ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Кузнецова Елена Борисовна, учитель математики
МБОУ СОШ № 46 с УИОП
г. Сургут

Задача 1

- **Доказать, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,**

$$\text{то } \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} + \sqrt{z^4 + 1} \geq \sqrt{10}$$

Доказательство:

Пусть $\bar{a}(x^2; 1), \bar{b}(y^2; 1), \bar{c}(z^2; 1)$;

$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (x^2 + y^2 + z^2; 1+1+1)$, $\bar{d}(1; 3)$,

$|\bar{a}| = \sqrt{x^4 + 1}$; $|\bar{b}| = \sqrt{y^4 + 1}$; $|\bar{c}| = \sqrt{z^4 + 1}$;

$|\bar{d}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Для любых векторов $\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$, $\bar{c}(c_1; c_2)$ справедливо неравенство $|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}| \geq |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|$ => $\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} + \sqrt{z^4 + 1} \geq \sqrt{10}$

Задача 2

Решить неравенство $\sqrt{(6-x)^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+1}\le 5$

Решение:

Пусть $\bar{a}$ (6-x; 2), $\bar{b}$ (x-2; 1) и $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=(\overline{4;3})$;

$|\bar{a}|=\sqrt{(6-x)^2+4}$; $|\bar{b}|=\sqrt{(x-2)^2+1}$;

$|\bar{c}|=|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{16+9}=5$.

По условию $|\bar{a}|+|\bar{b}|\le 5$, а по неравенству треугольника $|\bar{a}|+|\bar{b}|\ge|\bar{a}+\bar{b}|=5 \Rightarrow |\bar{a}|+|\bar{b}|=5 \Rightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b} \Rightarrow \frac{6-x}{x-2}=\frac{2}{1}$;

x= $\frac{10}{3}$ Ответ: $\left\{\frac{10}{3}\right\}$

Задача 3

Решить неравенство $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \le 12$

Решение: ОДЗ $\left[\frac{3}{2}; \frac{50}{3}\right]$

Пусть $\bar{a}$ (1;1;1), $\bar{b}$ $(\sqrt{x+1}; \sqrt{2x-3}; \sqrt{50-3x})$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x}$

$|\bar{a}| = \sqrt{3}$; $|\bar{b}| = \sqrt{48}$;

Очевидно, $\bar{a} \cdot \bar{b} \le |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$,

$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \le \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12$

справедливо для любых x из ОДЗ => x$\in \left[\frac{3}{2}; \frac{50}{3}\right]$-

решение неравенства

Задача 4

Решить неравенство $\sqrt{13x-6-6x^2}+\sqrt{20x-7-12x^2}+\sqrt{5x-2-2x^2}\geq 4-x$

Решение:

$\sqrt{(3-2x)(3x-2)}+\sqrt{(7-6x)(2x-1)}+\sqrt{(2-x)(2x-1)}\geq$

$\geq 4-x$, ОДЗ: $\left[\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right]$

Пусть $\bar{a}\ (\sqrt{(7-6x)};\sqrt{(2-x)};\sqrt{(3x-2)})$,

$\bar{b}(\sqrt{(2x-1)};\sqrt{(2-x)};\sqrt{(3-2x)})$.

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\sqrt{(3-2x)(3x-2)}+\sqrt{(7-6x)(2x-1)}+$

$+\sqrt{(2-x)(2x-1)}$

$|\bar{a}|=\sqrt{7-6x+2x-1+3x-2}=\sqrt{4-x}$

$|\bar{b}|=\sqrt{2x-1+2-x+3-2x}=\sqrt{4-x}$

$|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=4-x \Rightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}\geq|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$, но $\bar{a}\cdot\bar{b}\leq|\bar{a}|\cdot|\bar{b}| \Rightarrow$

Задача 4

$\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ => $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и

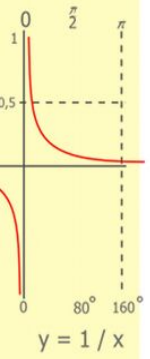
$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{7-6x}}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3-2x}};$

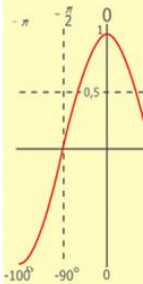
$\sqrt{7-6x} = \sqrt{2x-1};$

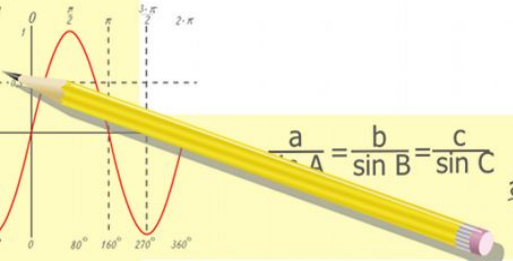
$7 - 6x = 2x - 1;$

$x = 1$

Ответ : x = 1







Задача 5

- **Решить уравнение**

$$x\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x-1}\cdot\sqrt{2x+3}$$

Решение:

Пусть $\bar{a}\left(x;\sqrt{x-1}\right)$, $\bar{b}(\sqrt{2x-1};2)$.

$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+x-1}$; $|\bar{b}|=\sqrt{2x+3}$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=x\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1}$,

$|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=\sqrt{x^2+x-1}\cdot\sqrt{2x+3}$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ => $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны => $\frac{x}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{2}$, x≥1

$$2x^2+3x-1=0,\ x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}<1$$

Ответ: корней нет

Задача 6

- **Решить уравнение**

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$$

Решение:

ОДЗ x≥1.

Пусть $\bar{a}\,(2;x)$, $\bar{b}(\sqrt{x-1};5)$.

$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\sqrt{x-1}+5x$, $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$ =>

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ => $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны => $\frac{2}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{5}$,

f(x)= $\frac{2}{\sqrt{x-1}}$, g(x)= $\frac{x}{5}$. f(x) – непрерывная и убывающая функция при x>1, g(x) - непрерывная и возрастающая на Ox

=> уравнение имеет не более одного корня,

найдем подбором **x=5**.

Ответ: 5

Задача 7

- **Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4, \\ x^2+y^2-6x+5=0 \end{cases}$$

Решение:

Пусть $\bar{a}\ (x+2;y)$, $\bar{b}(x-2;y)$, $|\bar{a}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ $|\bar{b}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$. Пусть $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}=(\overline{4;0})$, $|\bar{c}|=4$.

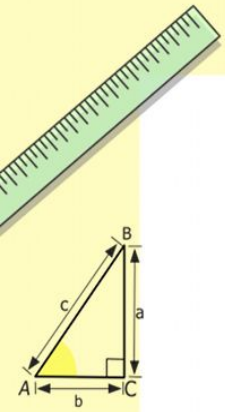
$|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{c}|$ => $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные => $\frac{x+2}{x-2}=\frac{y}{y}$.

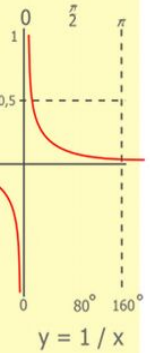
Если y ≠ 0, то $\frac{x+2}{x-2}=1$ - ПРОТИВОРЕЧИВО.

Пусть y =0 => $\begin{cases} |x+2|+|x-2|=4 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases}$, при x=1 $\frac{x+2}{x-2}<0$ =>

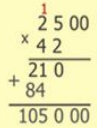
x=1, y=0. Ответ: x=1, y=0

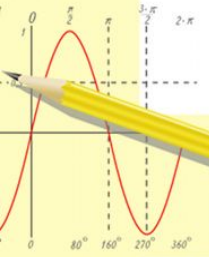
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ





y = 1 / x





$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

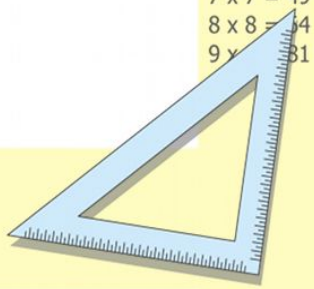
$\sin 90° = 1$

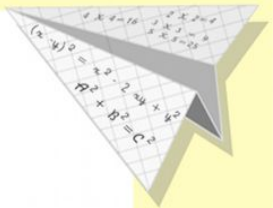
$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$

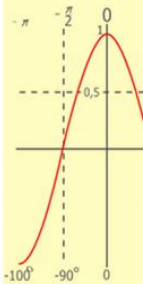
$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$

$x = 70$

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$







y = co

2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81