

# НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ.

Подготовка к ГИА

2014 г.

**Определение.** Всякое значение неизвестного, при котором данное неравенство с неизвестным обращается в верное числовое неравенство, называется **решением неравенства**. **Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

**Определение.** Неравенства вида  $ax + b > 0$  ( $< 0$ ,  $\geq 0$ ,  $\leq 0$ ), где  $x$  — неизвестное,  $a$  и  $b$  — некоторые действительные числа ( $a \neq 0$ ), называются **неравенствами первой степени, или линейными неравенствами**.

**Определение.** Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
 ( $< 0$ ,  $\geq 0$ ,  $\leq 0$ ),

где  $a \neq 0$ , называют **неравенствами второй степени с одним неизвестным, или квадратными неравенствами**.

## Свойства числовых неравенств ( $a, b, c$ — действительные числа)

Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .

(1)

Если  $a > b$ , то  $a + c > b + c$ .

(2)

Если  $a > b$  и  $c$  — положительное число ( $c > 0$ ), то  $ac > bc$ .

(3)

Если  $a > b$  и  $c$  — отрицательное число ( $c < 0$ ), то  $ac < bc$ .

(4)

**Задавание 1.** Если  $a < b$ , то верно неравенство:

1)  $-2b > -2a$

3)  $5 - a < 5 - b$

2)  $a - 2 < b - 2$

4)  $\frac{a}{5} > \frac{b}{5}$

**Решение.**

Попытаемся получить из неравенства  $a < b$  каждое из неравенств из вариантов 1), 2), 3), 4).

Так как  $-2 < 0$ , то, из неравенства  $a < b$  следует  $-2a > -2b$  (свойство (4)). И неравенство из варианта 1) неверно.

Так как  $a < b$ , то по свойству (2) верно  $a - 2 < b - 2$ . И неравенство из варианта 2) верно.

Так как  $a < b$ , то  $-a + 5 > -b + 5$  (свойства (4) и (2)). И неравенство из варианта 3) неверно.

Так как  $\frac{1}{5} > 0$ , то из неравенства  $a < b$  следует неравенство  $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$ . И неравенство из варианта 4) неверно.

**О т в е т: 2.**

## Линейные неравенства

**Задание 2.** Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$-x + 0,5(x + 4) < 4.$$

Решение.

Сначала раскроем скобки.

$$-x + 0,5x + 2 < 4.$$

При решении линейных неравенств обычно переносят неизвестные слагаемые в левую часть неравенства, а известные — в правую часть и приводят подобные слагаемые.

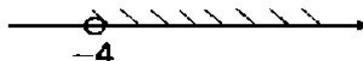
$$-0,5x < 2.$$

Чтобы выразить  $x$ , надо разделить обе части неравенства на  $(-0,5)$ . Знак неравенства меняется на противоположный.

$$-0,5x < 2$$

$$x > -4.$$

Отметим решение неравенства на координатной прямой.



Наименьшим целым решением является число  $(-3)$ , а не  $(-4)$ .

Ответ:  $-3$ .

## **Квадратные неравенства**

**Решение квадратных неравенств**

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (} < 0, \geq 0, \leq 0 \text{)}$$

**состоит из 5 этапов:**

**1. Вводим соответствующую функцию  $y = ax^2 + bx + c$ .**

**2. Определяем направление ветвей параболы  $y = ax^2 + bx + c$  (при  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх; при  $a < 0$  ветви параболы направлены вниз).**

**3. Находим нули функции, т.е. решаем уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ .**

**4. Если уравнение имеет корни, то отмечаем корни на координатной прямой и схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей. Если уравнение не имеет корней, то схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей.**

**5. Находим решение неравенства с учетом смысла знака неравенства.**



Решение квадратных неравенств, в зависимости от дискриминанта соответствующего квадратного уравнения, разбивается на 3 случая: 1)  $D > 0$ ; 2)  $D = 0$ ; 3)  $D < 0$ .

Рассмотрим первый случай:  $D > 0$ .

**Задание 4.** Решите неравенство  $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ .

**Решение.**

1. Пусть  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

2. Так как  $a = -1$ , то ветви параболы направлены вниз.

3. Решим уравнение  $-x^2 - 2x + 3 = 0$ .

Его корни:  $x = 1$  и  $x = -3$ .

4. Отметим числа  $1$  и  $(-3)$  на координатной прямой и построим эскиз графика функции



5. Так как знак неравенства ( $\geq$ ), то решением его будет отрезок  $[-3; 1]$ .



Ответ:  $[-3; 1]$ .

Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих условию  $a > b$ ?

1)  $b - a > 0$

2)  $b - a < -1$

3)  $a - b > 3$

4)  $a - b > -2$

**4**

Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих условию  $a > -b$ ?

1)  $b - a > -1$

2)  $b + a < 1$

3)  $a + b > -1$

4)  $a - b > 1$

**3**

О числах  $a$  и  $c$  известно, что  $a < c$ . Какое из следующих неравенств неверно?

1)  $a + 10 < c + 10$

2)  $\frac{a}{29} < \frac{c}{29}$

3)  $a - 35 < c - 35$

4)  $-\frac{a}{18} < -\frac{c}{18}$

**4**

На координатной прямой изображены числа  $a$  и  $c$ . Какое из следующих неравенств неверно?



1)  $a + 17 > c + 14$

2)  $a - 21 > c - 21$

3)  $-a < -c$

4)  $\frac{a}{11} < \frac{c}{11}$

**4**

Решите неравенство  $5x - 2 < 0$ .

$(-\infty; 0,4)$

Решите неравенство  $10x + 2 < 0$ .

$(-\infty; -0,2)$

Решите неравенство  $4x + 1 < 0$ .

$(-\infty; -0,25)$

Решите неравенство  $3x - 6 < 0$ .

$(-\infty; 2)$

Решите неравенство  $3x + 18 < 0$ .

$(-\infty; -6)$

Решите неравенство  $-3x + 9 < 0$ .

$(3; +\infty)$

Решите неравенство  $-4x - 1 < 0$ .

$(-0,25; +\infty)$

Решите неравенство  $-2x - 9 < 0$ .

$(-4,5; +\infty)$

Решите неравенство  $-4x - 8 < 7 - x$ .

$(-5; +\infty)$

Решите неравенство  $-8x - 7 < 2 - 4x$ .

$(-2,25; +\infty)$

Решите неравенство  $4x - 1 < 7 + 9x$ .

$(-1,6; +\infty)$

Решите неравенство  $5x - 10 > -9 + 4x$ .

$(1; +\infty)$

Решите неравенство  $8x - 10 > -3 + 7x$ .

$(7; +\infty)$

Решите неравенство  $-3x + 10 > -5 - 7x$ .

$(-3,75; +\infty)$

Решите неравенство  $2x + 4 > -1 + 6x$ .

$(-\infty; 1,25)$

Решите неравенство  $5x - 7 > 8 + 8x$ .

$(-\infty; -5)$

Решите неравенство  $-3x - 5 > 10 + 7x$ .

$(-\infty; -1,5)$

Решите неравенство  $7x - 4 \leq -1 - 5x$ .

$(-\infty; 0,25]$

Решите неравенство  $-4x + 5 \leq 10 - 9x$ .

$(-\infty; 1]$

Решите неравенство  $-x + 3(-7 + 5x) > 7x + 7$  .  $(4; +\infty)$

Решите неравенство  $6x + 3(-5 - 8x) > 2x + 4$  .  $(-\infty; -0,95)$

Решите неравенство  $3x + 4(-7 + 6x) \leq -7x + 6$  .  $(-\infty; 1]$

Решите неравенство  $-x - 8(-1 + 2x) \leq 3x - 9$  .  $[0,85; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} x > 4, \\ -3x \leq 3. \end{cases}$   $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} -x < -4, \\ -2x < 5. \end{cases}$   $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x \geq -2, \\ -4x < 4. \end{cases}$   $(-1; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x \geq -6, \\ x > 4. \end{cases}$   $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} -2x < 4, \\ -5x \leq -3. \end{cases}$   $[0,6; +\infty)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} 4x \leq 4, \\ 5x < -4. \end{cases}$   $(-\infty; -0,8)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} 5x < -6, \\ x < -2. \end{cases}$   $(-\infty; -2)$

Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x < 5, \\ -2x > 2. \end{cases}$   $(-\infty; -1)$

Решите неравенство  $x^2 - 2x - 3 < 0$ .

$(-1; 3)$

Решите неравенство  $x^2 + 10x + 24 < 0$ .

$(-6; -4)$

Решите неравенство  $x^2 - 3x - 18 > 0$ .

$(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$

Решите неравенство  $x^2 - 4x - 45 > 0$ .

$(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$

Решите неравенство  $x^2 + 11x + 24 \leq 0$ .

$[-8; -3]$

Решите неравенство  $x^2 + 5x - 6 \leq 0$ .

$[-6; 1]$

Решите неравенство  $x^2 - 6x - 16 \geq 0$ .

$(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$

Решите неравенство  $x^2 + 5x < 24$ .

$(-8; 3)$

Решите неравенство  $x^2 + 5x < 36$ .

$(-9; 4)$

Решите неравенство  $x^2 - x < 42$ .

$(-6; 7)$

Решите неравенство  $3x^2 - 13x - 29 \leq (x - 5)^2$ .

$[-4,5; 6]$

Решите неравенство  $3x^2 - 5x + 11 \leq (x - 9)^2$ .

$[-10; 3,5]$

Решите неравенство  $2x^2 + 14x + 33 \leq (x + 1)^2$ .

$[-8; -4]$

Решите неравенство  $2x^2 - 13x + 1 \geq (x - 3)^2$ .

$(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$