Подготовка к ЕГЭ.

Уравнение смешанного типа.

Кемерово.
МОУ «СОШ» №52.

Е.В. Тихощенко
Учитель математики

а) Решите уравнение $\left((0,04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение, получим:

$$\left((0,04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$$
$$0,04^{\sin x\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$$
$$5^{-2\sin x\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$$
$$-2\sin x\cos x = -\sqrt{3}\sin x$$
$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$$

Имеем два уравнения:

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos x = \sqrt{3}$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью числовой окружности выберем корни уравнения на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Получим числа:

$3\pi; 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}; 4\pi$.

Ответ: а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}; 4\pi$.

а) Решите уравнение $\left((0,25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$.

а) Преобразуем уравнение:

$$\left((0,25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$$
$$2^{-2\sin x\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$$
$$-2\sin x\cos x = -\sqrt{2}\sin x$$
$$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$$
$$\sin x\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0$$

Имеем два уравнения:

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью числовой окружности выберем корни уравнения на промежутке $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа:

$2\pi; \frac{9\pi}{4}; 3\pi$.

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

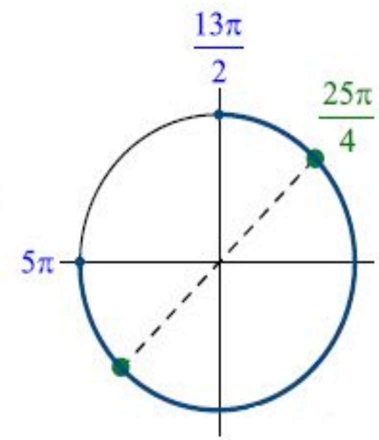
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

а) Решите уравнение $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что: $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = \dfrac{3^{\cos x}}{3^{2\cos^2 x}} = 3^{\cos x - 2\cos^2 x}$. Далее имеем:

$$3^{\cos x - 2\cos^2 x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{12}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) Заданному промежутку принадлежат числа $-\dfrac{3\pi}{2}, \quad -\dfrac{\pi}{2}, \quad -\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}; \ -\dfrac{\pi}{2}; \ -\dfrac{\pi}{3}$.

а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

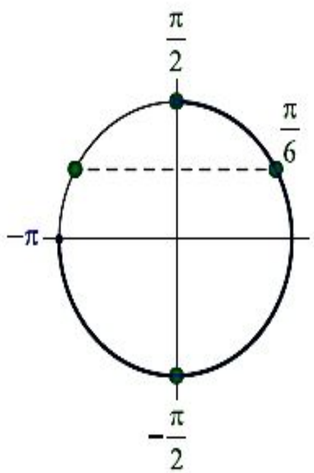
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3^{3\cos x \sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}} \Leftrightarrow 3\cos x \sin x = \frac{3\cos x}{2} \Leftrightarrow \cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

а) Решите уравнение

$$4^{\sin x}+4^{-\sin x}=\frac{5}{2}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=4^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде

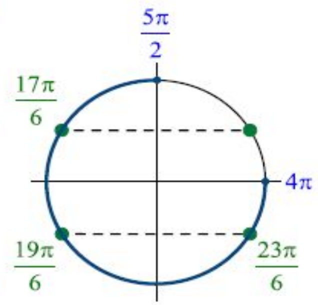
$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

При $t=2$ получим: $4^{\sin x}=2$, откуда

$$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

При $t=\frac{1}{2}$ получим: $4^{\sin x}=\frac{1}{2}$, откуда

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни принадлжащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6};\ \frac{23\pi}{6}$.

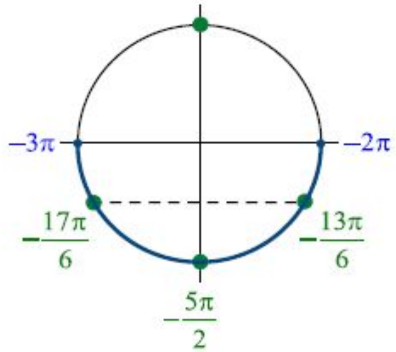
Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6};\ \frac{23\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

Решение.

а) Перейдем к одному основанию:



$$81^{-\cos x} = 81^{\sin 2x} \Leftrightarrow -\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x \cdot (2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k.\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$. Получим числа: $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x + \cos(\pi - x) + 9) = 2$.

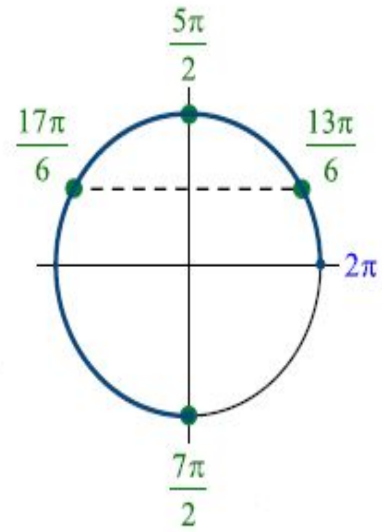
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Последовательно получаем:

$$\log_3(\sin 2x + \cos(\pi - x) + 9) = 2 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos x + 9 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$



б) Условию $x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только числа $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

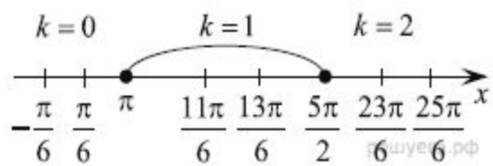
Решение.

а) Пусть $\log_3(2\cos x) = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \dfrac{1}{2}$.

Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2\cos x) = 2,\\ \log_3(2\cos x) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x = 9,\\ 2\cos x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{9}{2},\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \underset{|\cos x| \le 1}{\Leftrightarrow} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Найдём на числовой оси корни, лежащие на отрезке $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.



Из рисунка видно, что заданному отрезку принадлежат корни $\dfrac{11\pi}{6}$ и $\dfrac{13\pi}{6}$.

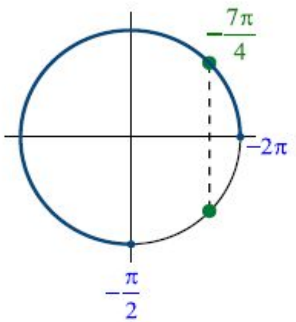
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $\log_2(2\cos x) = t$, тогда:



$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2\cos x) = 4, \\ \log_2(2\cos x) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x = 16, \\ 2\cos x = \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 8, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Первый случай невозможен.

Во втором имеем $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$. Получим число $-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

а) Решите уравнение $2^{4\cos x}+3\cdot 2^{2\cos x}-10=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

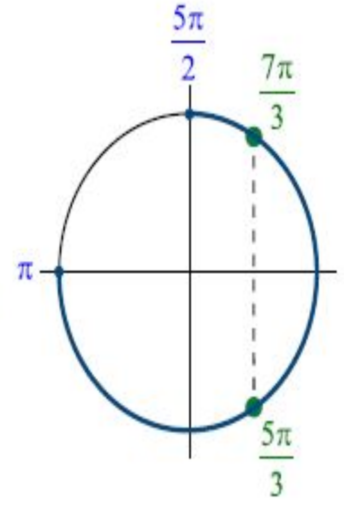
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(2^{2\cos x})^2+3\cdot 2^{2\cos x}-10=0 \Leftrightarrow (2^{2\cos x}-2)(2^{2\cos x}+5)=0.$$

Значит, или $2^{2\cos x}=-5$, что невозможно, или $2^{2\cos x}=2 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ или $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.