

---

Тема урока:

«Вычисление площадей  
плоских фигур с помощью  
определенного интеграла»

Учитель математики

Гурова Ольга

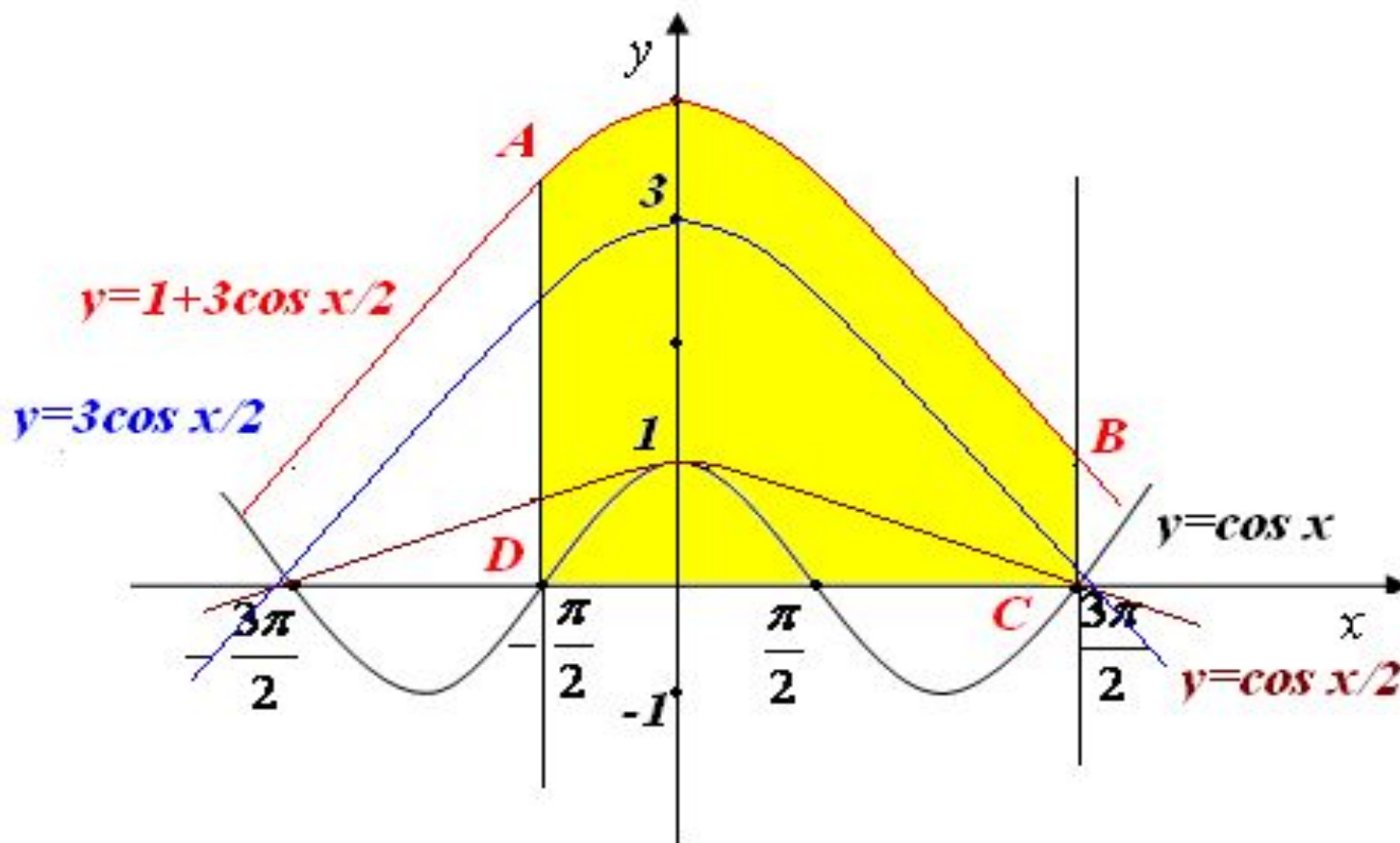
Валериевна

МОУ «Гимназия № 17»



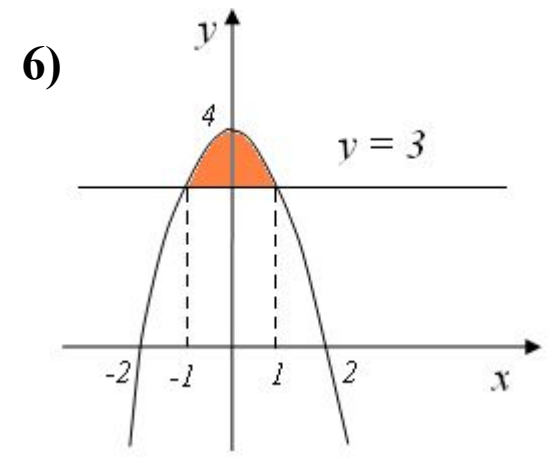
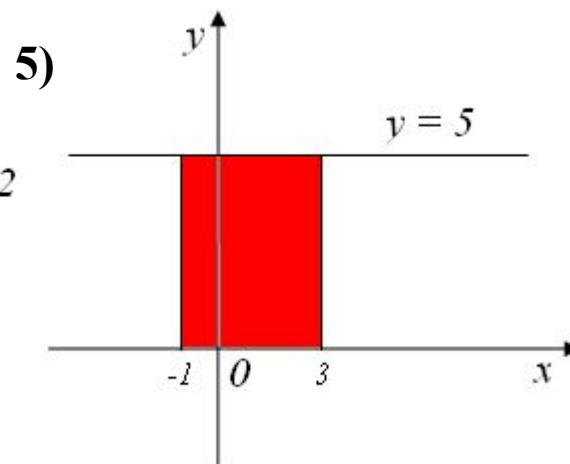
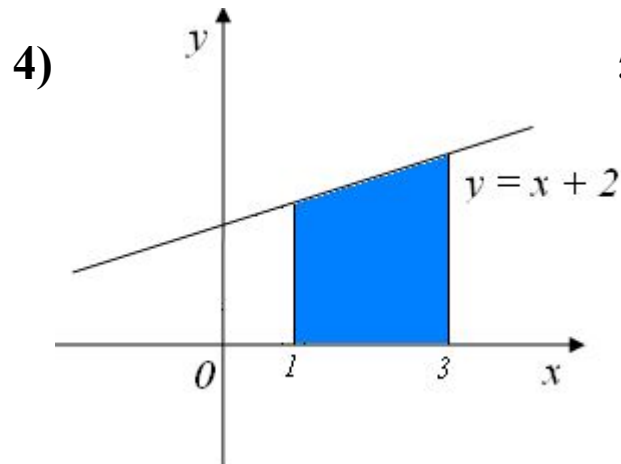
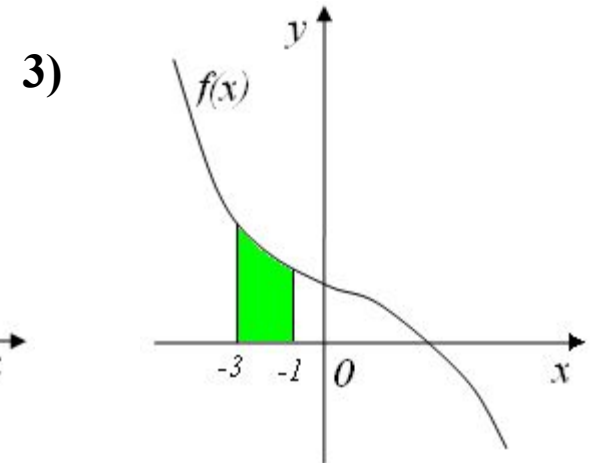
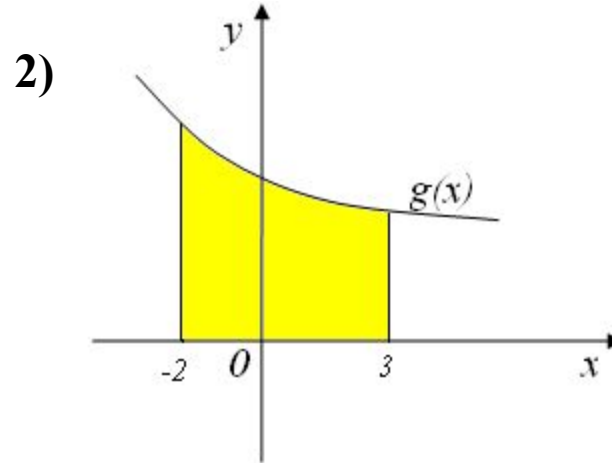
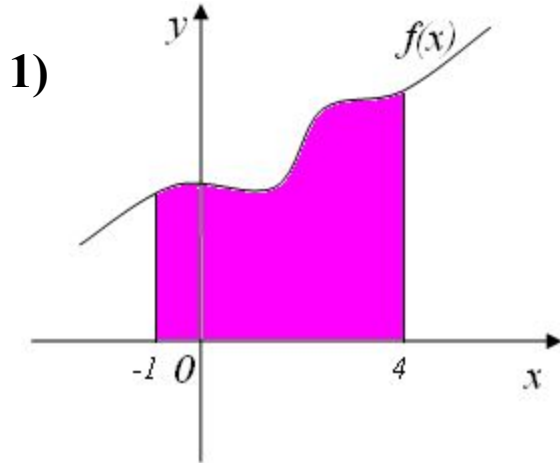
Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = 1 + 3 \cos \frac{x}{2} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad y = 0$$



# Устная работа

1. Выразите с помощью интеграла площади фигур, изображенных на рисунках:



## 2. Вычислите интегралы:

1).  $\int_2^5 x dx$

**10,5**

2).  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

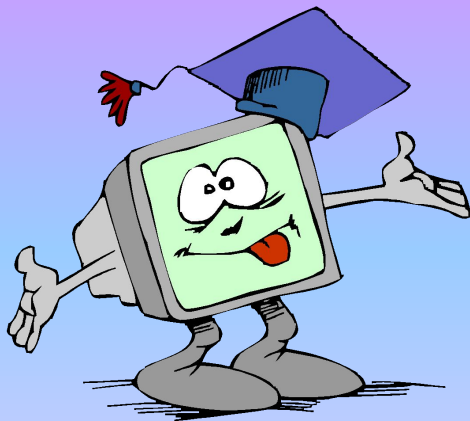
**1**

3).  $\int_0^4 x^3 dx$

**64**

4).  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} dx$

**1**



# Немного истории

«Интеграл» придумал **Якоб Бернулли** (1690г.)

«восстанавливать» от латинского *integro*  
«целый» от латинского *integer*



«Примитивная функция»,

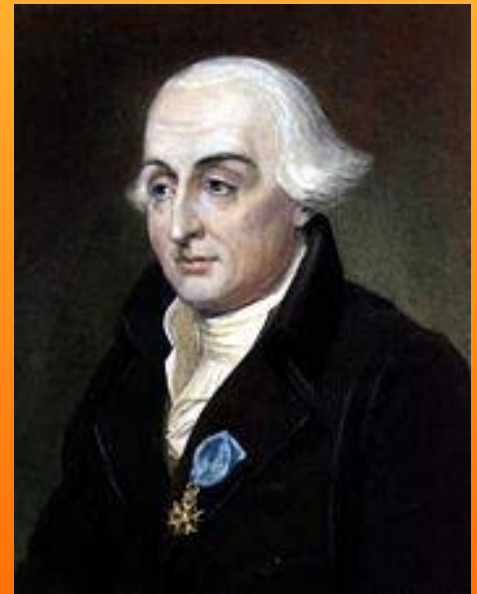
от латинского

*primitivus* – начальный,

ввел

**Жозеф Луи Лагранж**

(1797г.)



# Интеграл в древности

Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпания Евдокса (примерно 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известен.



Архимед



Евдокс Книдский

Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга.

# Исаак Ньютон (1643-1727)



Наиболее полное изложение  
дифференциального и  
интегрального исчислений  
содержится в  
**«Методе флюксий...»**  
(1670–1671, опубликовано в 1736).

Переменные величины - **флюенты**  
(первообразная или  
неопределенный интеграл)

Скорость изменения флюент –  
**флюксии (производная)**

# Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)



$\int y dx$  - впервые использован  
Лейбницем в конце  
XVII века

Символ образовался из буквы  
S — сокращения слова  
*summa* (сумма)



# Определенный интеграл

И. НЬЮТОН

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

где  $F'(x) = f(x)$

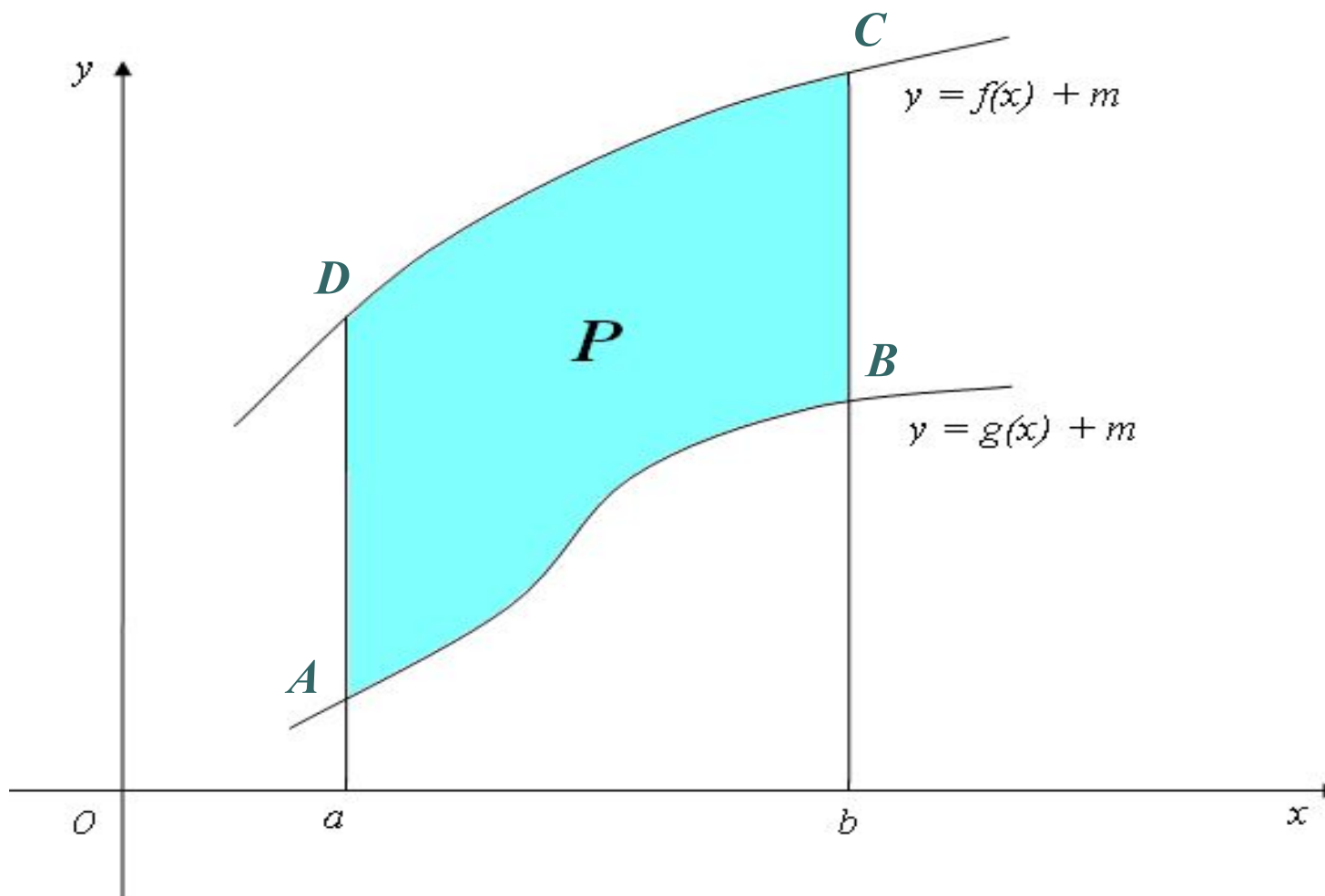
Г. ЛЕЙБНИЦ

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i \in [a,b]} f(x_i)dx_i$$

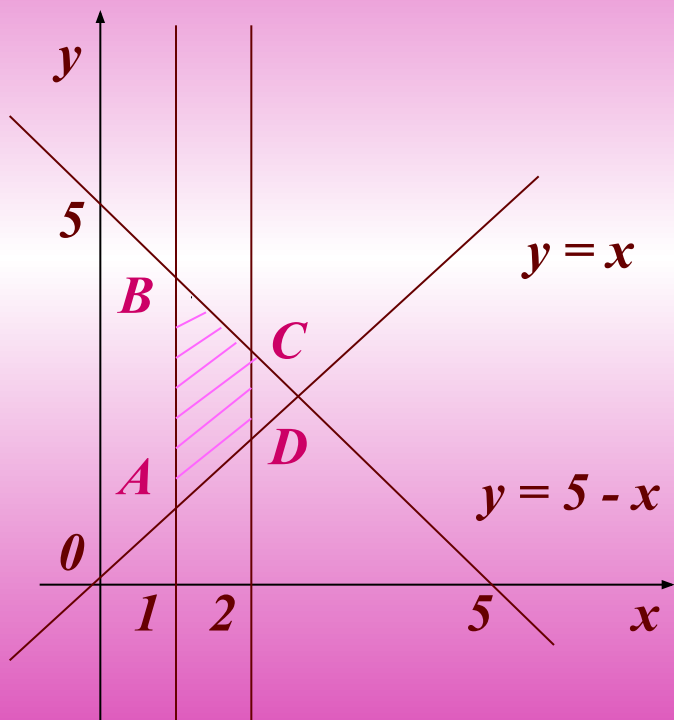
Формула Ньютона - Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{aABb} + \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \\
 &= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx
 \end{aligned}$$



Пример. Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = x$ ,  $y = 5 - x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .



$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \int_1^2 ((5-x) - x) dx = \\ &= \int_1^2 (5-2x) dx = (5x - x^2) \Big|_1^2 = \\ &= (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2 \end{aligned}$$

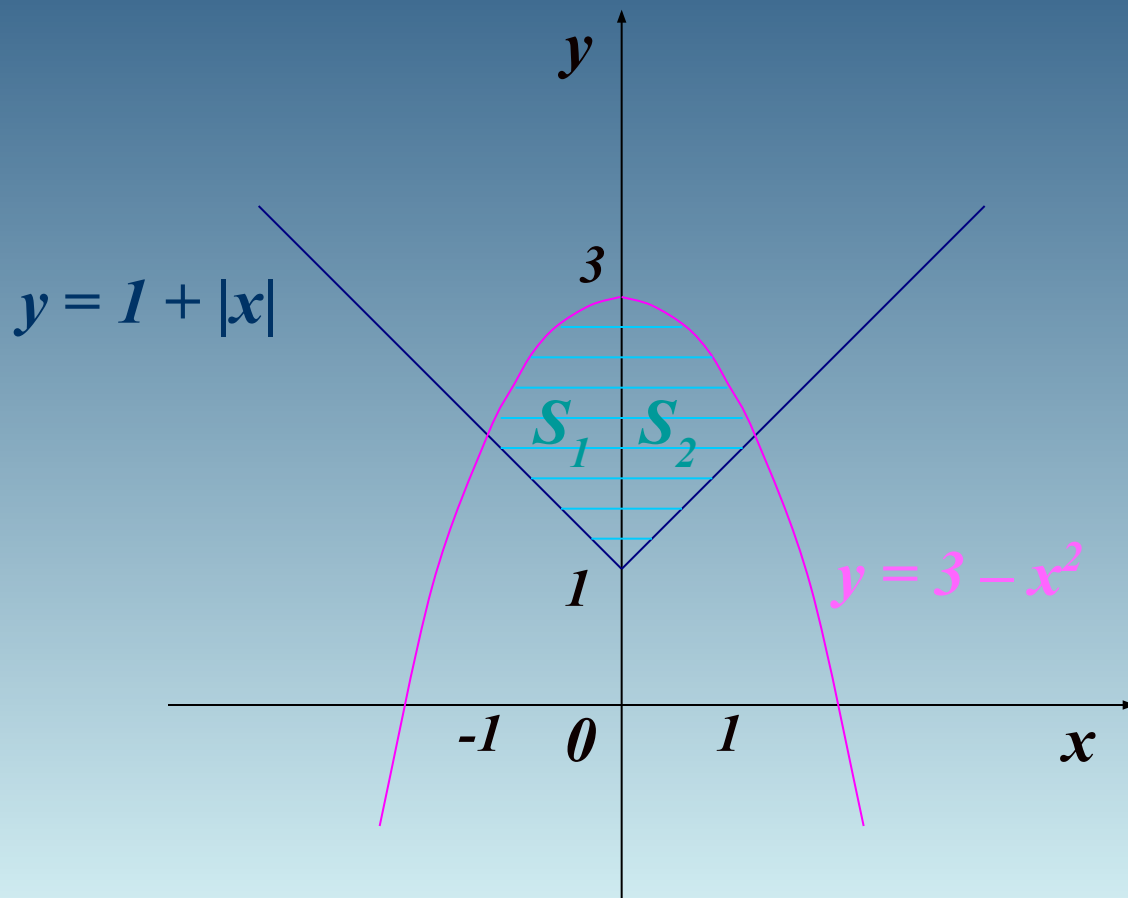
Ответ : 2

Задание 1. Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями

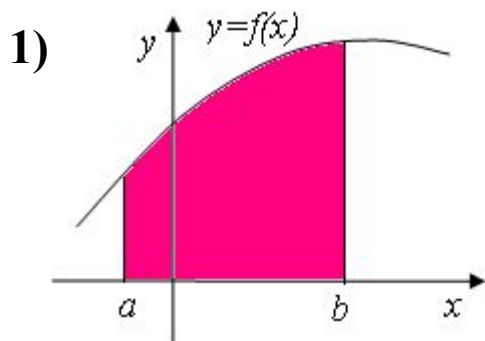
$$y = 3 - x^2,$$

$$y = 1 + |x|$$

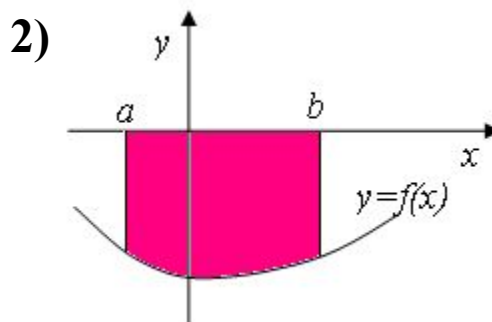
$$S = S_1 + S_2$$



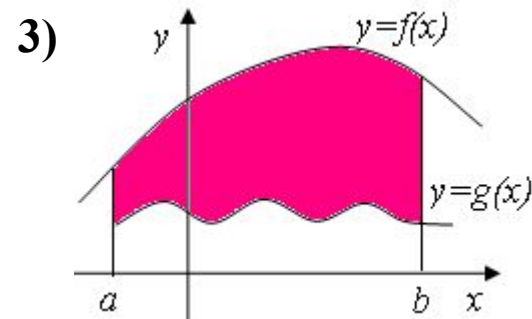
## Задание 2. С помощью определенного интеграла записывают формулы для вычисления площадей фигур, заштрихованных на рисунках



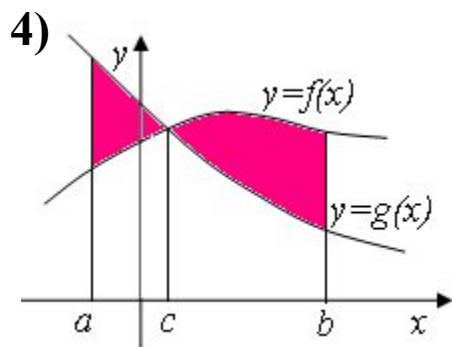
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



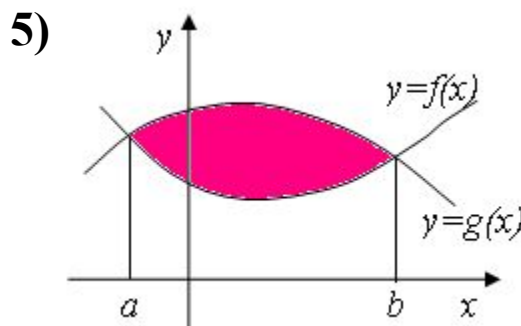
$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



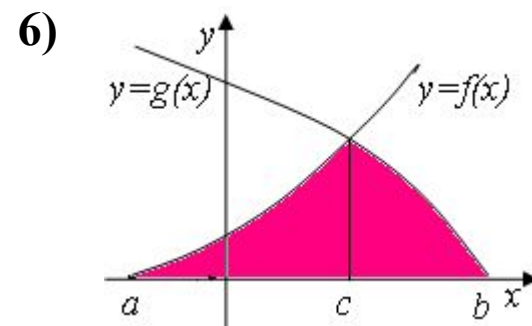
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

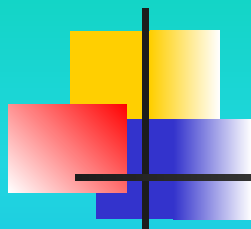


$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

Подберите из данных формул для вычисления площади фигуры ту, которая подходит к одному из шести чертежей.



$$S_1 = \int_{-2}^7 \left( (4 - (x-1)^2) - ((x+2)^2 + 2) \right) dx \quad \mathbf{5}$$

$$S_2 = \int_{-2}^8 (5 - (x-6)^2 + \sin x) dx \quad \mathbf{3}$$

$$S_3 = \int_{-2}^6 (7 - (x-5)^2) dx \quad \mathbf{1}$$

$$S_4 = \int_{-3}^4 -\frac{4}{x-3} dx + \int_4^8 \left( \frac{1}{x-5} + 3 \right) dx \quad \mathbf{6}$$

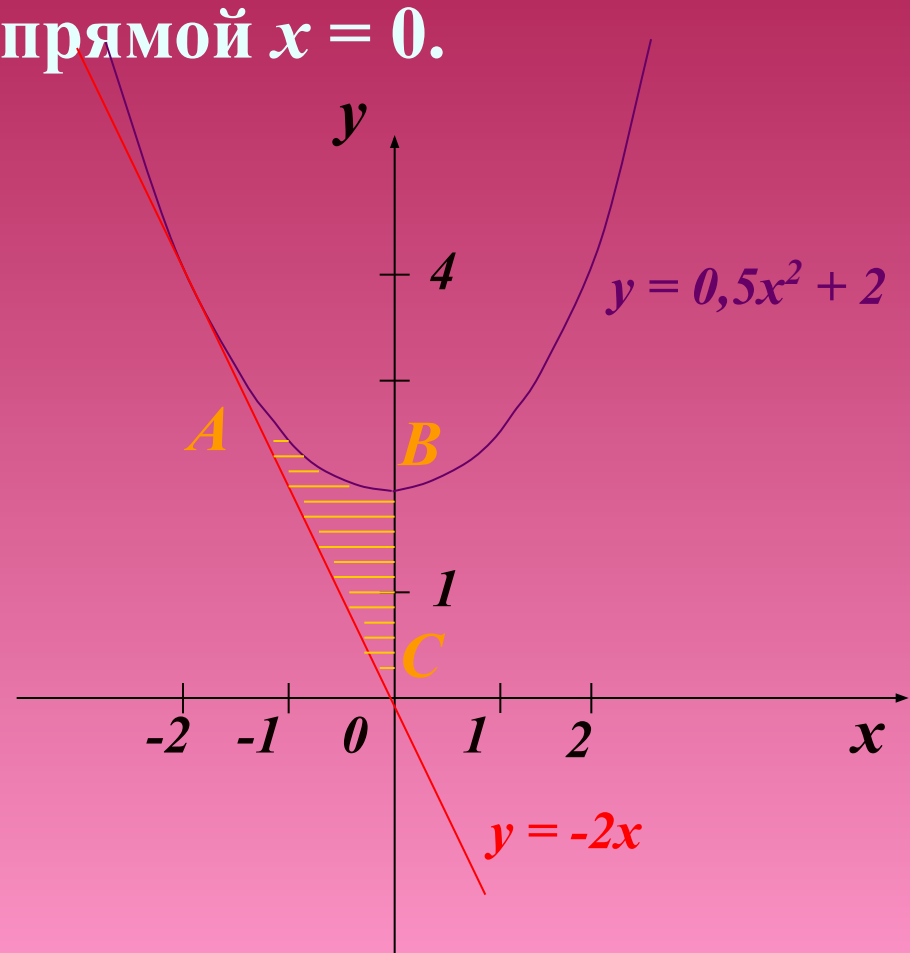
$$S_5 = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 4) dx \right| \quad \mathbf{2}$$

$$S_6 = \int_{-3}^1 \left( \frac{1}{x+4} - ((x-2)^2 + 5) \right) dx + \int_1^6 \left( (x-2)^2 + 5 - \frac{1}{x+4} \right) dx \quad \mathbf{4}$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = 0,5x^2 + 2$ , касательной к этому графику в точке с абсциссой  $x = -2$  и прямой  $x = 0$ .

**Решение:**

1. Составим уравнение касательной.
2. Построим графики функций.
3. Найдем площадь фигуры.



# Итоги урока







---

# СПАСИБО ЗА УРОК!

**Домашнее задание:**

- 1. п.4 стр.228 - 230;*
  - 2. № 1025(в, г), № 1037(в, г),  
№ 1038(в, г)*
-