Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 42

Исследовательская работа

Векторно-координатный метод решения задач по стереометрии

Авторы: ученик 11 класса

Павленко Илья

Руководитель: учитель математики

Бондарь Г.В.

Комсомольск-на-Амуре
2016

Содержание

Введение

Векторно-координатный метод решения задач на сегодняшний день один из самых эффективных и при рациональном использовании позволяет решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Кроме того, координатный метод в рамках школьной программы используется неполно. В своей работе мне бы хотелось показать, как решаются стереометрические задачи, если на них взглянуть с иной точки зрения, то есть рассмотреть задачу в трехмерной системе координат.

Цели данной работы

- Раскрыть суть данного метода, используя основные формулы, изученные в школьном курсе геометрии и дополнительный материал;
- Показать применение метода на несложных, элементарных задачах;
- Решить сложные стереометрические задачи при помощи векторно-координатного метода, сравнить и показать его преимущества перед геометрическим методом.

Проблема в том, что не всегда удобно использовать геометрический метод. Иногда он не очень лёгок при решении некоторых задач … Всё это сопровождается нехваткой времени, так как геометрическое задание одно из последних, и до окончания экзамена, как правило, остаётся совсем немного.

Актуальность работы заключается в том, что изучив векторно- координатный метод, представленный в работе, мы сможем решать некоторые геометрические задачи <u>второй части</u> ЕГЭ более рационально.

Для начала рассмотрим, в чем же заключается метод координат.

Теория. Основные формулы метода координат

Существует два способа решения задач по стереометрии

- Первый — геометрический, требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает умственное мышление и пространственное воображение.

- Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Недостатки, что выкладки могут быть слишком объёмны.

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними). Он позволяет упростить решение некоторых стереометрических задач.

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.

Если в пространстве введена система координат OXYZ, каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел (x, **y**, z).

- Середина отрезка между точками $M_1(x; y; z)$ и $M_2(x_1; y_1; z_1)$ имеет координаты

$$\left(\frac{x+x_1}{2}; \frac{y+y_1}{2}; \frac{z+z_1}{2}\right)$$

- Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- Множество точек (x; y; z), координаты которых удовлетворяют уравнению $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ есть сфера с центром $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0},\mathbf{z_0})$ и радиуса R.

- Множество точек (x, y, z), координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + cz + d = 0$ (a, Ь, c и d - некоторые числа) есть плоскость.

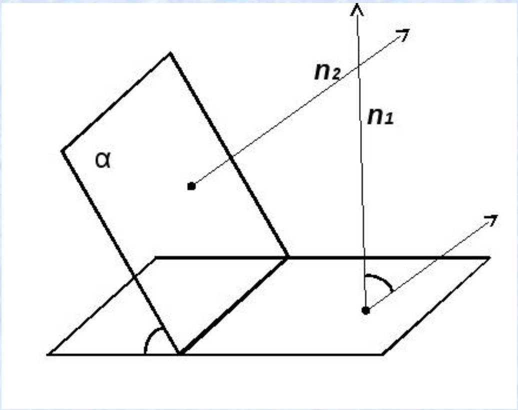
- Расстояние от точки $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0},\mathbf{z_0})$ до плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, уравнение которой имеет вид ax + by + cz + d=0, равно

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Косинус угла между прямыми, если известны координаты направляющих векторов, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:



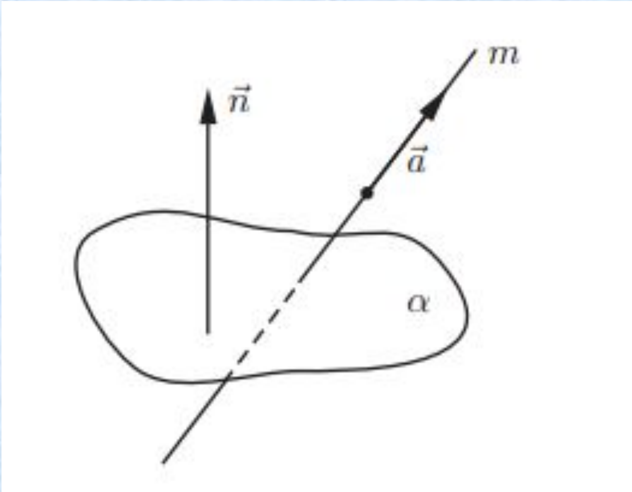
$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

Чтобы найти угол между плоскостями нужно модуль скалярного произведения нормалей поделить на произведение их длин.

- Угол между прямой и плоскостью тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов:

Пусть $\vec{a}$ — вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$— нормаль к плоскости α

Находим синус угла между прямой m и плоскостью α по формуле:

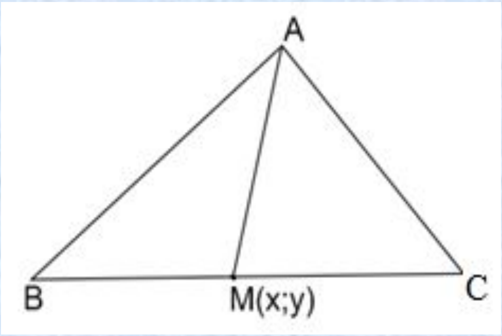


$$\text{Sin}\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$$

Пример простейшей задачи на применение метода координат

Задача 1.

Дан треугольник с вершинами А, В, С. Найти медиану АМ



Дано: Δ

ABC;A(0;1)

B(1;-4);C(5;2)

Найти: АМ=?

Решение:

Найдем координаты точки M(x,y) как середины отрезка *BC*:

$$x = \frac{1+5}{3} = 3;\ y = \frac{-4+2}{2} = -1;\ M(3;-1).$$

Найдем длину отрезка АМ :

$$AM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Ответ: $AM = \sqrt{13}$.

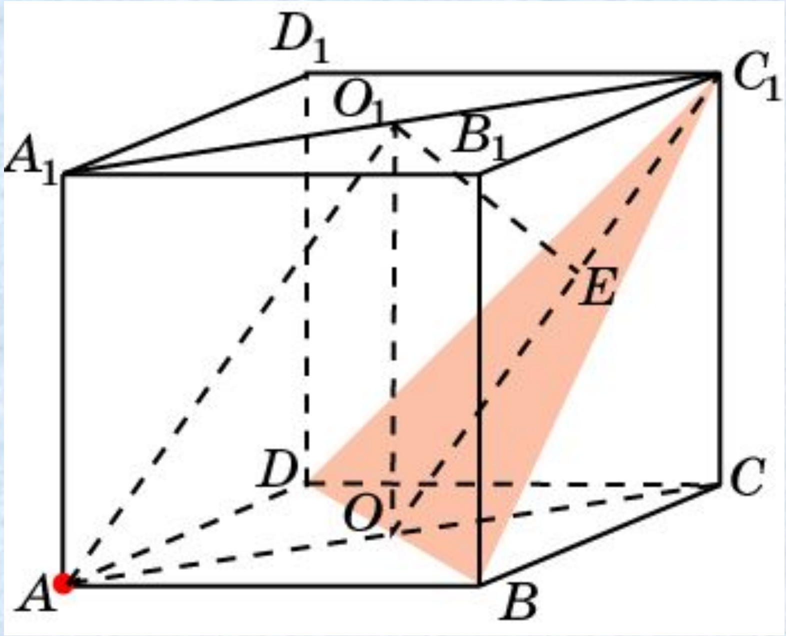
Решение стереометрических задач части 2 из ЕГЭ геометрическим и векторно-координатным методами

В качестве примеров разберём несколько заданий ЕГЭ последних лет и решим двумя способами: геометрическим и координатно - векторным.

Задача 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости $BDC_{1.}$

Решение (геометрический способ)



Решение

Обозначим O и O_1 – центры граней куба. Четырёхугольник AO_1C_1O –параллелограмм, так как $AO||O_1C_1$ и $AO = O_1C_1$. Следовательно, $AO_1 || OC1$, а $OC1 \in (BC1D)$, значит $AO1 || (BC1D)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Расстояние от точки A до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки O_1 до этой плоскости, т.е. высоте

Имеем $OO_1 = 1$; $O_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OC_1 = \sqrt{C_1B^2 - OB^2} = \sqrt{2 - 0{,}5} = \sqrt{1{,}5} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Найдём площадь треугольника OO_1C_1.

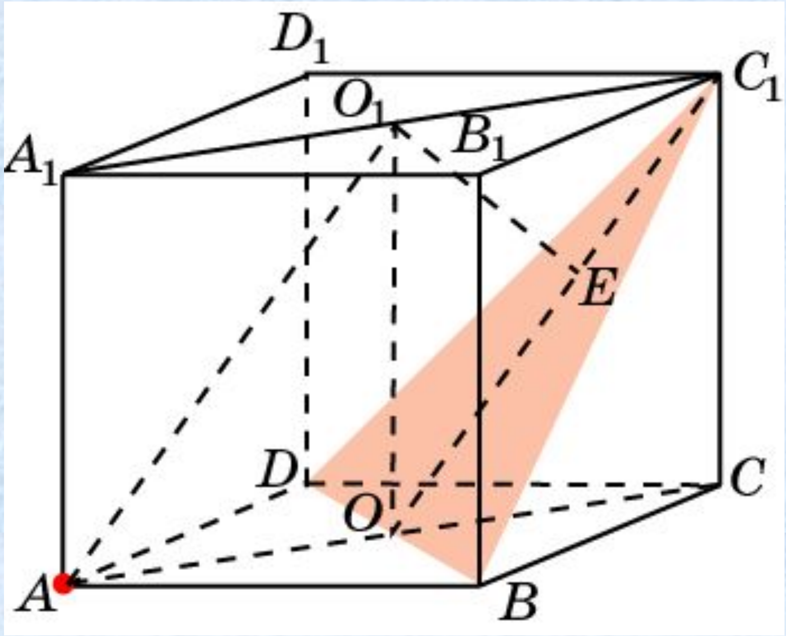
$S = \frac{1}{2}\ OO_1 \cdot O_1C_1$ $\qquad$ $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Площадь этого треугольника можно найти другим способом: $S = \frac{1}{2} \cdot OC_1\ O_1E$

$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}\ O_1E$ или $\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot O_1E$, отсюда $O_1E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

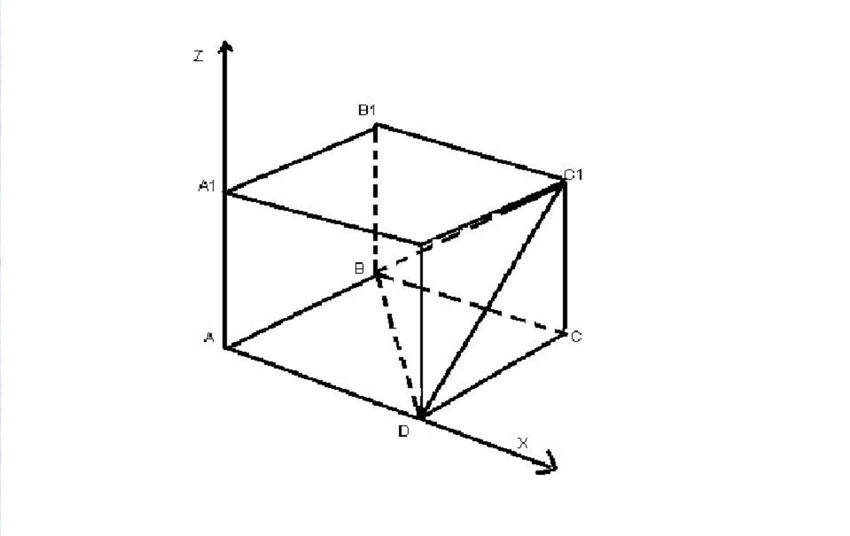
Следовательно, $O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Решение (векторно-координатным способ)

Введём прямоугольную систему координат так, чтобы ребро куба AD лежало на оси OX, AA_1 на оси OZ и AB на OY.



Тогда координаты некоторых точек будут равны B(0;1;0), D(1;0;0) и C_1(1;1;1). Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0

Получим систему уравнений $\begin{cases} B + D = 0 \\ A + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} B = -D \\ A = -D \\ C = D \end{cases}$

Отсюда находим уравнение –Dx –Dy + Dz + D = 0 или x + y - z - 1 = 0

По формуле находим расстояние от точки A(0;0;0) до плоскости BDC_1:

$$l = \frac{|ax_0 + dy_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$l = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **.**

Проанализировав два способа решения каждой задачи, можно сделать вывод, что **векторно-координатный** способ в некоторых задачах бывает более удобен. Можно сказать, что он алгоритмичен, а это экономит время на экзамене, что важно.

Рассмотрим уравнение плоскости через определитель

Теорема. Пусть даны координаты трёх точек, через которые надо провести плоскость: M1 (x_1, y_1, z_1); M2 (x_2, y_2, z_2); M3 (x_3, y_3, z_3). Тогда уравнение этой плоскости можно записать через определитель:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Затем определитель раскрывается по схеме и получается стандартное

уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где числа A, B, C и D — коэффициенты, которые, собственно, и требуется

найти.

Задача 2

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки:

A_1 (0, 0, 1);

B (1, 0, 0);

C_1 (1, 1, 1);

Составляем определитель и приравниваем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 1-0 & 1-0 & 1-1 \\ x-0 & y-0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определитель:

$a = 1 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 0 \cdot 0 \cdot x + (-1) \cdot 1 \cdot y = z - 1 - y;$

$b = (-1) \cdot 1 \cdot x + 0 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 1 \cdot 0 \cdot y = -x;$

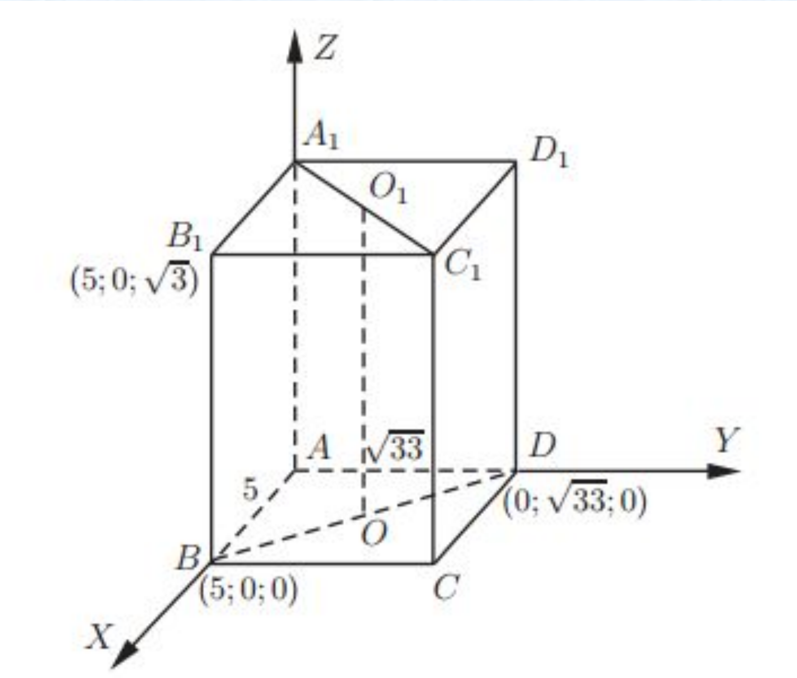
$d = a - b = z - 1 - y - (-x) = z - 1 - y + x = x - y + z - 1;$

$d = 0 \Rightarrow x - y + z - 1 = 0;$

Задача 3

Угол между плоскостями

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перперпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$



Прямые A_1C_1 и BD скрещиваются. Одна из них — диагональ верхнего основания, другая — диагональ нижнего. Вспомним, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Общий перпендикуляр к A_1C_1 и BD — это, очевидно, OO_1, где O — точка пересечения диагоналей нижнего основания, O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего. А отрезок OO_1 и равен высоте параллелепипеда.

Итак, $AA_1 = \sqrt{3}$. Плоскость AA_1D_1D — это задняя грань призмы на нашем чертеже. Нормаль к ней — это любой вектор, перпендикулярный задней грани, например, вектор $\overrightarrow{AB}(5;\ 0;\ 0)$ или, еще проще, вектор $\overrightarrow{n_1}(1;\ 0;\ 0)$.

Если плоскость перпендикулярна прямой B_1D — значит, B_1D и есть нормаль к этой плоскости! Координаты точек B_1 и D известны:

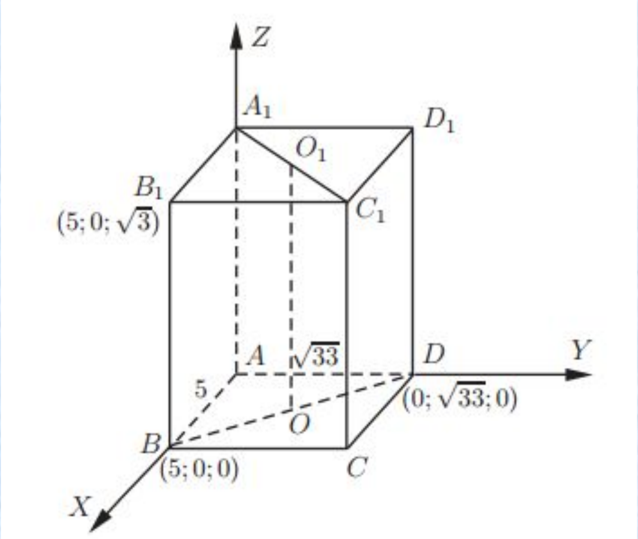
$B_1\ (5;\ 0;\ \sqrt{3})$

$D\ (0;\ \sqrt{33};\ 0)$

Координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$ будут:

$(-5;\ \sqrt{33};\ -\sqrt{3}) = \overrightarrow{n_2}$

Находим угол между плоскостями, равный углу между нормалями к ним:



$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{5}{\sqrt{25+33+3}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

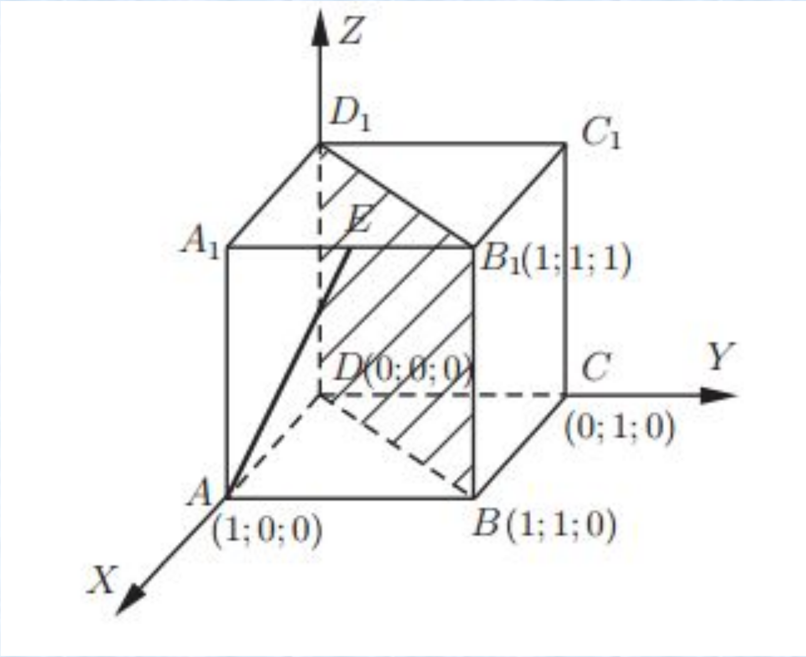
Зная косинус угла, находим его тангенс по формуле

$$1 + \mathrm{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Получим: $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{6}{5}$.

Задача 4
Угол между прямой и плоскостью

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1



- Рисуем чертеж и выбираем систему координат

A (1; 0; 0)

E $(1; \frac{1}{2}; 1)$

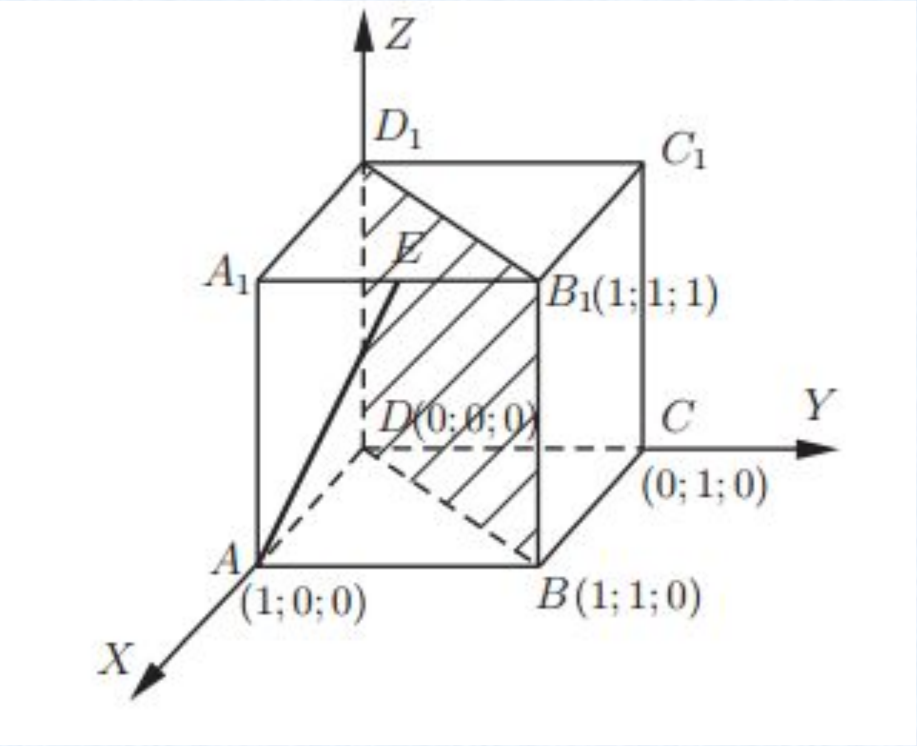
Находим координаты вектора

$\overrightarrow{AE}$ $(0; \frac{1}{2}; 1)$

Плоскость BDD_1 является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например вектор $\overrightarrow{AC}$

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\text{Sin } \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Заключение

В своей работе мы рассмотрели различные способы решения геометрических задач, используя известные методы.
Анализируя все решения, сделали для себя важные выводы:

А) Во-первых, благодаря такой работе снимается психологический барьер перед поиском решения задачи.
Ведь если знаешь, что задача имеет несколько способов решения, то смелее берешься за нее. Постепенно, решая задачу за задачей, приобретаешь некоторый опыт, что позволяет развить математическое чутье.

Б) Во-вторых, подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал.

В) В-третьих, при такой работе над задачей формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания.

Г) В-четвертых, овладевая основными методами решения задач, можно рационально планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи, а также использовать известные приемы познавательной деятельности - наблюдение, сравнение, обобщение.

Все перечисленное создает условия для формирования навыков исследовательской деятельности, способствующей накоплению творческого потенциала. Думаем, что данная работа поможет нам успешно сдать Единый Государственный Экзамен по математике.

Я не смог рассмотреть все примеры задач на применение векторно-координатного метода, но он успешно применяется при вычислении углов между прямой и плоскостью, между прямыми, а также для отыскания расстояний от точки до плоскости, между плоскостями и прямыми.

Список использованной литературы

Интернет ресурсы

1. А. Г. Малкова. Подготовка к ЕГЭ по математике. Материалы сайта http://ege-study.ru
2. «Применение метода координат в решении простейших задач» http://interneturok.ru
3. Уравнение плоскости через определитель

   http://www.berdov.com
4. Площадь ортогональной проекции многоугольника http://egemaximum.ru
5. Векторы в пространстве и метод координат

   http://ege-study.ru