

11 класс

Периодическо тригонометрическ их функций

Определение:

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и выполняются равенства

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

Число T называется **периодом** функции $f(x)$

Задача1

Доказать, что $f(x)=\sin x+1$ является периодической с периодом 2π

Решение:

Функция $f(x)=\sin x+1$ определена на \mathbb{R} .

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+1=\sin x+1=f(x)$$

Задача 2

Доказать, что функция $f(x) = \frac{\cos x}{2}$

является периодической с периодом 2π

Решение:

$$x \in R$$

$$f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{2} = \frac{\cos x}{2} = f(x)$$

Задача 3

Доказать, что $f(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

является периодической с периодом 2π

Решение:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos\left(x + 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\ &= \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x) \end{aligned}$$

Задача 4

Доказать, что функция $f(x) = \sin 2x$ является периодической с периодом $T = \pi$

Решение:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$f(x + \pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$$

Задача 5

Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ является периодической с периодом $T = \frac{\pi}{2}$

Решение:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg} 2x = f(x)$$

Задача 6

Найти наименьший положительный период функции.

$$f(x) = \sin \frac{3}{2}x$$

Решение:

$$x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

$$\sin \frac{3}{2}(x+T) = \sin \frac{3}{2}x$$

$$\sin \frac{3}{2}(x+T) - \sin \frac{3}{2}x = 0$$

$$2 \sin \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}T - \frac{3}{2}x}{2} \cos \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}T + \frac{3}{2}x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3}{4}T = 0 \quad \frac{3T}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad T = \frac{4}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Наименьший положительный период при $n=1$ $T = \frac{4\pi}{3}$

Задача 7 Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Решение:

$$x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad f(x+T) = f(x)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+T}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+T}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{\sin \frac{x+T}{2}}{\cos \frac{x+T}{2}} - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

$$\sin \frac{x+T}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x+T}{2} = 0, \quad \cos \frac{x+T}{2} \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\sin\left(\frac{x+T}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin \frac{T}{2} = 0$$

$$\frac{T}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Наименьший положительный период функции
при $n=1$ $T=2\pi$

Следствие:

Если $f(x)$ имеет период T , то $f(kx)$
имеет период $\frac{T}{k}$

Например, $y = \sin x$ $T = 2\pi$. $y = \sin 5x$, $T = \frac{2\pi}{5}$

Задача 8

Найти наименьший положительный период функции $y = \cos \frac{2}{5} x$

Решение:

Функция $y = \cos x$ имеет период 2π .

Функция $y = \cos \frac{2}{5} x$ имеет период

$$\frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi$$

Задача 9

Найти наименьший положительный период функции $y = \sin 2x + \cos 3x$

Решение:

Так как функция $\sin 2x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

а функция $\cos 3x$ имеет период $T_2 = \frac{2\pi}{3}$,

то период T функции $y = \sin 2x + \cos 3x$

будет такое наименьшее положительное число, которое кратно

T_1 и T_2 одновременно, т.е. наименьшее общее кратное.

$$T = 2\pi$$

Задача 10

Найти наименьший положительный период функции

$$y = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} \frac{x}{3}$$

Решение:

Так как функция $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ имеет период $T_1 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$,

а функция $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$ имеет период $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$,

то период T функции $y = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} \frac{x}{3}$

будет такое наименьшее положительное число, которое кратно T_1 и T_2

одновременно, т.е. наименьшее общее кратное.

$$T = 6\pi$$