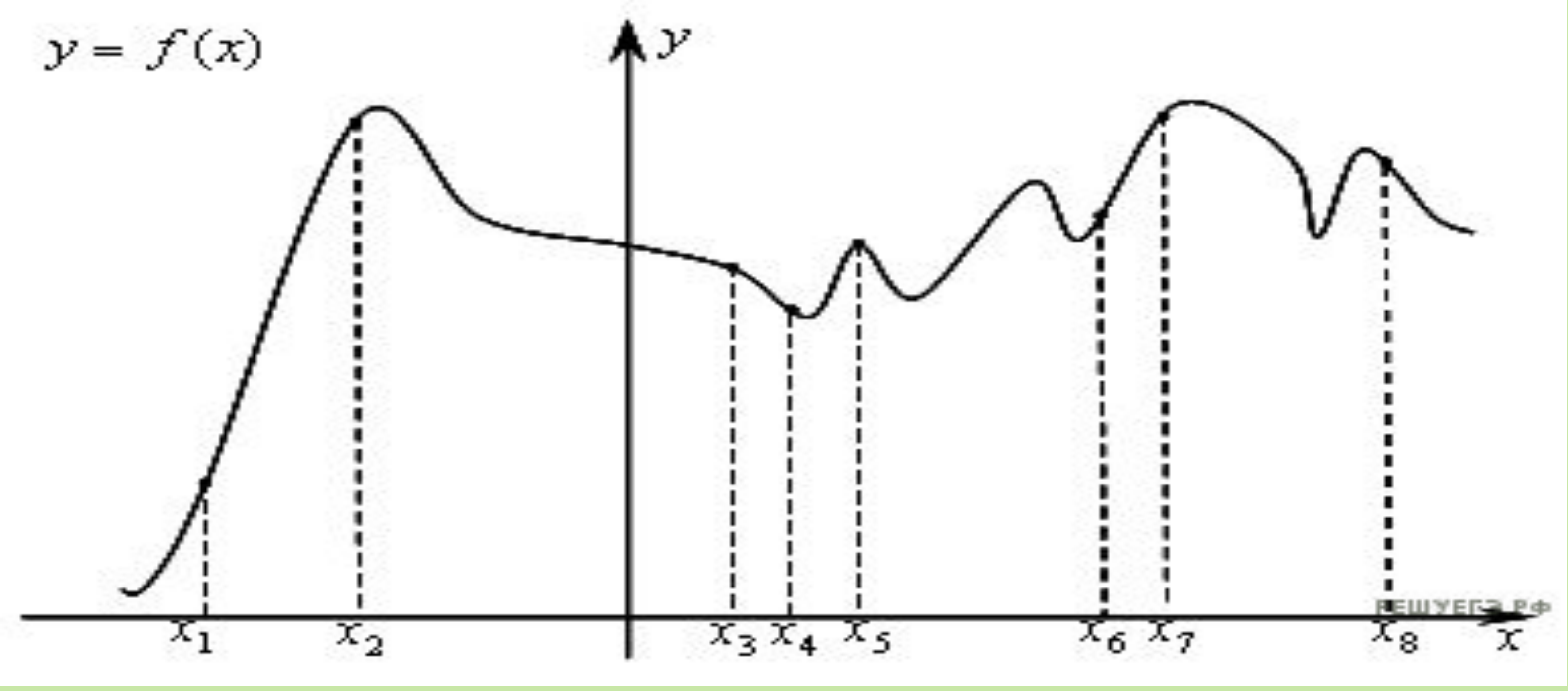
условие касания графика функции и прямой задаётся системой требований:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

Задача 7

- **В 8 № 317539.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна ?



Решение:

Положительным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_6, x_7. Таких точек 4.

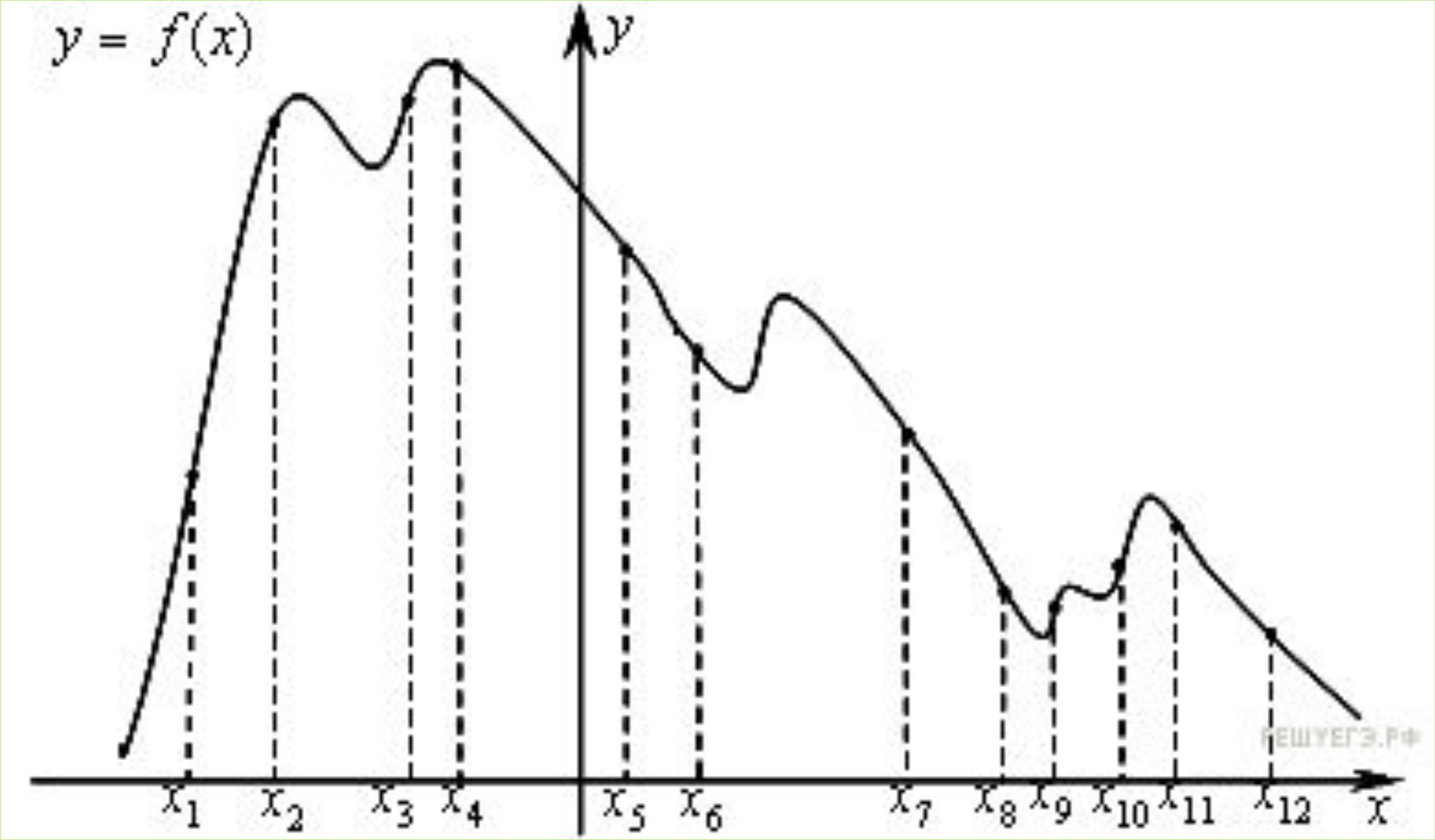
(Или: положительным значениям производной соответствуют те точки графика функции, в которых угол наклона касательной острый.)

Ответ:4.

Пример 1

В 8 № 317540. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, …, x_{12}.

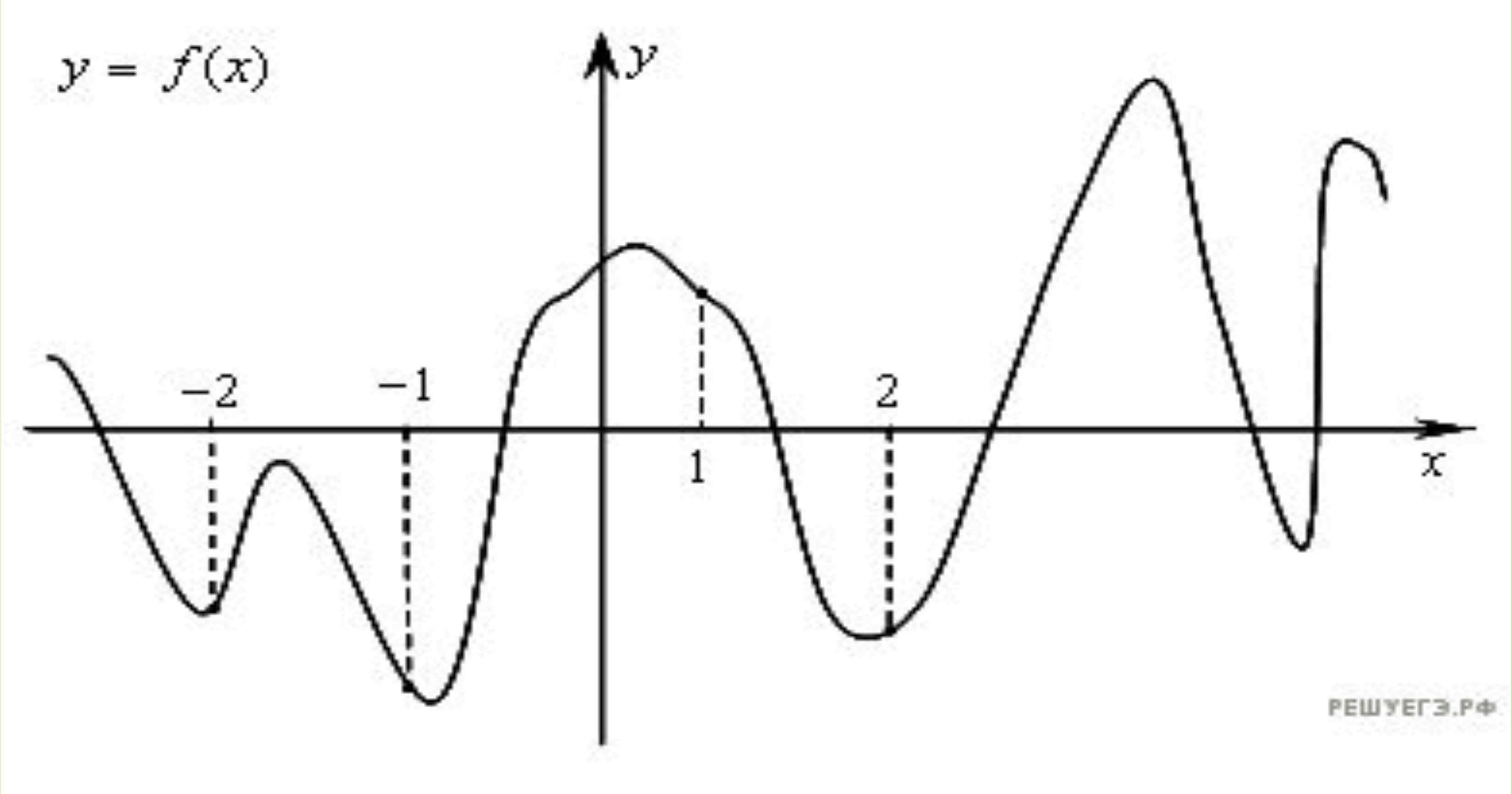
В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

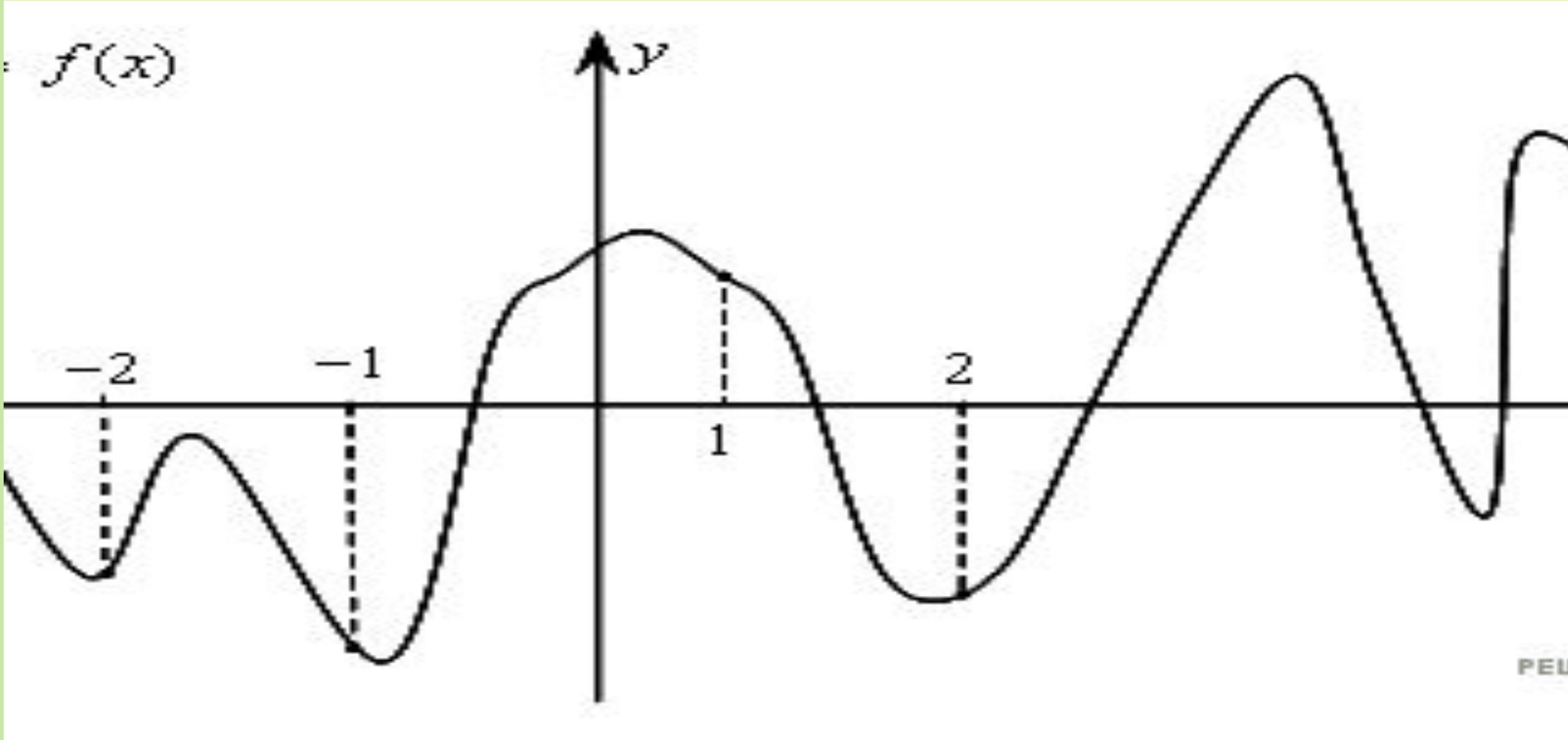


Ответ: 7

Пример 2

- **В 8 № 317543.** На рисунке изображен график функции y =f(x) и отмечены точки −2; −1; 1; 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.





Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках −2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке −2.

Ответ: -2