

Методы решения  
тригонометрических  
уравнений

*Обобщающий урок*

# **Задачи урока**

- 1. Повторить:**
  - а) решение простейших тригонометрических уравнений и их частные случаи;
  - б) основные тригонометрические формулы и преобразования.
- 2. Закрепить новые понятия и способы действия с ними:**
  - а) классифицировать тригонометрические уравнения;
  - б) решать уравнения по схеме.
- 3. Развить умение самостоятельно работать по оценочным листам,**  
анализировать, сравнивать, делать выводы.
- 4. Проверить, достигнут ли обучающимися уровень обязательной подготовки по данной теме.**



*Учиться можно  
только  
весело...  
Чтобы переваривать  
знания, надо  
поглощать  
их с аппетитом.*

**Анатоль Франс**  
**1844 - 1924**

# Вы уже должны уметь:

1. Решать простейшие тригонометрические уравнения;
2. Находить значения углов основных тригонометрических функций;
3. Применять основные тригонометрические формулы;
4. Уметь выполнять тригонометрические преобразования.

# Работаем устно

- 
- $\arcsin \sqrt{2}/2$
- $\arccos 1$
- $\arcsin (-1/2)$
- $\arccos (-\sqrt{3}/2)$
- $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$
- 
- $\arccos \sqrt{2}/2$
- $\arcsin 1$
- $\arccos (-1/2)$
- $\arcsin (-\sqrt{3}/2)$
- $\operatorname{arctg} \sqrt{3} / 3$



# Формулы решения уравнений $\sin x = a$ , $\cos x = a$ , $\operatorname{tg} x = a$ .

- $\sin x = a$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

- $\cos x = a$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

- $\operatorname{tg} x =$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



## Установите соответствие:

1

$$\sin x = 0$$

2

$$\cos x = -1$$

3

$$\sin x = 1$$

4

$$\cos x = 1$$

5

$$\operatorname{tg} x = 1$$

6

$$\sin x = -1$$

7

$$\cos x = 0$$

$$a) \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$б) 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$в) \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$г) \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

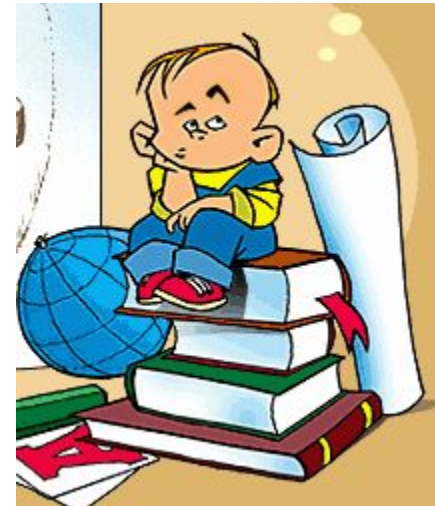
$$д) -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$е) \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$ж) \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

# Отвeты

- 1 - в)
- 2 - е)
- 3 - а)
- 4 - б)
- 5 - ж)
- 6 - д)
- 7 - з)





# ***Критерии оценок***

- **Количество  
правильных  
ответов:**

- **6-7**

- **4-5**

- **3**

- **Баллы:**

**5 баллов**

**4 балла**

**3 балла**

# *Верно-неверно*

- 1. Верно ли, что  $\arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- 2. Верно ли, что  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
- 3. Верно ли, что  $\sin x = -2$
- 4. Верно ли, что  $\arcsin x \in [0; \pi]$
- 5. Верно ли, что  $\cos x = \frac{3}{5}$
- 6. Верно ли, что  $\arccos \frac{\pi}{2} = 0$

# Отвeты

- 1 - *нет*
- 2 - *да*
- 3 - *нет*
- 4 - *нет*
- 5 - *да*
- 6 - *нет*



# ***Критерии оценок***

- **Количество правильных ответов:**

- **6**

- **5**

- **4**

- **3 и менее**

- **Баллы:**

**5 баллов**

**4 балла**

**3 балла**

**надо доучить**

**Методы решения**

**тригонометрических уравнений**

# 1. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

**Пример 1.** Решить уравнение

$$3 \cos^2 x - 10 \cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = t, t \in [-1; 1]$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 3 \text{ не соот условию}$$

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$$

**Ответ:**

$$\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

**Пример 3.** Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решение.

Введём новую переменную  $t = \sin x$ . Тогда данное уравнение примет вид  $2t^2 + t - 1 = 0$ .

Решим его:  $D = 1 + 8 = 9$ ,

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Следовательно,

$$\sin x = 1/2$$

или

$$\sin x = -1.$$



1)  $\sin x = 1/2,$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi \cdot k, k \in Z,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z.$$

2)  $\sin x = -1,$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$$

*Ответ* :  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z, -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$



**Пример 2.** Решить уравнение

$$\underline{6\sin^2x} + \underline{5 \cos x} - 2 = 0.$$

Решение.

$$\sin^2x = 1 - \cos^2x$$

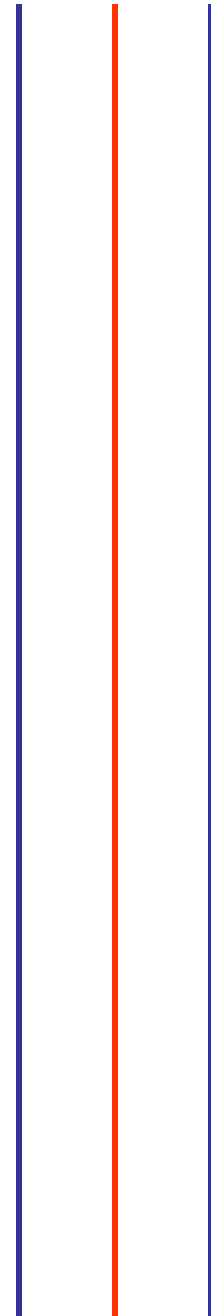
$$6(1 - \cos^2x) + 5 \cos x - 2 = 0,$$

$$-6 \cos^2x + 5 \cos x + 4 = 0,$$

$$6 \cos^2x - 5 \cos x - 4 = 0.$$

Пусть  $\cos x = t$ , тогда  $6t^2 - 5t - 4 = 0,$

$$t_1 = -1/2, \quad t_2 = 4/3.$$



Следовательно,  $\cos x = -1/2$  или  $\cos x = 4/3$ .

Решая уравнение  $\cos x = -1/2$ , находим:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение  $\cos x = 4/3$  не имеет решений, так как  $4/3 > 1$ .

$$\text{Ответ : } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

---

## 2. Решение уравнений разложением на множители

$$2 \cos 2x \cos x = \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

### 3. Решение однородных уравнений и сводящихся к ним

$$\cos 3x + \sin 3x = 0 \quad | : \cos 3x \neq 0$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

$$1 + \operatorname{tg} 3x = 0$$

$$\operatorname{tg} 3x = -1$$

$$3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$$

Ответ:

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

# Формулы тригонометрии, сводящие уравнения к решению перечисленными методами.

## Формулы

1. Замена одной функции на другую:  
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$   
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

2. Формулы суммы и разности :

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

4. Формулы сложения

## Примеры уравнений

1)  $4 \sin^2 x + 9 \cos x - 6 = 0$

$3 \cos^2 x + 10 \sin x - 6 = 0$  (к квадратному)

2)  $\cos 5x - \cos 3x = 0$

$\sin 9x + \sin 6x = 0$  (к разложению на множители:  $ab=0$ )

3)  $3 \cos 2x - 5 \cos x = 1$   
(к квадратному)

$3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x - \sin 2x = 0$   
(к однородному, делим на  $\cos^2 x$ )

4)  $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0$

$\cos 5x \cos 3x - \sin 5x \sin 3x = 0$  (к простейшим)

# Закрепление знаний

Распределите  
уравнения

**А) Метод  
сведения к  
квадратному**

**Б) Метод  
разложения  
на множители**

**В)  
Однородные  
уравнения**

# Уравнения

## I вариант

1.  $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$
2.  $10 \sin x - 5 \sin x \cos x = 0$
3.  $\cos 4x - \sin 4x = 0$
4.  $\sin 6x - \sin 4x = 0$
5.  $4 \sin^2 x + 9 \cos x - 6 = 0$
6.  $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

**УДАЧИ !**

## II вариант

1.  $2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0$
2.  $3 \sin x \cos x - 6 \cos x = 0$
3.  $\sin 5x - \cos 5x = 0$
4.  $\sin 6x + \sin 4x = 0$
5.  $4 \cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$
6.  $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$

# Ответы

## I вариант

1	А	квадратно е
2	Б	разложени е
3	В	однородно е
4	Б	разложени е
5	А	квадратно

## II вариант

1	А	квадратно е
2	Б	разложени е
3	В	однородно е
4	Б	разложени е
5	А	квадратно



# ***Критерии оценок***

- **Количество ошибок:**

- **1 ошибка**
- **2 ошибки**
- **3 ошибки**
- **4 и более**

- **Баллы:**

**5 баллов**

**4 балла**

**3 балла**

**надо**

**поработать**

# *Контрольная работа*

**I вариант**

**II вариант**

<b>A</b>	
<b>A</b>	
<b>Б</b>	
<b>Б</b>	
<b>В</b>	
<b>В</b>	

<b>A</b>	
<b>A</b>	
<b>Б</b>	
<b>Б</b>	
<b>В</b>	
<b>В</b>	

# ***Подведём итоги !***

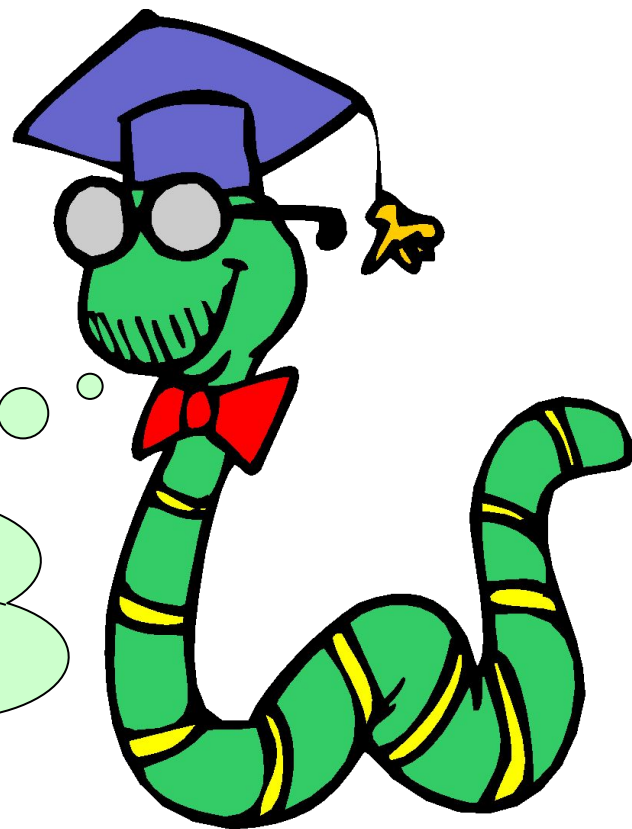
## **ПРАВИЛО ВЫСТАВЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ЗА УРОК:**

- СЛОЖИТЕ ПОЛУЧЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПО ВСЕМ ТРЁМ ЭТАПАМ.**
- РАЗДЕЛИТЕ СУММУ НА КОЛИЧЕСТВО ЭТАПОВ.**
- ПОЛУЧИВШЕЕСЯ СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ОКРУГЛИТЕ ПО ПРАВИЛАМ МАТЕМАТИКИ.**

***Вы получили оценку за ваши труды на уроке.***

# *Домашнее задание:*

*Придумать по одному уравнению на каждый метод решения.*



*Спасибо за урок!*