

# Геометрический смысл производной

Решение задач

# Задача 1

В 8 № 27485.

Прямая  $y = 7x - 5$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 6x - 8$ . Найдите абсциссу точки касания.

## Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

Поскольку касательная параллельна прямой  $y = 7x - 5$  угловые коэффициенты касательной и прямой равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения :  $y' = 7$ .

$$(y = x^2 + 6x - 8)' = 7;$$

$$2x + 6 = 7;$$

$$2x = 1; \quad x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

## Задача 2

**В 8 № 27486.**

Прямая  $y = -4x - 11$  является касательной к графику функции  $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$ .  
Найдите абсциссу точки касания.

**Решение.** Условие касания графика функции  $y = f(x)$  и прямой  $y = kx + b$  задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}, \\ x = -1, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 (*). \end{cases}$$

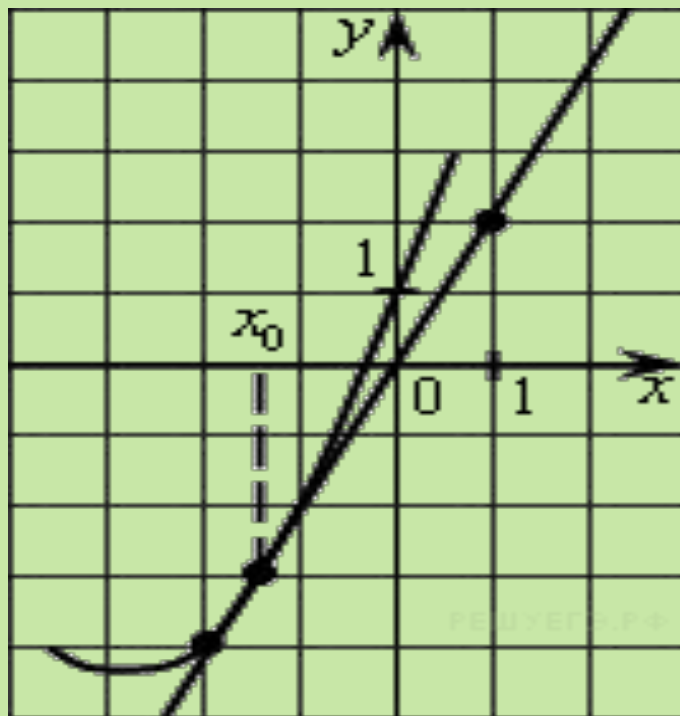
Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (\*).

Поэтому искомая абсцисса точки касания  $(-1)$ .

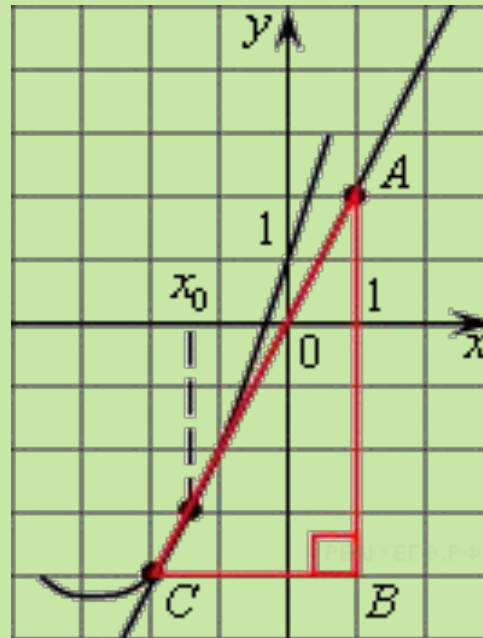
Ответ:  $-1$ .

## Задача 3

**В 8 № 27503.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .



Решение:



Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

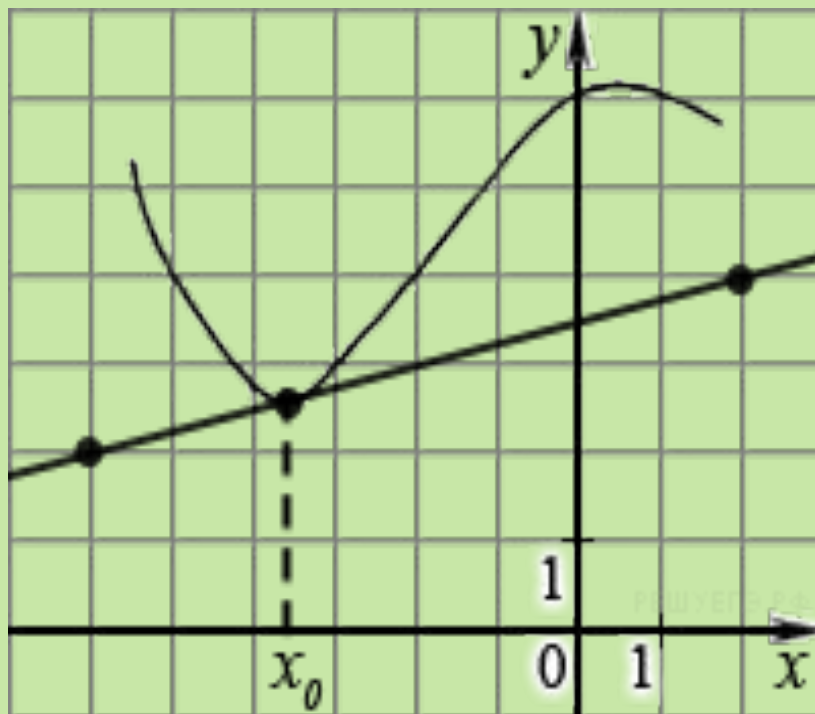
Углом наклона касательной является угол ACB прямоугольного треугольника ABC, у которого A(1;2), B(1;-4), C(-2;-4).

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2

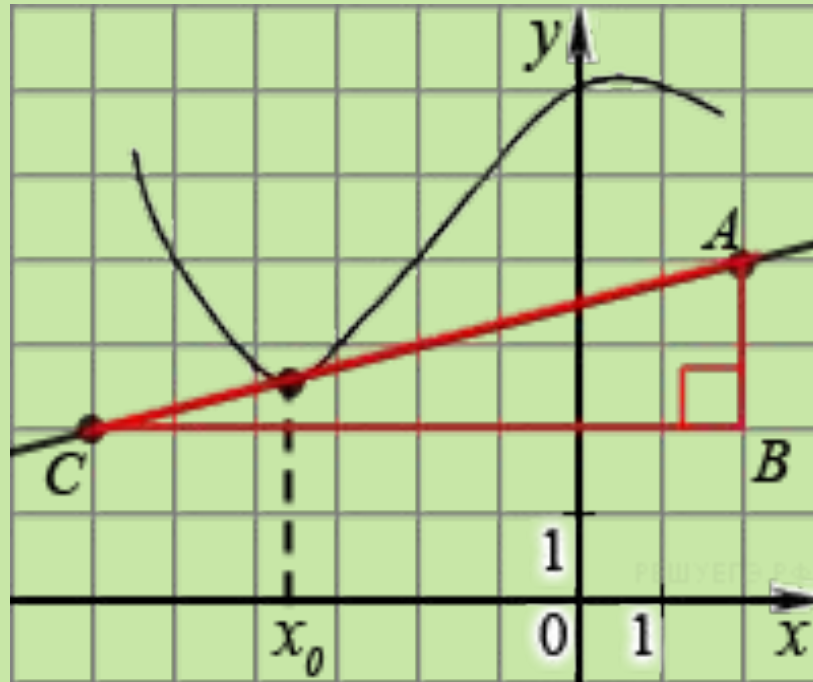
# Пример 1

- **В 8 № 27504.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .





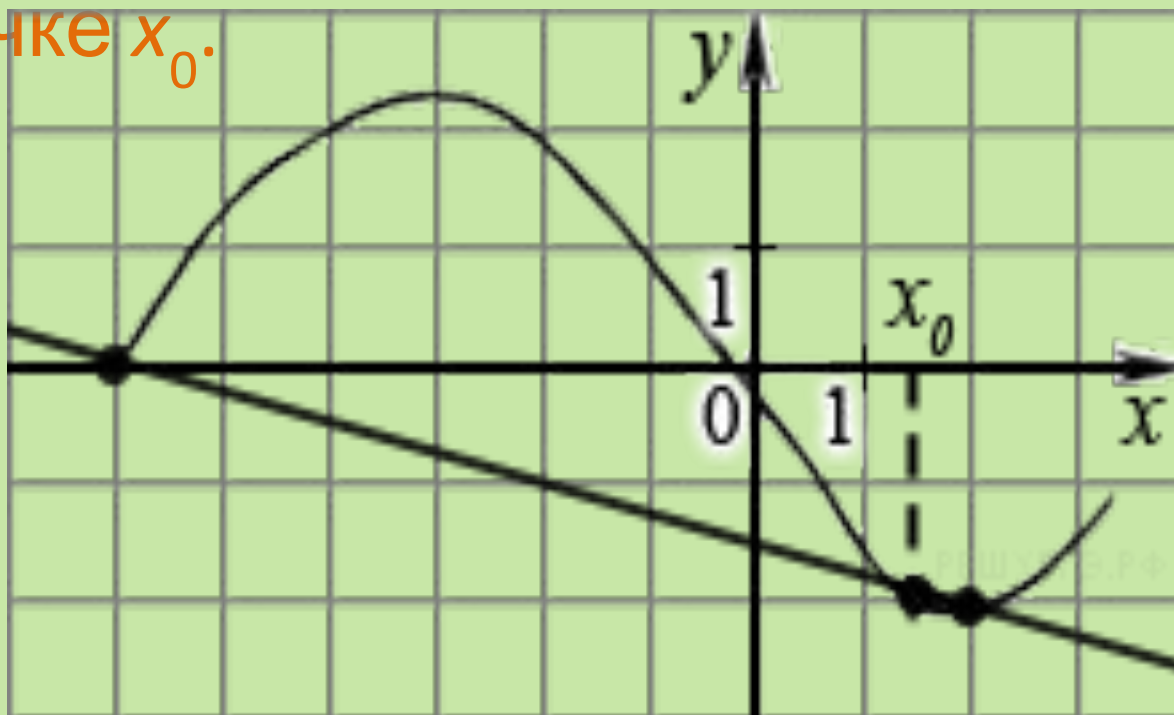
Решение:



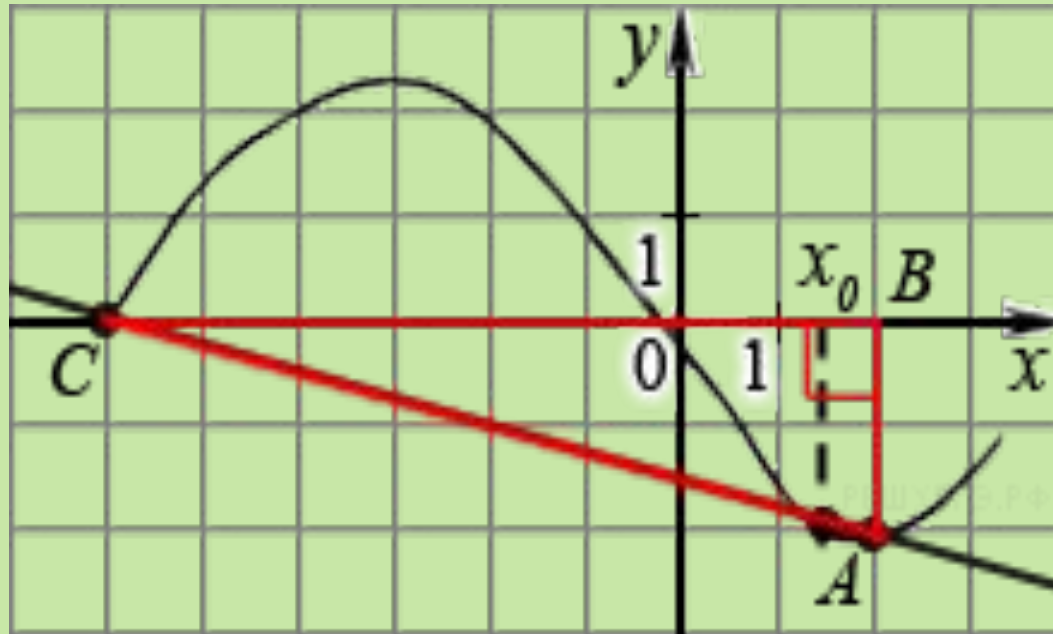
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

## Пример 2

- **В 8 № 27506.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .



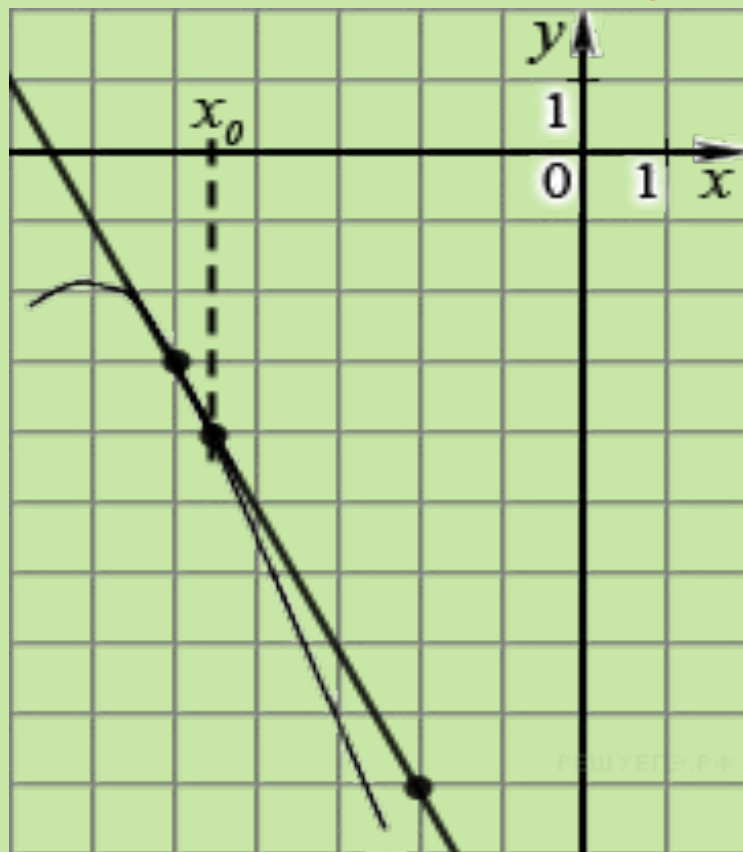
# Решение:



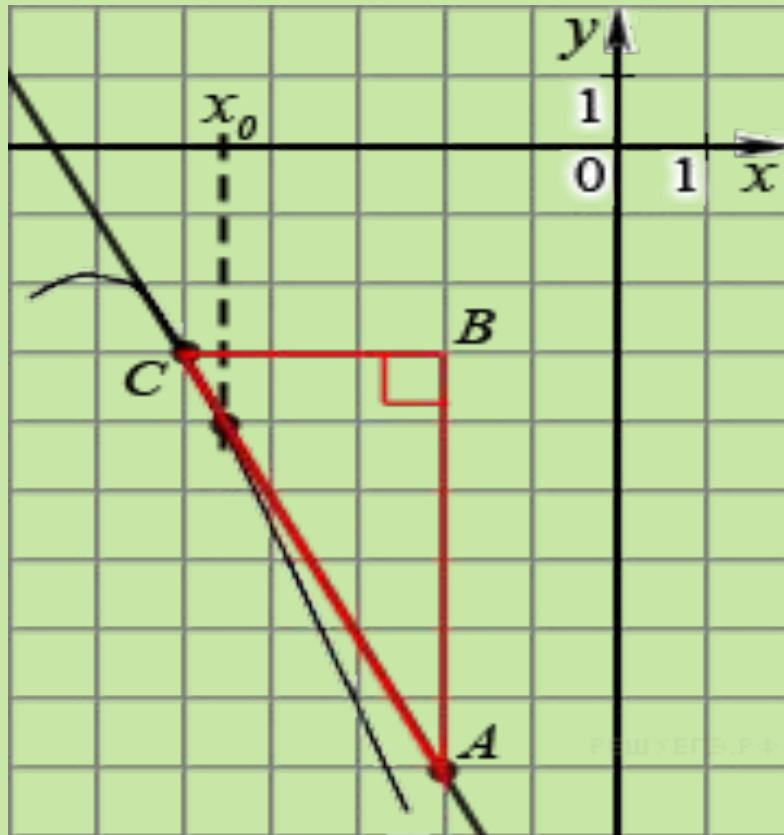
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25$$

## Пример 3

- **В 8 № 27505.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .



# Решение:

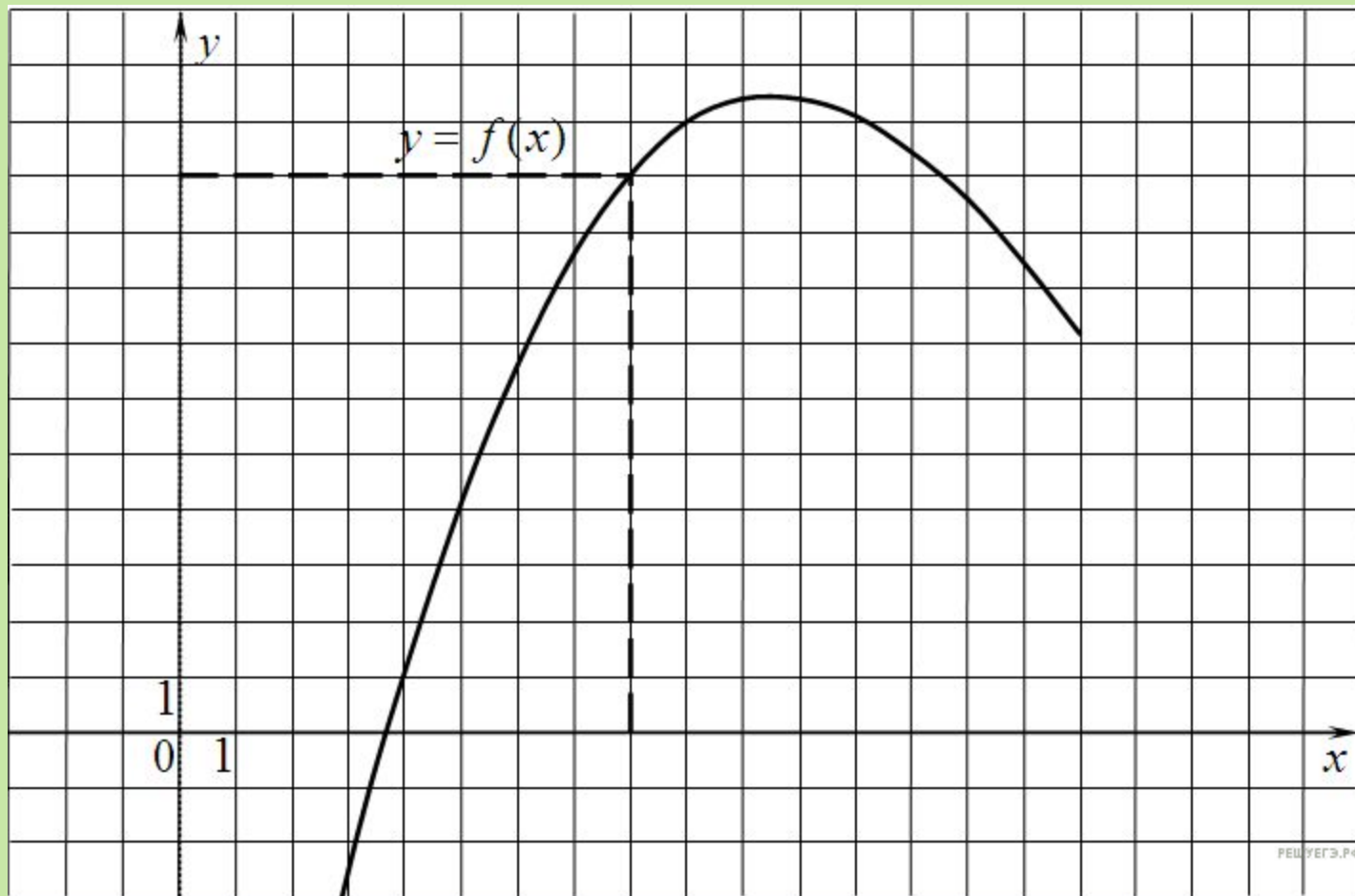


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2$$

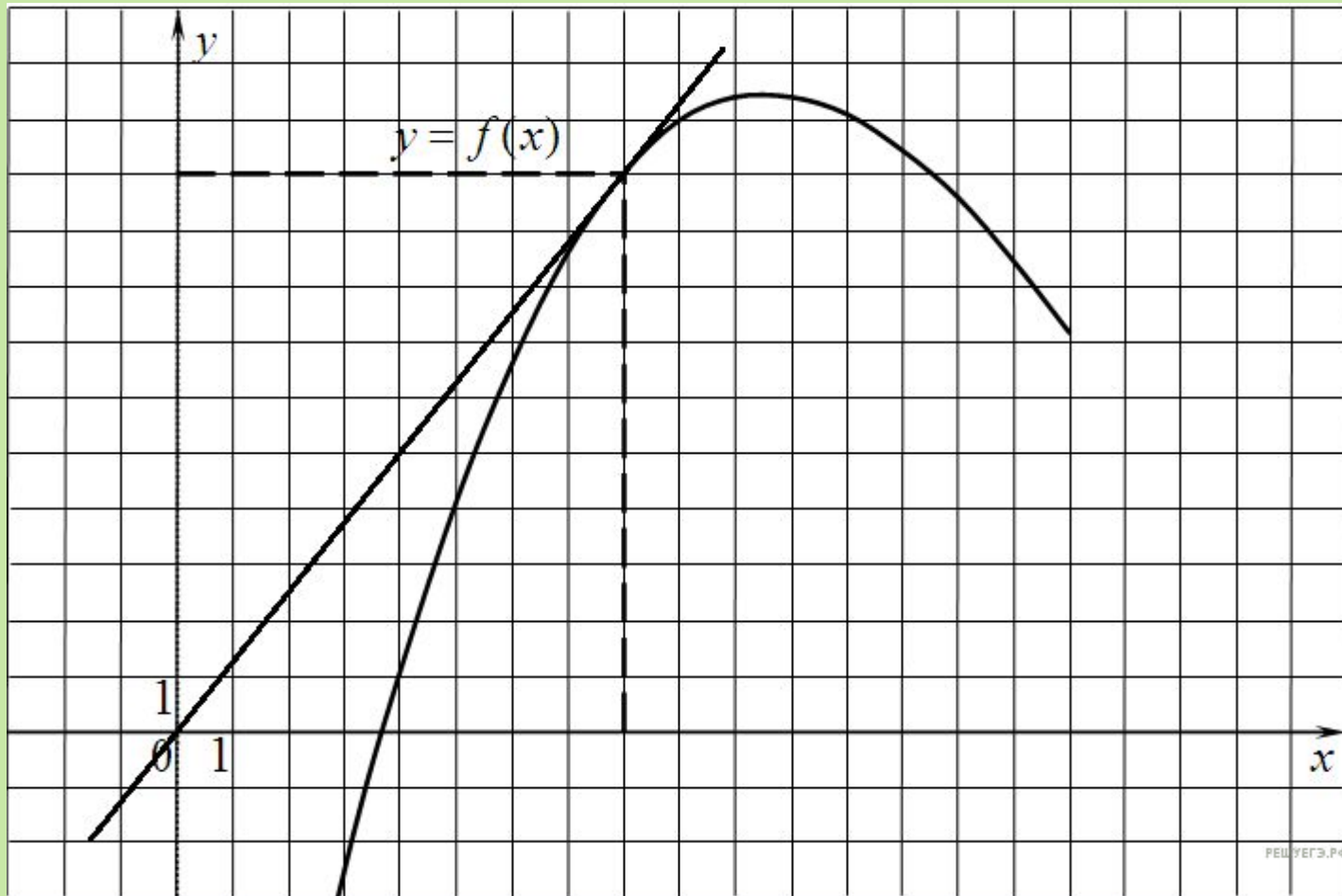
## Задача 4

**В 8 № 40129.**

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите  $f'(8)$ .



# Решение:





Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид  $y = kx$ . Эта прямая проходит через точку

$(8; 10)$ , поэтому  $10 = 8 \cdot k$ , откуда  $k = 1,25$ .

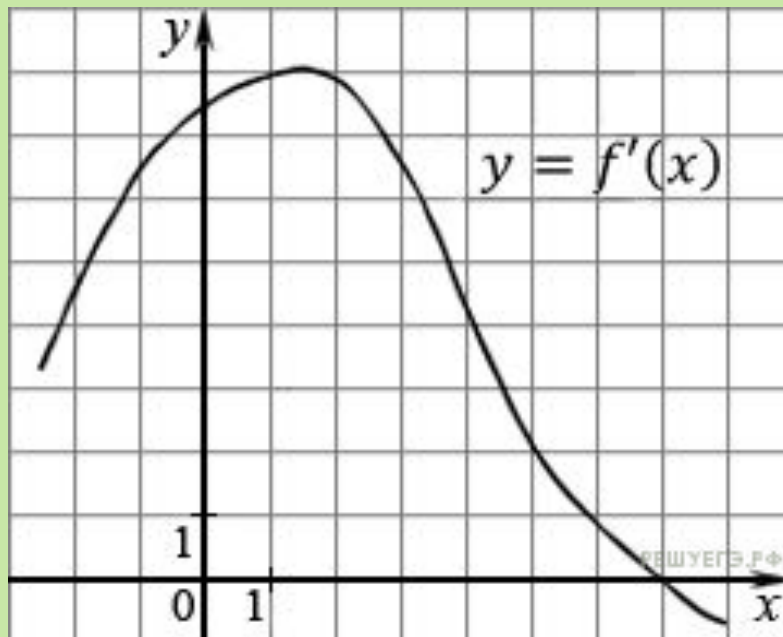
Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем:  
 $f'(8) = 1,25$ .

Ответ: 1,25.

## Задача 5

**В 8 № 40130.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой

$$y = 2x - 2$$



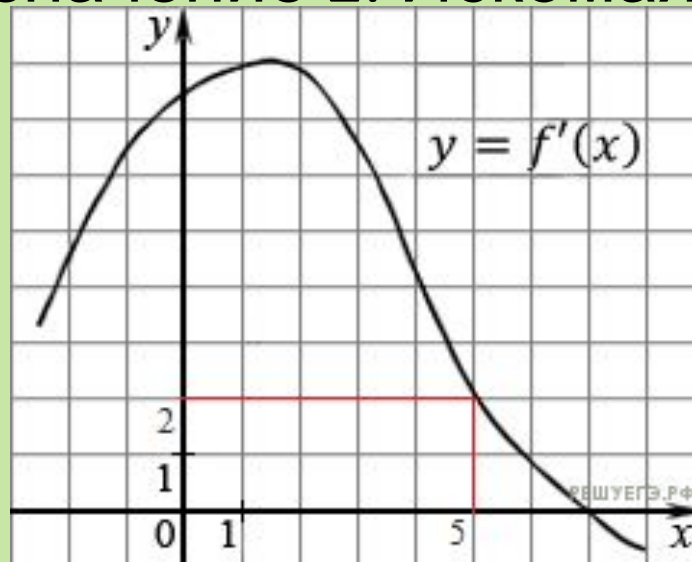
й.

## Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

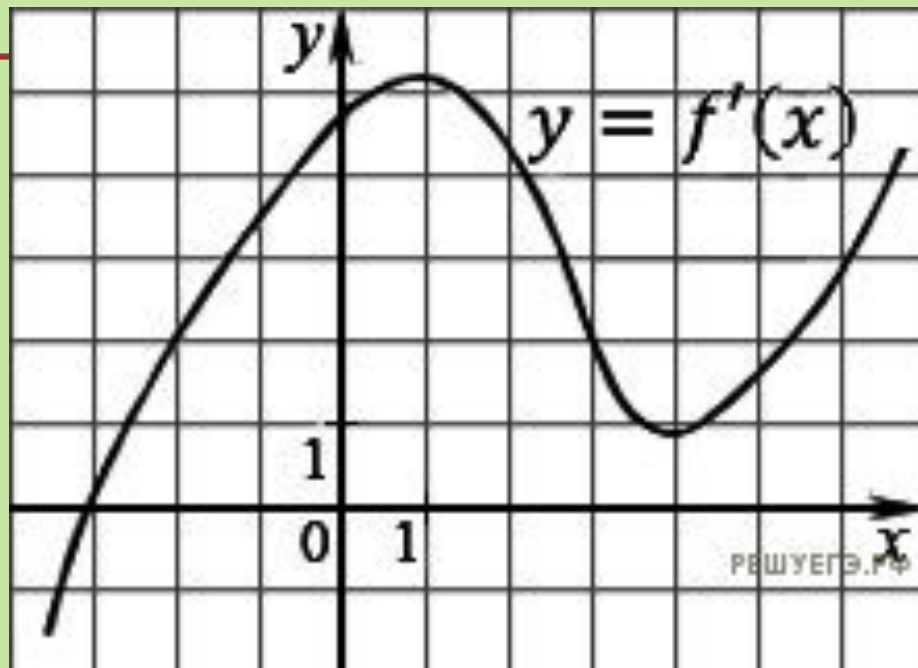
Поскольку касательная параллельна прямой  $y = 2x - 2$  или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и  $f'(x_0) = 2$ .

Осталось найти, при каких  $x$  производная принимает значение 2. Искомая точка  $x_0 = 5$ .



# Пример 1

**В 8 № 40131.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна оси абсцисс или совпадает



## Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид  $y = b$ , и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка  $x = -3$ .

## Задача 6

**В 8 № 119972.** Прямая  $y = 3x + 1$  является касательной к графику функции  $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ . Найдите  $a$ .

**Решение.**

Прямая  $y = kx + b$  является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда одновременно

$$f(x_0) = y(x_0) \text{ и } f'(x_0) = k.$$

Получим

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение **a** равно 0,125.

Ответ: 0,125

## Пример 1

**В 8 № 119973.** Прямая  $y = -5x + 8$  является касательной к графику функции  $f(x) = 28x^2 + bx + 15$ . Найдите  $b$ , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

**Решение.**

Условие касания графика функции  $y = f(x)$  и прямой  $y = kx + l$  задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + l. \end{cases}$$



В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому  $x = 0,5$ , откуда  $b = -33$ .

Ответ: -33

## Пример 2

**В 8 № 119974.** Прямая  $y = 3x + 4$  является касательной к графику функции  $f(x) = 3x^2 - 3x + c$ . Найдите  $c$ .

Решение:

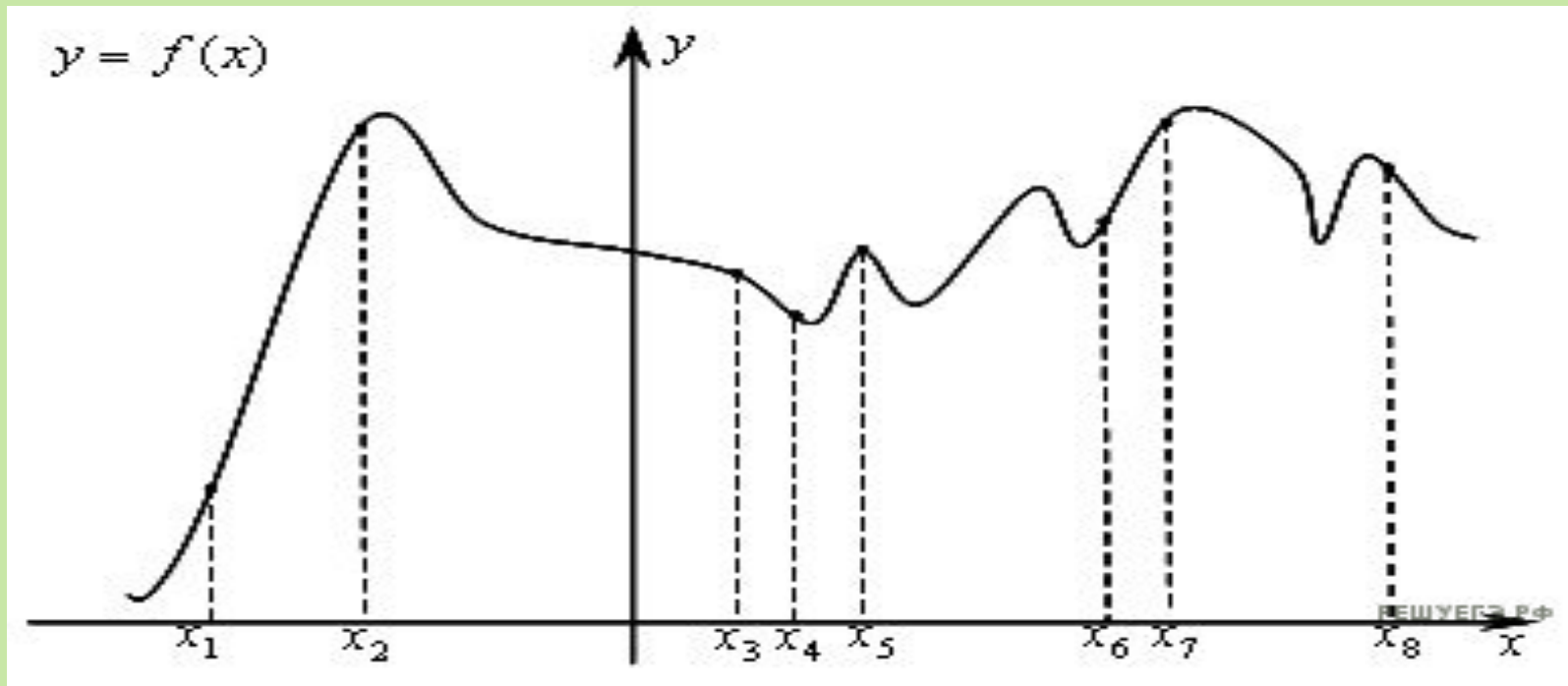
условие касания графика функции и прямой задаётся системой требований:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

**Ответ: 7.**

# Задача 7

- **В 8 № 317539.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и восемь точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_8$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна ?



# Решение:

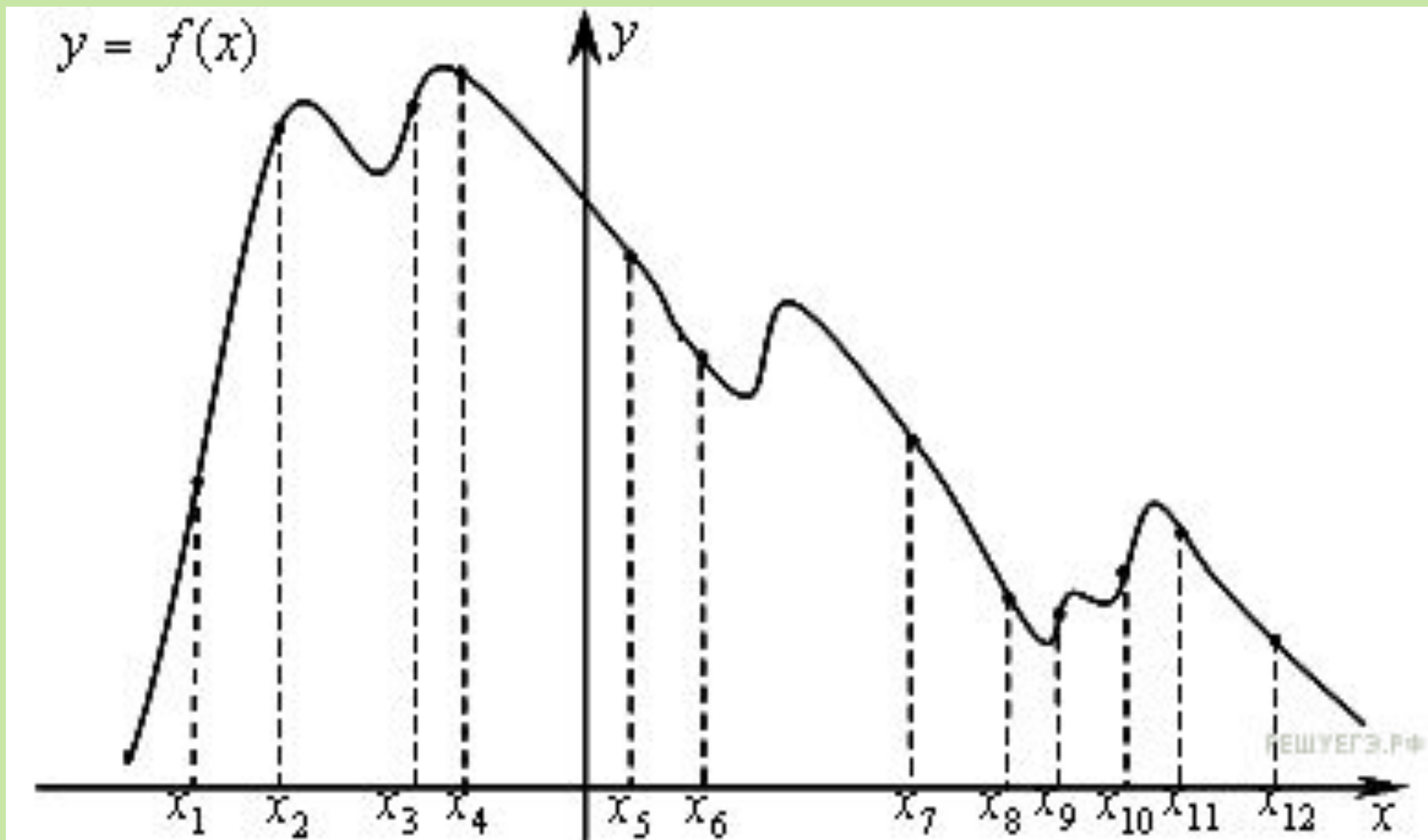
Положительным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция возрастает. На них лежат точки  $x_1, x_2, x_6, x_7$ . Таких точек 4.

(Или: положительным значениям производной соответствуют те точки графика функции, в которых угол наклона касательной острый.)

Ответ:4.

# Пример 1

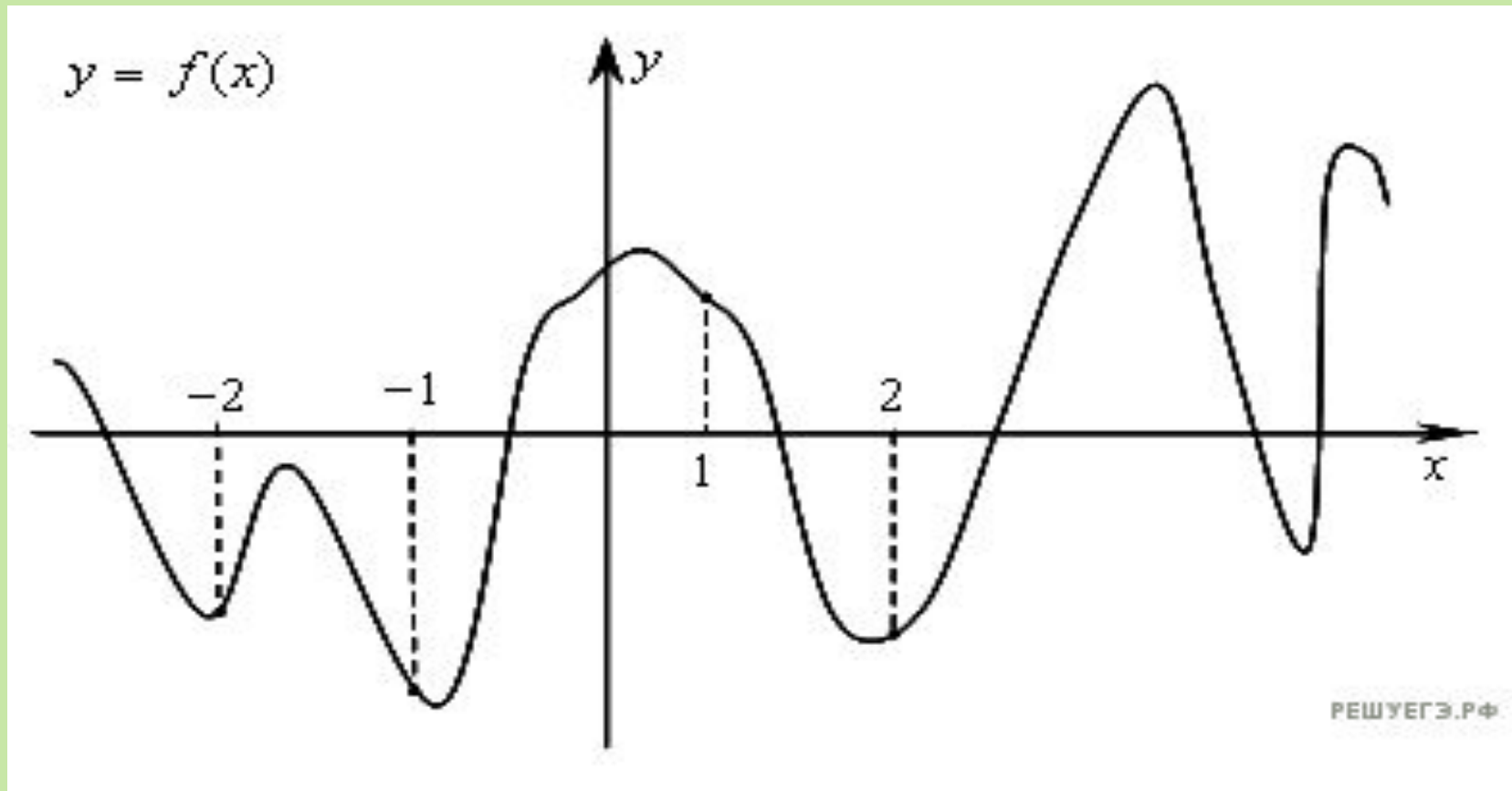
**В 8 № 317540.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и двенадцать точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$ .  
В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?

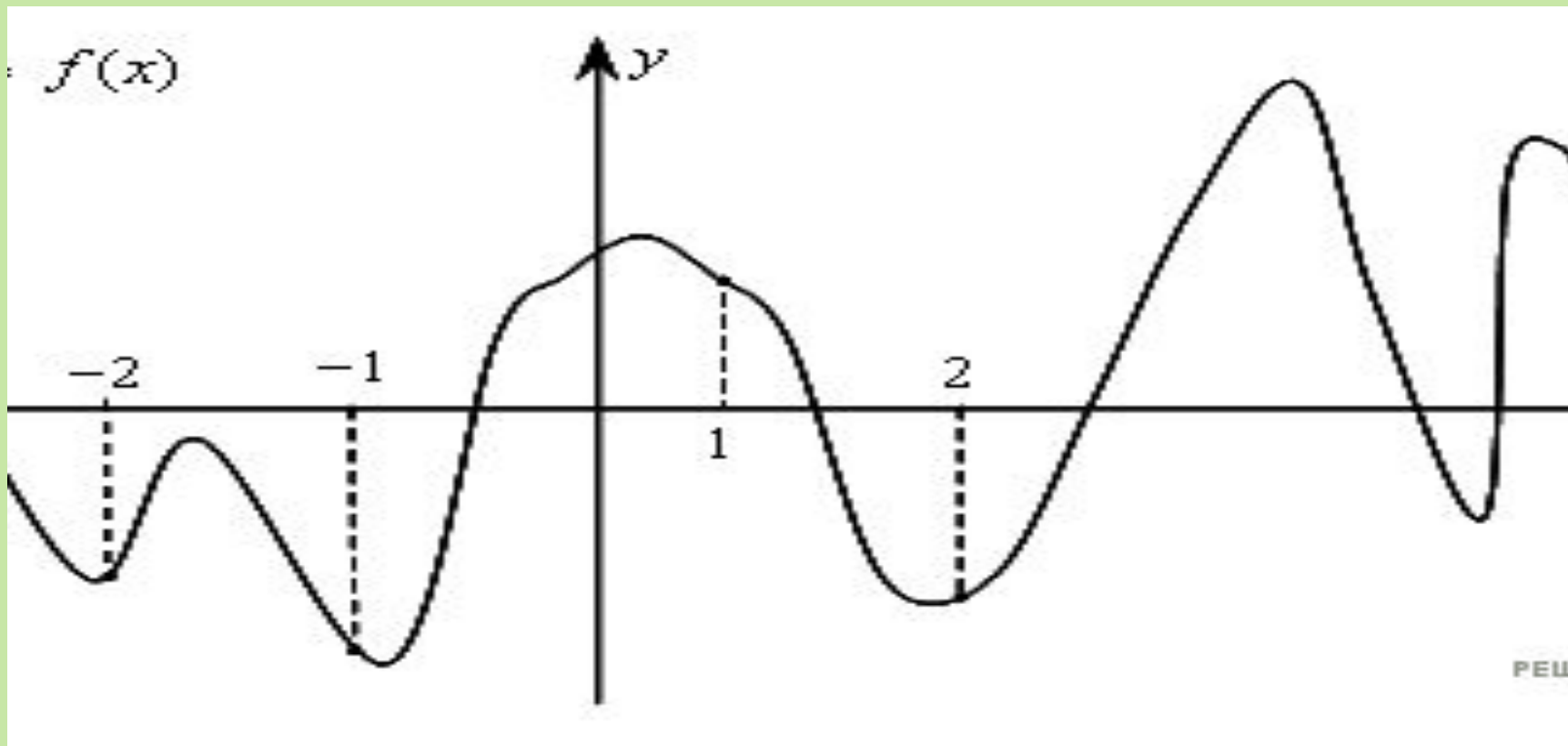


**Ответ: 7**

## Пример 2

- **В 8 № 317543.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-2$ ;  $-1$ ;  $1$ ;  $2$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.





**Решение:**

**Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках  $-2$  и  $2$ . Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке  $-2$ .**

**Ответ: -2**