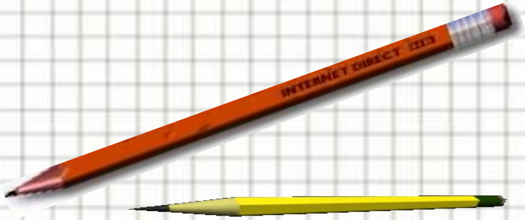


Параметры в тригонометрии

Подходы решений тригонометрических уравнений с параметрами

- Рассмотрим некоторые общие подходы при решении определенных типов тригонометрических уравнений с параметрами. В дальнейшем будем обозначать вектор параметров уравнения через **а**.

Введение дополнительных переменных

- Найдите все значения параметра **а**, при котором неравенство справедливо при всех значениях **Х**.

  $|3\sin 2x + 2a \sin x \cos x + \cos 2x + a| <= 3$

Вспомогательные преобразования

- Найти **а** при котором имеет по крайней мере одно решение уравнение

$$(a^2-4a+4)(4+4\sin^2 x+8\sin x)+2(16a-16-4a^2)(\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x)-$$
$$-8a+28=0$$

- Решение: Преобразуем это уравнение, используя формулы сокращенного умножения и основное тригонометрическое тождество:

$$(a-2)^2\cdot 4(\sin^2 x+2\sin x+1)-2\cdot 4(a^2-4a+4)(1+\sin x)-8a+28=0 \Longrightarrow$$

$$4(a-2)^2(\sin x+1)^2-8(a-2)^2(\sin x+1)-8a+28=0$$

- Разделим обе части уравнения на 4:

$$(a-2)^2(\sin x+1)^2-2(a-2)^2(\sin x+1)-2a+7=0$$

$$(a-2)^2(\sin x+1)^2-2(a-2)^2(\sin x+1)=2a-7$$

$a \neq 2$

В левой части уравнения вынесем за скобки

$(a-2)^2(\sin x+1)$ и получим: $(a-2)^2(\sin x+1)(\sin x+1-2)=2a-7 \Longrightarrow (a-2)^2(\sin x+1)(\sin x-1)=2a-7 \Longrightarrow$

$$(a-2)^2(\sin^2 x-1)=2a-7$$

$a=2$ $(2-2)^2(\sin^2 x-1)=2\cdot 2-7 \Rightarrow 0=-3$ значит решений нет

$\Rightarrow$

$$\sin^2 x-1=\frac{2a-7}{(a-2)^2} \Leftrightarrow \sin^2 x=1+\frac{2a-7}{(a-2)^2}$$

Знаем, что $-1\le \sin x\le 1$ следовательно $0\le \sin^2 x\le 1$ значит $0\le 1+\dfrac{2a-7}{(a-2)^2}\le 1$

- Зная, что $-1 \le \sin x \le 1$ следовательно $0 \le \sin^2 x \le 1$

значит $0 \le 1 + \frac{2a-7}{(a-2)^2} \le 1$ $\quad 0 \le (a-2)^2 + 2a - 7 \le (a-2)^2 \Rightarrow$

$0 \le a^2 - 4a + 4 + 2a - 7 \le a^2 - 4a + 4 \Rightarrow 0 \le a^2 - 2a - 3 \le a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$

$0 \le a^2 - 2a - 3 \le a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 \ge 0 \\ 2a - 7 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le -1 \\ a \ge 3 \end{array}\right. \\ a \le 3{,}5 \end{cases}$$

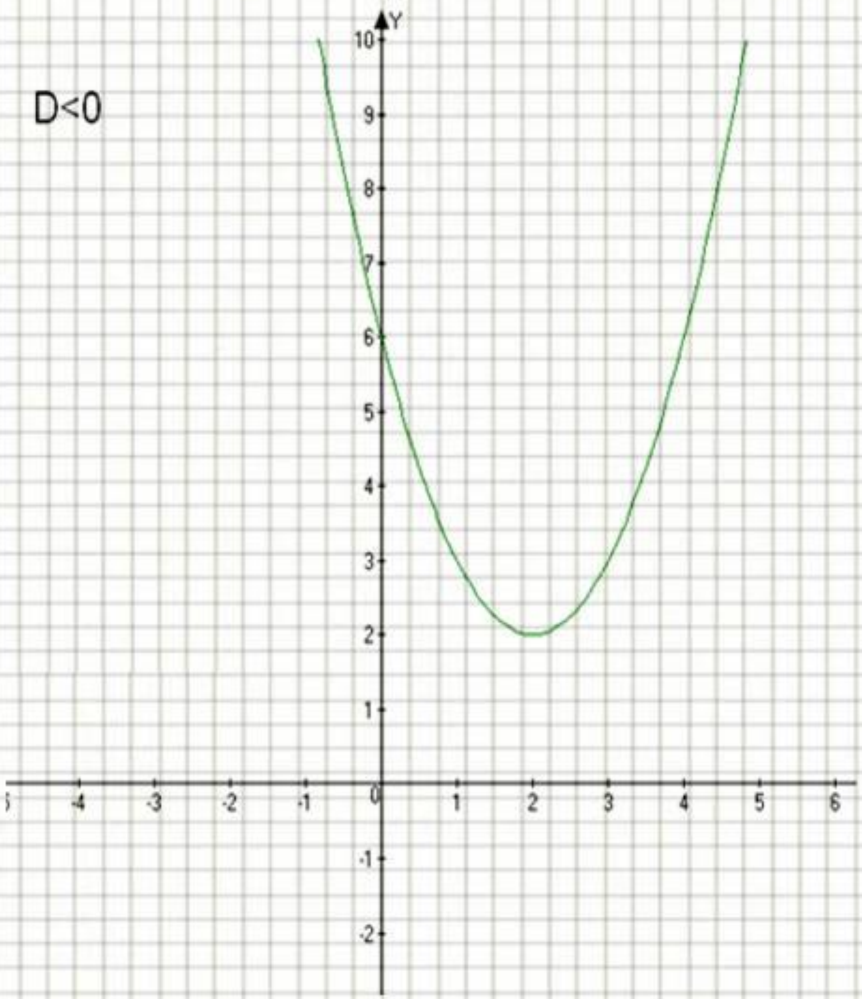
Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup [3; 3{,}5]$

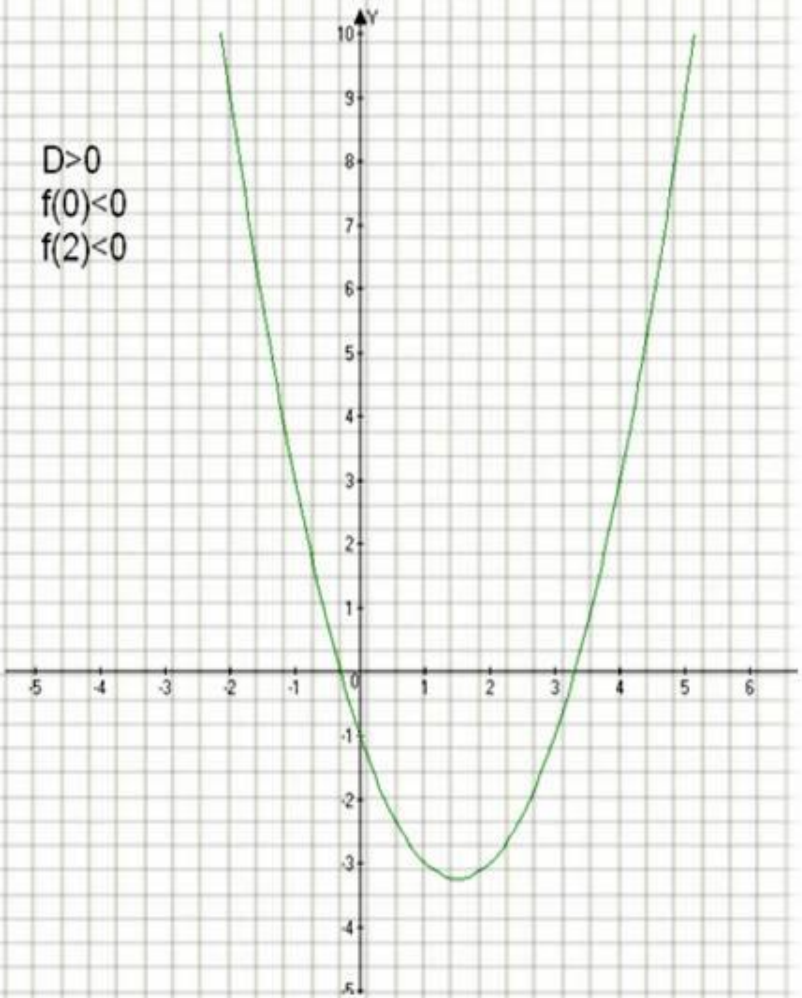
Графический метод.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+$$
$$+\left(12a-18-2a^2\right)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений.


D<0
Y


D>0
f(0)<0
f(2)<0
Y

Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$$\left(x^{2}-6|x|-a\right)^{2}+12\left(x^{2}-6|x|-a\right)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.

- При всех значениях параметра а решите уравнение

$$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x = 2) = 8a + \cos(x - 4a + 2)$$

Найдите все значения параметра q, при которых уравнение $\sin^2 x + (q-2)^2 \sin x + q(q-2)(q-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

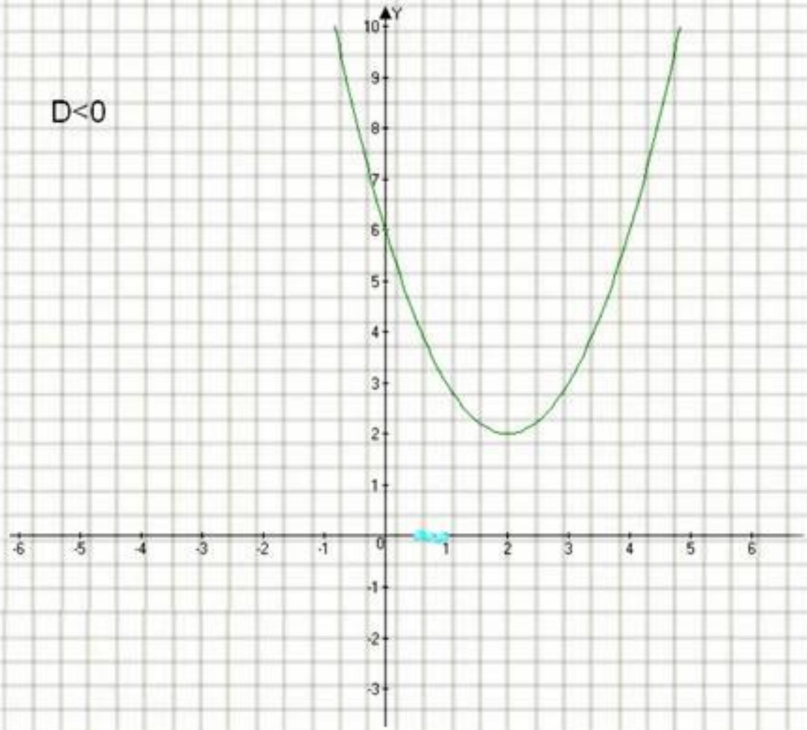
Для каждого значения a найдите все решения уравнения
$\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0$,
принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$..

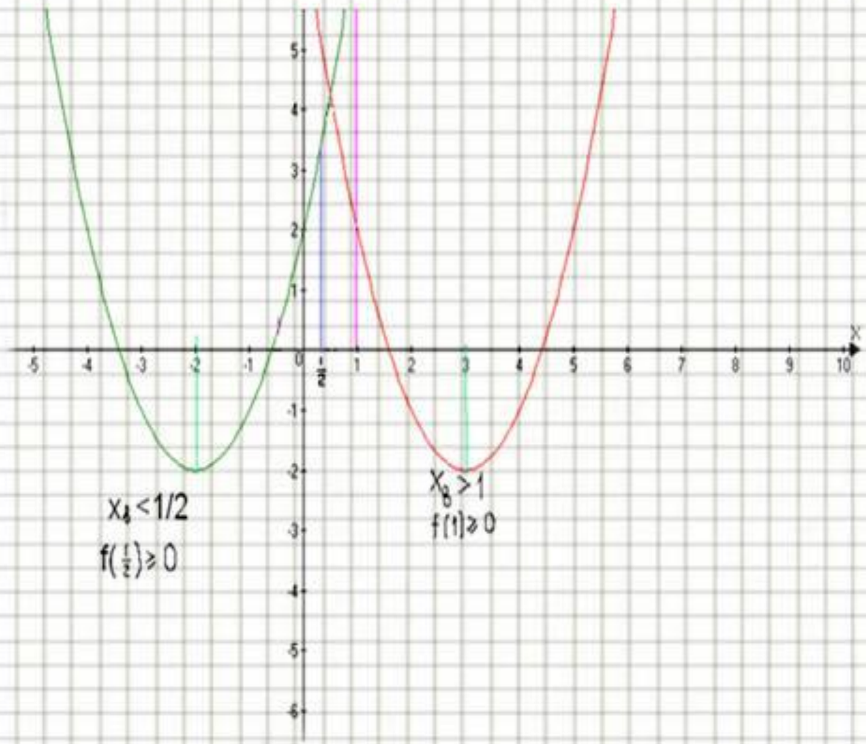
Для каждого значения a найдите число решений уравнения $a\,tgx + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $\left[0; 2\pi\right]$.

. При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$.

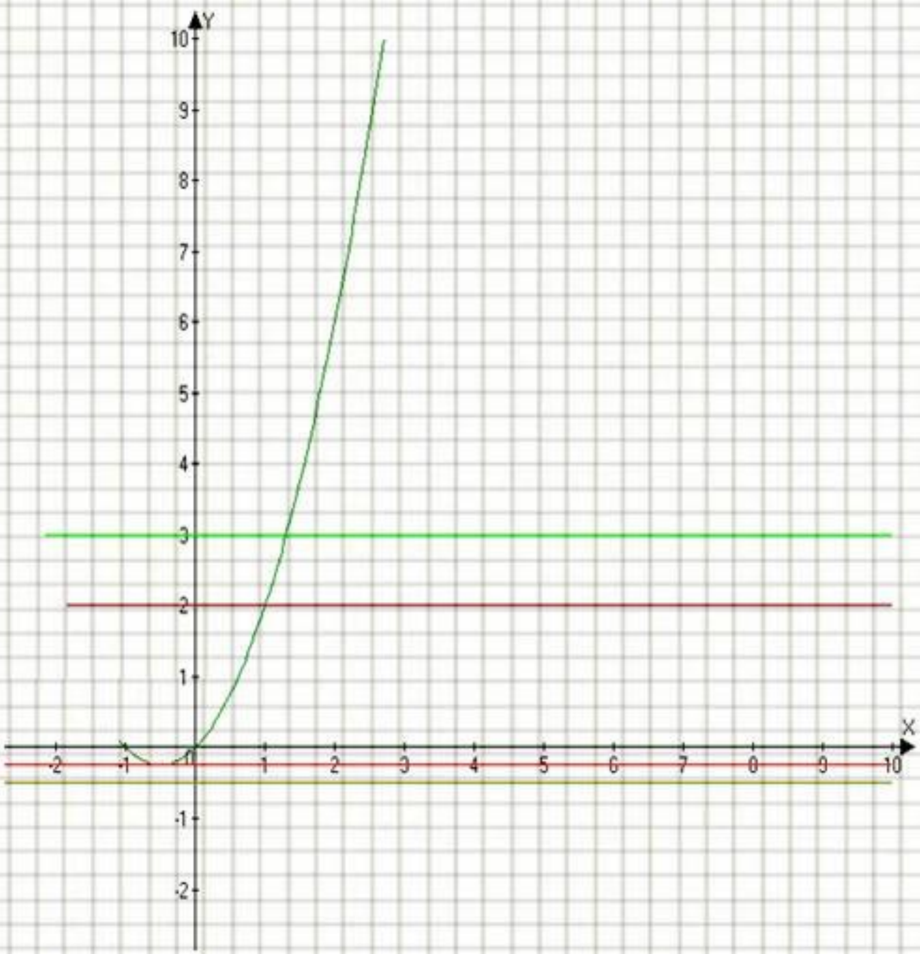
- Выясните, при каких значениях параметра a неравенство $\cos^2 x - 2(a-3)\cos x + 2a + 9 \geq 0$
- выполняется на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

D<0





- Выясните, сколько корней в зависимости от а на $[0;2\pi]$
- имеет уравнение $\cos^2 x + \cos x = a$



$a \square -\frac{1}{4}$ *решениянет*

$a = -\frac{1}{4} - 2$ *решения*

$-\frac{1}{4} \square a \square 0 - 4$ *решения*

$a = 0 - 3$ *решения*

$0 \square a \leq 2 - 2$ *решения*

$a \square 2$ *решениянет*

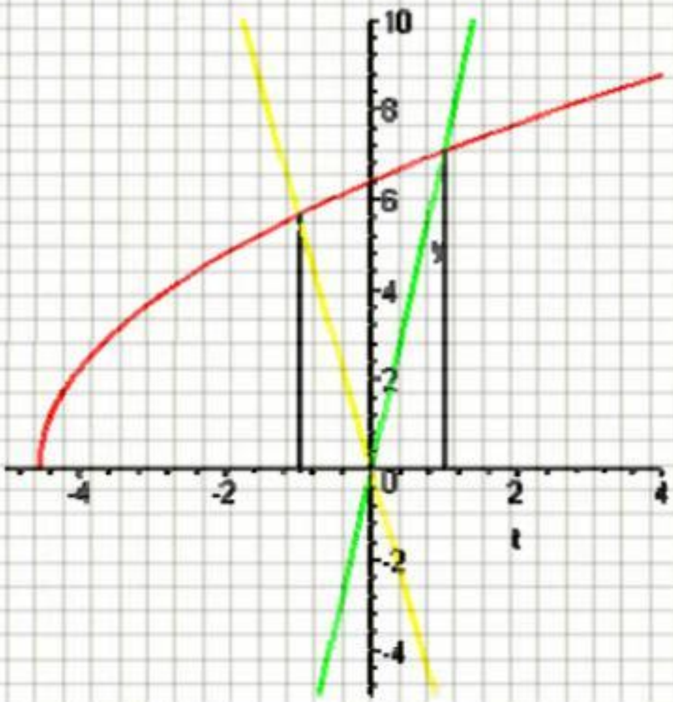
Найдите все значения a, при которых каждое из уравнений $\sqrt{41+9\cos x}-a\cos x=0$ и $|x-a|+7|x+2|+5x=0$ имеет хотя бы один корень.

Посмотрим сначала когда первое уравнение имеет корни. С учетом области значений косинуса выражение под корнем всегда положительное. Получаем: $\sqrt{41+9\cos x}=a\cos x$

А вот здесь сейчас будет интересно. Казалось бы, все прекрасно, возводим в квадрат – и вперед, по стандартной схеме исследуем корни квадратного уравнения. Но все не так просто. Поскольку на наличие корней будет влиять знак произведения, стоящего в правой части.

Можно очень легко выкрутиться из этой ситуации без рассмотрения большого числа случаев. Как всегда на помощь приходят графики.

Рассмотрим функции $f=\sqrt{41+9t}$ и $g=at$. Точка пересечения этих графиков должна попасть в отрезок [-1;1] поскольку $t=\cos x$



Точка пересечения для возрастающей прямой $f(1)=g(1);\quad a=5\sqrt{2}$, для убывающей $f(-1)=g(-1);\quad a=-4\sqrt{2}$

Не составляет большого труда увидеть, что точка пересечения будет в промежутке от -1 до 1, если

$a\in\left(-\infty;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[5\sqrt{2};\infty\right)$

Теперь займемся вторым уравнением. Здесь все проще.

$$|x-a|+7|x+2|+5x=0; \quad \to \quad -|x-a|=7|x+2|+5x$$

Функция, стоящая в правой части достигает своего наименьшего значения -10 в точке $x=-2$. График функции в левой части представляет собой «перевернутый» график модуля, смещенный по оси абсцисс на величину *а*.

Для того чтобы уравнение имело корни, должно быть выполнено условие $-|-2-a|\geq -10$

Получаем:

$$|-2-a|\leq 10; \quad \to \quad -10\leq -2-a\leq 10; \quad \to \quad -8\leq -a\leq 12; \quad \to \quad -12\leq a\leq 8$$

Примечание. Второй случай можно разобрать и иначе, выполнив условие, что наименьшее значение функции $|x-a|+7|x+2|+5x$ должно быть неположительным. Для этого надо раскрыть модули всеми возможными способами и составить систему неравенств.

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a\in\left[-12;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[5\sqrt{2};8\right]$

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $\left|\cos 2x + \frac{1}{2}(a-4)\cos x - \left(\frac{1}{2}a - 2\right)\right| \le 1$ верно при всех значениях переменной х.

Обозначим $\cos x = t$, тогда неравенство имеет вид:

$$\left|2t^2 - 1 + \frac{1}{2}(a-4)t - \frac{a}{2} + 2\right| \le 1$$

$$\left|4t^2 + (a-4)t - a + 2\right| \le 2$$

$$\begin{cases} 4t^2 + (a-4)t - a \le 0 \\ 4t^2 + (a-4)t - a + 4 \ge 0 \end{cases}$$

Поскольку $t = \cos x \in [-1;1]$, то для выполнения первого неравенство необходимо и достаточно, чтобы $\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases}$ где $f(t) = 4t^2 + (a-4)t - a$

Получаем: $\begin{cases} 4 - a + 4 - a \le 0 \\ 4 + a - 4 - a \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \ge 4 \\ 0 \le 0 \end{cases} \rightarrow a \ge 4$ (1)

Второе неравенство будет всегда выполнено, если

$D = a^2 - 8a + 16 + 16a - 64 = a^2 + 8a - 48 \le 0$, т.е. $a \in [-12;4]$ (2)

Предположим, что 2 нуля все-таки есть, т.е. $a \in (-\infty;-12) \cup (4;\infty)$

Заметим, что вершина параболы $4t^2 + (a-4)t - a + 4 \quad t_0 = \frac{4-a}{8}$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы и вершина и оба нуля этой параболы были левее, чем -1 или наоборот – и вершина и оба нуля правее, чем 1.

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{4-a}{8} \le -1 \\ g(-1) \ge 0 \end{cases}$ где $g(t) = 4t^2 + (a-4)t - a + 4$

Получаем: $\begin{cases} 4-a \le -8 \\ 4-a+4-a+4 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \ge 12 \\ a \le -6 \end{cases}$ - так не бывает

Теперь $\begin{cases} \dfrac{4-a}{8} \ge 1 \\ g(1) \ge 0 \end{cases}$ тогда $\begin{cases} 4-a \ge 8 \\ 4+a-4-a+4 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \le -4 \\ 4 \ge 0 \end{cases}$

Итого, в случае двух нулей второго неравенства $a \in (-\infty; -12)$, что совершенно не согласуется с условием (1)

Ну вот и всё… вместе условия (1) и (2) дают ответ $a = 4$

При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0;2\pi)$?

Преобразуем

$2\cos^2 x + 2\cos x - 2a^2 - 2a = 0$

$\cos^2 x + \cos x - a^2 - a = 0$

На участке $[0;2\pi)$ любое значение косинуса будет давать 2 значения угла кроме точек $x = 0$ и $x = \pi$, тогда значение угла будет единственным

Пусть $x = 0$

Получаем $2 - a^2 - a = 0 \quad \to \quad a = -2;1$

При $a = 1;-2 \quad \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \quad \to \quad \cos x = -2;1$ имеем единственное решение $x = 0$

Пусть $x = \pi$

Получаем $1 - 1 - a^2 - a = 0 \quad \to \quad a = 0;-1$

При $a = -1;0 \quad \cos^2 x + \cos x = 0 \quad \to \quad \cos x = -1;0$ имеем два решения $x = 0$ и $x = \pi$, значит эти значения параметра не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = 1;-2$

Применение классических формул

- Найти наибольшее значение функции

$$\sqrt{\cos^2 x + a\sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x}$$ где $a > 0$

- Решение: Найдем наибольшее значение квадрата этой функции

$$\cos^2 x + a\sin^2 x + \sin^2 x + a\cos^2 x + 2\sqrt{(\cos^2 x + a\sin^2 x)(\sin^2 x + a\cos^2 x)}$$

С учетом того, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ имеем

$$f^2(x) = 1 + a + \sqrt{(\cos^2 x + a\sin^2 x)(\sin^2 x + a\cos^2 x)}$$

- Выражение примет наибольшее значение тогда, когда наибольшее значение будет иметь подкоренное выражение. Имеем

$$(\cos^2 x + a\sin^2 x) + (\sin^2 x + a\cos^2 x) = 1 + a = \mathrm{const}$$

- Если сумма двух положительных переменных постоянна, то произведение этих переменных имеет наибольшее значение, когда оба сомножителя принимают одинаковые значения.

$$\cos^2 x + a\sin^2 x = \sin^2 x + a\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x = a(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\cos 2x = a\cos 2x \quad \Rightarrow \quad (a-1)\cos 2x = 0$$

Если $\cos 2x = 0$ то $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad k \in Z$

- В этом случае каждое из подкоренных выражений равно (1+a)/2 и

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1+a}{2}}=\sqrt{2(1+a)}$$

Если , то значение функции будет 2.

Ответ: $\sqrt{2(a+1)}$

Спасибо за внимание!