

Параметры в тригонометрии



Подходы решений тригонометрических уравнений с параметрами

- Рассмотрим некоторые общие подходы при решении определенных типов тригонометрических уравнений с параметрами. В дальнейшем будем обозначать вектор параметров уравнения через a .



Введение дополнительных переменных

- Найдите все значения параметра a , при котором неравенство справедливо при всех значениях x .

$$|3\sin 2x + 2a \sin x \cos x + \cos 2x + a| \leq 3$$



Вспомогательные преобразования

- Найти a при котором имеет по крайней мере одно решение уравнение

$$(a^2 - 4a + 4)(4 + 4\sin^2 x + 8\sin x) + 2(16a - 16 - 4a^2)(\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x) - 8a + 28 = 0$$



- Решение: Преобразуем это уравнение, используя формулы сокращенного умножения и основное тригонометрическое тождество:

$$(a - 2)^2 \cdot 4(\sin^2 x + 2\sin x + 1) - 2 \cdot 4(a^2 - 4a + 4)(1 + \sin x) - 8a + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$4(a - 2)^2 (\sin x + 1)^2 - 8(a - 2)^2 (\sin x + 1) - 8a + 28 = 0$$



- Разделим обе части уравнения на 4:

$$(a - 2)^2 (\sin x + 1)^2 - 2(a - 2)^2 (\sin x + 1) - 2a + 7 = 0$$

$$(a - 2)^2 (\sin x + 1)^2 - 2(a - 2)^2 (\sin x + 1) = 2a - 7$$



В левой части уравнения вынесем за

скобки получим $(a-2)^2(\sin x+1)(\sin x+1-2) = 2a-7 \implies (a-2)^2(\sin x+1)(\sin x-1) = 2a-7 \implies$
 $(a-2)^2(\sin^2 x - 1) = 2a-7$

a = 2 $(2-2)^2(\sin^2 x - 1) = 2 \cdot 2 - 7 \implies 0 = -3$ значит решений нет

$$\sin^2 x - 1 = \frac{2a-7}{(a-2)^2} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 + \frac{2a-7}{(a-2)^2} \implies$$

Зная, что $-1 \leq \sin x \leq 1$ следовательно $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ значит $0 \leq 1 + \frac{2a-7}{(a-2)^2} \leq 1$



• Зная, что $-1 \leq \sin x \leq 1$ следовательно $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

значит $0 \leq 1 + \frac{2a - 7}{(a - 2)^2} \leq 1 \quad 0 \leq (a - 2)^2 + 2a - 7 \leq (a - 2)^2 \Rightarrow$

$$0 \leq a^2 - 4a + 4 + 2a - 7 \leq a^2 - 4a + 4 \Rightarrow 0 \leq a^2 - 2a - 3 \leq a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$$

$$0 \leq a^2 - 2a - 3 \leq a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 \geq 0 \\ 2a - 7 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -1 \\ a \geq 3 \\ a \leq 3,5 \end{cases}$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup [3; 3,5]$

Графический метод.



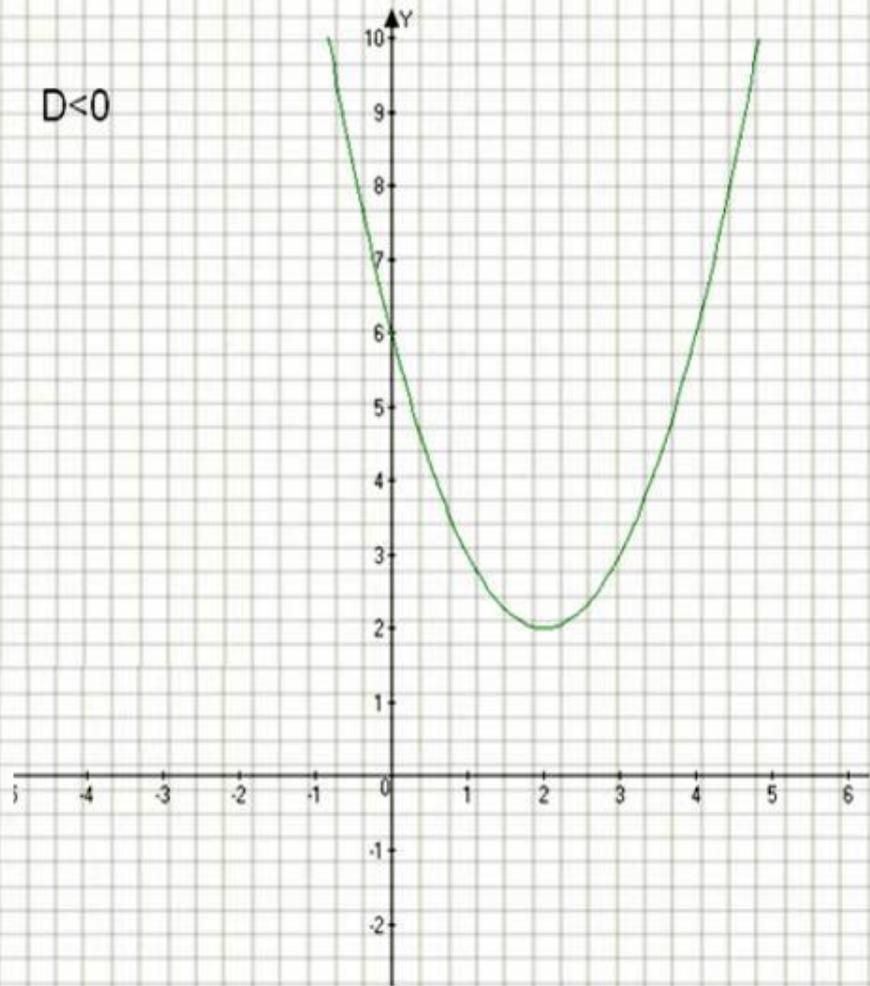
25.01.2015

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

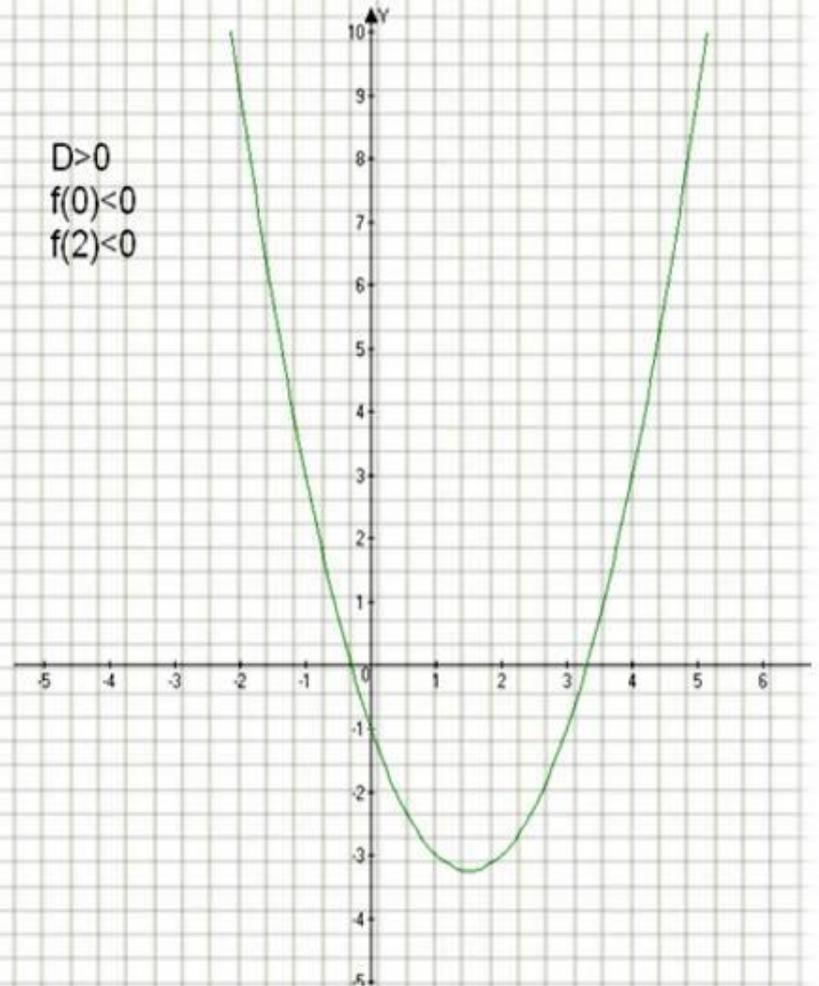
$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2) \cdot (1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

$D < 0$



$D > 0$
 $f(0) < 0$
 $f(2) < 0$



Найти все значения параметра a ,
при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.



- При всех значениях параметра a решите уравнение

$$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x - 2) = 8a + \cos(x - 4a + 2)$$



Найдите все значения параметра q , при которых уравнение $\sin^2 x + (q - 2)^2 \sin x + q(q - 2)(q - 3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

Для каждого значения a найдите все
решения уравнения

$$\cos 2x + 2 \sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \leq x \leq 2\pi..$

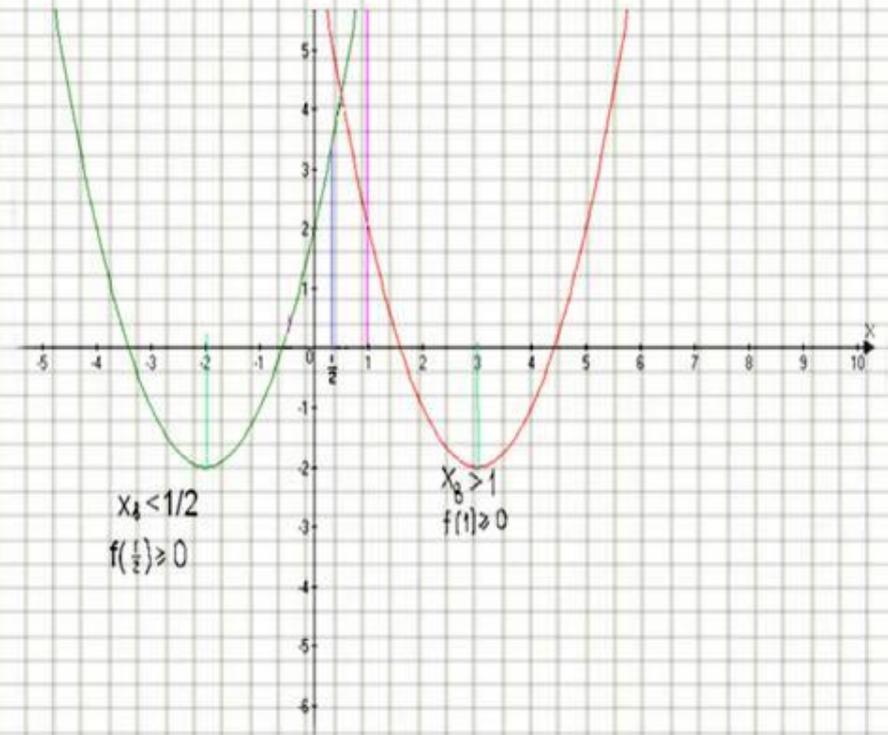
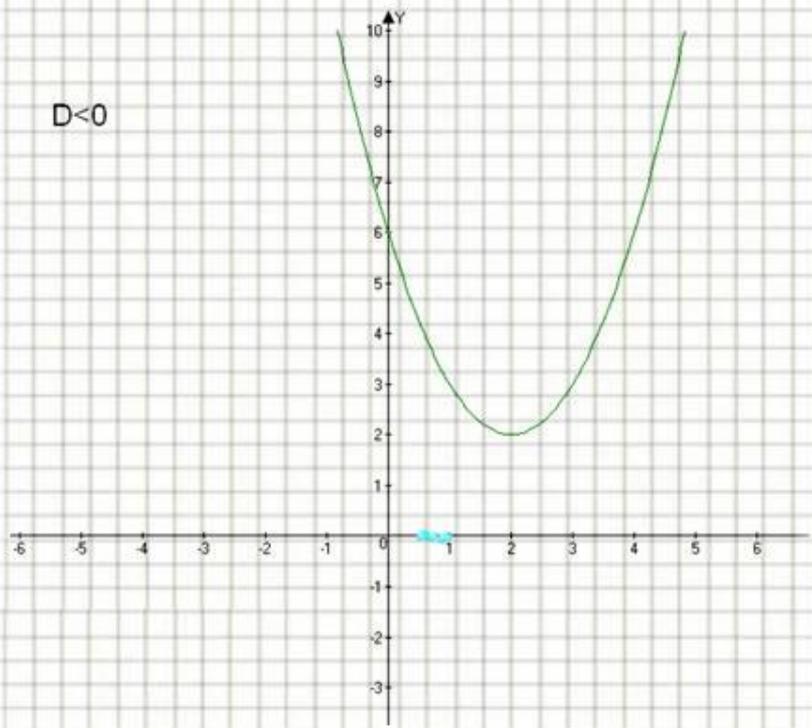
Для каждого значения a найдите число
решений уравнения $a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1$,
принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$.

При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leq x < 2\pi$.

- Выясните, при каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 2a + 9 \geq 0$
- выполняется на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

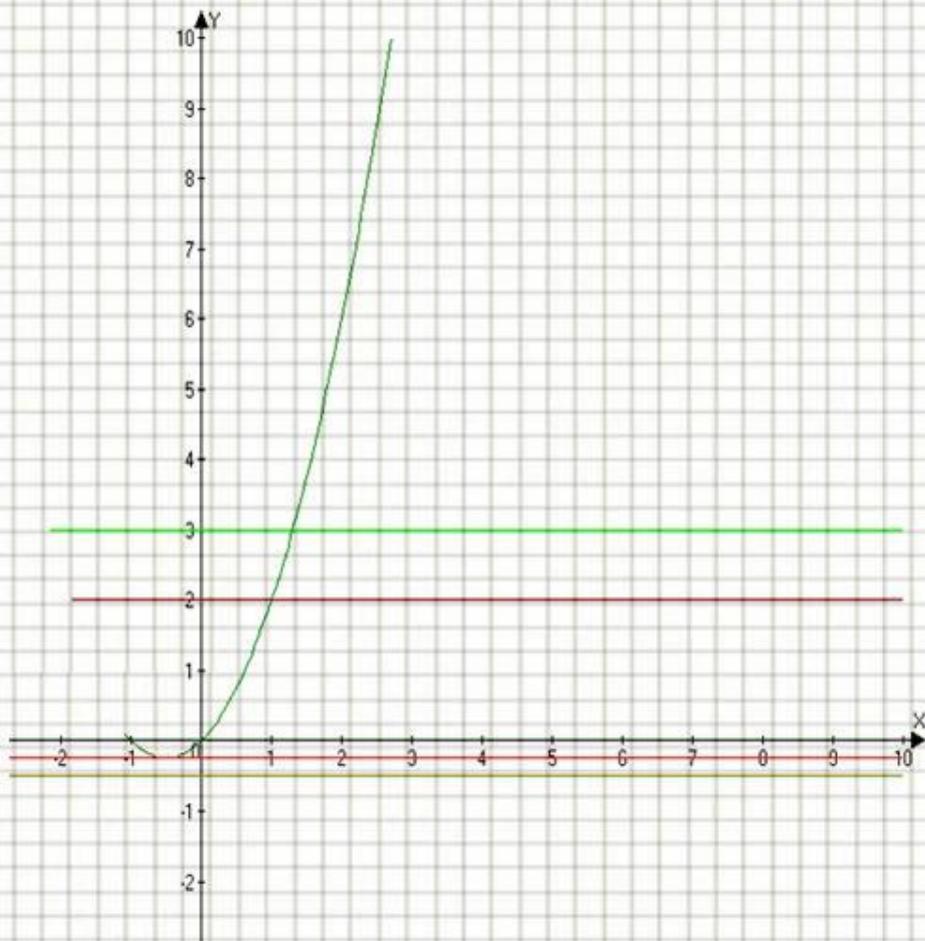


$D < 0$



- Выясните, сколько корней в зависимости от a на $[0, 2\pi]$
- имеет уравнение $\cos^2 x + \cos x = a$





$a < -\frac{1}{4}$ решения нет

$a = -\frac{1}{4}$ — 2 решения

$-\frac{1}{4} < a < 0$ — 4 решения

$a = 0$ — 3 решения

$0 < a \leq 2$ — 2 решения

$a > 2$ решения нет

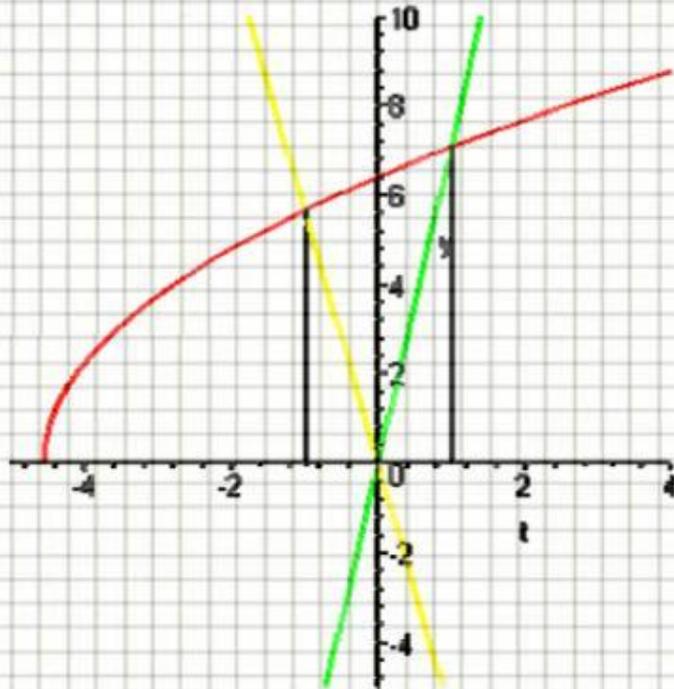
Найдите все значения a , при которых каждое из уравнений $\sqrt{41+9\cos x} - a\cos x = 0$ и $|x-a| + 7|x+2| + 5x = 0$ имеет хотя бы один корень.

Посмотрим сначала когда первое уравнение имеет корни. С учетом области значений косинуса выражение под корнем всегда положительное. Получаем: $\sqrt{41+9\cos x} = a\cos x$

А вот здесь сейчас будет интересно. Кажется бы, все прекрасно, возводим в квадрат – и вперед, по стандартной схеме исследуем корни квадратного уравнения. Но все не так просто. Поскольку на наличие корней будет влиять знак произведения, стоящего в правой части.

Можно очень легко выкрутиться из этой ситуации без рассмотрения большого числа случаев. Как всегда на помощь приходят графики.

Рассмотрим функции $f = \sqrt{41+9t}$ и $g = at$. Точка пересечения этих графиков должна попасть в отрезок $[-1; 1]$ поскольку $t = \cos x$



Точка пересечения для возрастающей прямой $f(1) = g(1); a = 5\sqrt{2}$, для убывающей $f(-1) = g(-1); a = -4\sqrt{2}$

Не составляет большого труда увидеть, что точка пересечения будет в промежутке от -1 до 1, если

$$a \in (-\infty; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; \infty)$$

Теперь займемся вторым уравнением. Здесь все проще.

$$|x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0; \rightarrow -|x - a| = 7|x + 2| + 5x$$

Функция, стоящая в правой части достигает своего наименьшего значения -10 в точке $x = -2$. График функции в левой части представляет собой «перевернутый» график модуля, смещенный по оси абсцисс на величину a .

Для того чтобы уравнение имело корни, должно быть выполнено условие $-|-2 - a| \geq -10$

Получаем:

$$|-2 - a| \leq 10; \rightarrow -10 \leq -2 - a \leq 10; \rightarrow -8 \leq -a \leq 12; \rightarrow -12 \leq a \leq 8$$

Примечание. Второй случай можно разобрать и иначе, выполнив условие, что наименьшее значение функции $|x - a| + 7|x + 2| + 5x$ должно быть неположительным. Для этого надо раскрыть модули всеми возможными способами и составить систему неравенств.

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a \in [-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \cos 2x + \frac{1}{2}(a-4)\cos x - \left(\frac{1}{2}a - 2\right) \right| \leq 1$ верно при всех значениях переменной x .

Обозначим $\cos x = t$, тогда неравенство имеет вид:

$$\left| 2t^2 - 1 + \frac{1}{2}(a-4)t - \frac{a}{2} + 2 \right| \leq 1$$

$$\left| 4t^2 + (a-4)t - a + 2 \right| \leq 2$$

$$\begin{cases} 4t^2 + (a-4)t - a \leq 0 \\ 4t^2 + (a-4)t - a + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Поскольку $t = \cos x \in [-1; 1]$, то для выполнения первого неравенство необходимо и достаточно,

чтобы $\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$ где $f(t) = 4t^2 + (a-4)t - a$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} 4 - a + 4 - a \leq 0 \\ 4 + a - 4 - a \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \rightarrow a \geq 4 \quad (1)$$

Второе неравенство будет всегда выполнено, если

$$D = a^2 - 8a + 16 + 16a - 64 = a^2 + 8a - 48 \leq 0, \text{ т.е. } a \in [-12; 4] \quad (2)$$

Предположим, что 2 нуля все-таки есть, т.е. $a \in (-\infty; -12) \cup (4; \infty)$

Заметим, что вершина параболы $4t^2 + (a-4)t - a + 4$ $t_0 = \frac{4-a}{8}$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы и вершина и оба нуля этой параболы были левее, чем -1 или наоборот – и вершина и оба нуля правее, чем 1.

$$\text{Т.е. } \begin{cases} \frac{4-a}{8} \leq -1 \\ g(-1) \geq 0 \end{cases} \quad \text{где } g(t) = 4t^2 + (a-4)t - a + 4$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} 4-a \leq -8 \\ 4-a+4-a+4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \geq 12 \\ a \leq -6 \end{cases} \quad \text{- так не бывает}$$

$$\text{Теперь } \begin{cases} \frac{4-a}{8} \geq 1 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \quad \text{тогда } \begin{cases} 4-a \geq 8 \\ 4+a-4-a+4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ 4 \geq 0 \end{cases}$$

Итого, в случае двух нулей второго неравенства $a \in (-\infty; -12)$, что совершенно не согласуется с условием (1)

Ну вот и всё... вместе условия (1) и (2) дают ответ $a = 4$

При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$?

Преобразуем

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x - a^2 - a = 0$$

На участке $[0; 2\pi)$ любое значение косинуса будет давать 2 значения угла кроме точек $x = 0$ и $x = \pi$, тогда значение угла будет единственным

Пусть $x = 0$

$$\text{Получаем } 2 - a^2 - a = 0 \rightarrow a = -2; 1$$

При $a = 1; -2$ $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = -2; 1$ имеем единственное решение $x = 0$

Пусть $x = \pi$

$$\text{Получаем } 1 - 1 - a^2 - a = 0 \rightarrow a = 0; -1$$

При $a = -1; 0$ $\cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1; 0$ имеем два решения $x = 0$ и $x = \pi$, значит эти значения параметра не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = 1; -2$

Применение классических формул

- Найти наибольшее значение функции

$$\sqrt{\cos^2 x + a \sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + a \cos^2 x} \quad \text{где } a > 0$$

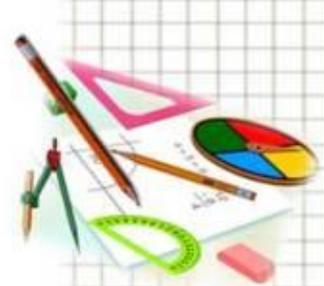


- Решение: Найдем наибольшее значение квадрата этой функции

$$\cos^2 x + a \sin^2 x + \sin^2 x + a \cos^2 x + 2\sqrt{(\cos^2 x + a \sin^2 x)(\sin^2 x + a \cos^2 x)}$$

С учетом того, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ имеем

$$f^2(x) = 1 + a + \sqrt{(\cos^2 x + a \sin^2 x)(\sin^2 x + a \cos^2 x)}$$



- Выражение примет наибольшее значение тогда, когда наибольшее значение будет иметь подкоренное выражение. Имеем

$$(\cos^2 x + a \sin^2 x) + (\sin^2 x + a \cos^2 x) = 1 + a = \text{const}$$



- Если сумма двух положительных переменных постоянна, то произведение этих переменных имеет наибольшее значение, когда оба сомножителя принимают одинаковые значения

$$\cos^2 x + a \sin^2 x = \sin^2 x + a \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = a(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\cos 2x = a \cos 2x \Rightarrow (a - 1) \cos 2x = 0$$

$$\text{Если } \cos 2x = 0 \text{ то } 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad k \in Z$$



- В этом случае каждое из подкоренных выражений равно $(1+a)/2$ и

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+a}{2}} + \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \sqrt{2(1+a)}$$

Если , то значение функции будет 2.

Ответ: $\sqrt{2(a+1)}$



Спасибо за внимание!

