

НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ.

Подготовка к ГИА

2014 г.

Определение. Всякое значение неизвестного, при котором данное неравенство с неизвестным обращается в верное числовое неравенство, называется решением неравенства. Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. Неравенства вида $ax + b > 0$ (< 0 , ≥ 0 , ≤ 0), где x — неизвестное, a и b — некоторые действительные числа ($a \neq 0$), называются неравенствами первой степени, или линейными неравенствами.

Определение. Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
 (< 0 , ≥ 0 , ≤ 0),

где $a \neq 0$, называют неравенствами второй степени с одним неизвестным, или квадратными неравенствами.

Свойства числовых неравенств (a, b, c — действительные числа)

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

(1)

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

(2)

Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.

(3)

Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.

(4)

Задавание 1. Если $a < b$, то верно неравенство:

1) $-2b > -2a$

3) $5 - a < 5 - b$

2) $a - 2 < b - 2$

4) $\frac{a}{5} > \frac{b}{5}$

Решение.

Попытаемся получить из неравенства $a < b$ каждое из неравенств из вариантов 1), 2), 3), 4).

Так как $-2 < 0$, то, из неравенства $a < b$ следует $-2a > -2b$ (свойство (4)). И неравенство из варианта 1) неверно.

Так как $a < b$, то по свойству (2) верно $a - 2 < b - 2$. И неравенство из варианта 2) верно.

Так как $a < b$, то $-a + 5 > -b + 5$ (свойства (4) и (2)). И неравенство из варианта 3) неверно.

Так как $\frac{1}{5} > 0$, то из неравенства $a < b$ следует неравенство $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$. И неравенство из варианта 4) неверно.

Ответ: 2.

Линейные неравенства

Задание 2. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$-x + 0,5(x + 4) < 4.$$

Решение.

Сначала раскроем скобки.

$$-x + 0,5x + 2 < 4.$$

При решении линейных неравенств обычно переносят неизвестные слагаемые в левую часть неравенства, а известные — в правую часть и приводят подобные слагаемые.

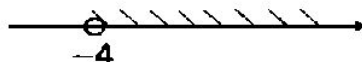
$$-0,5x < 2.$$

Чтобы выразить x , надо разделить обе части неравенства на $(-0,5)$. Знак неравенства меняется на противоположный.

$$-0,5x < 2$$

$$x > -4.$$

Отметим решение неравенства на координатной прямой.



Наименьшим целым решением является число (-3) , а не (-4) .

Ответ: -3 .

Квадратные неравенства

Решение квадратных неравенств

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (} < 0, \geq 0, \leq 0 \text{)}$$

состоит из 5 этапов:

1. Вводим соответствующую функцию $y = ax^2 + bx + c$.

2. Определяем направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ (при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз).

3. Находим нули функции, т.е. решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Если уравнение имеет корни, то отмечаем корни на координатной прямой и схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей. Если уравнение не имеет корней, то схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей.

5. Находим решение неравенства с учетом смысла знака неравенства.



Решение квадратных неравенств, в зависимости от дискриминанта соответствующего квадратного уравнения, разбивается на 3 случая: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$.

Рассмотрим первый случай: $D > 0$.

Задание 4. Решите неравенство $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Решение.

1. Пусть $y = -x^2 - 2x + 3$.

2. Так как $a = -1$, то ветви параболы направлены вниз.

3. Решим уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

Его корни: $x = 1$ и $x = -3$.

4. Отметим числа 1 и (-3) на координатной прямой и построим эскиз графика функции



5. Так как знак неравенства (\geq), то решением его будет отрезок $[-3; 1]$.



Ответ: $[-3; 1]$.

Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях a и b , удовлетворяющих условию $a > b$?

1) $b - a > 0$

2) $b - a < -1$

3) $a - b > 3$

4) $a - b > -2$

4

Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях a и b , удовлетворяющих условию $a > -b$?

1) $b - a > -1$

2) $b + a < 1$

3) $a + b > -1$

4) $a - b > 1$

3

О числах a и c известно, что $a < c$. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $a + 10 < c + 10$

2) $\frac{a}{29} < \frac{c}{29}$

3) $a - 35 < c - 35$

4) $-\frac{a}{18} < -\frac{c}{18}$

4

На координатной прямой изображены числа a и c . Какое из следующих неравенств неверно?



1) $a + 17 > c + 14$

2) $a - 21 > c - 21$

3) $-a < -c$

4) $\frac{a}{11} < \frac{c}{11}$

4

Решите неравенство $5x - 2 < 0$.

$(-\infty; 0,4)$

Решите неравенство $10x + 2 < 0$.

$(-\infty; -0,2)$

Решите неравенство $4x + 1 < 0$.

$(-\infty; -0,25)$

Решите неравенство $3x - 6 < 0$.

$(-\infty; 2)$

Решите неравенство $3x + 18 < 0$.

$(-\infty; -6)$

Решите неравенство $-3x + 9 < 0$.

$(3; +\infty)$

Решите неравенство $-4x - 1 < 0$.

$(-0,25; +\infty)$

Решите неравенство $-2x - 9 < 0$.

$(-4,5; +\infty)$

Решите неравенство $-4x - 8 < 7 - x$.

$(-5; +\infty)$

Решите неравенство $-8x - 7 < 2 - 4x$.

$(-2,25; +\infty)$

Решите неравенство $4x - 1 < 7 + 9x$.

$(-1,6; +\infty)$

Решите неравенство $5x - 10 > -9 + 4x$.

$(1; +\infty)$

Решите неравенство $8x - 10 > -3 + 7x$.

$(7; +\infty)$

Решите неравенство $-3x + 10 > -5 - 7x$.

$(-3,75; +\infty)$

Решите неравенство $2x + 4 > -1 + 6x$.

$(-\infty; 1,25)$

Решите неравенство $5x - 7 > 8 + 8x$.

$(-\infty; -5)$

Решите неравенство $-3x - 5 > 10 + 7x$.

$(-\infty; -1,5)$

Решите неравенство $7x - 4 \leq -1 - 5x$.

$(-\infty; 0,25]$

Решите неравенство $-4x + 5 \leq 10 - 9x$.

$(-\infty; 1]$

Решите неравенство $-x + 3(-7 + 5x) > 7x + 7$. (4; $+\infty$)

Решите неравенство $6x + 3(-5 - 8x) > 2x + 4$. $(-\infty; -0,95)$

Решите неравенство $3x + 4(-7 + 6x) \leq -7x + 6$. $(-\infty; 1]$

Решите неравенство $-x - 8(-1 + 2x) \leq 3x - 9$. [0,85; $+\infty$)

Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 4, \\ -3x \leq 3. \end{cases}$ $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} -x < -4, \\ -2x < 5. \end{cases}$ $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x \geq -2, \\ -4x < 4. \end{cases}$ $(-1; +\infty)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x \geq -6, \\ x > 4. \end{cases}$ $(4; +\infty)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} -2x < 4, \\ -5x \leq -3. \end{cases}$ $[0,6; +\infty)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x \leq 4, \\ 5x < -4. \end{cases}$ $(-\infty; -0,8)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x < -6, \\ x < -2. \end{cases}$ $(-\infty; -2)$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x < 5, \\ -2x > 2. \end{cases}$ $(-\infty; -1)$

Решите неравенство $x^2 - 2x - 3 < 0$.

$(-1; 3)$

Решите неравенство $x^2 + 10x + 24 < 0$.

$(-6; -4)$

Решите неравенство $x^2 - 3x - 18 > 0$.

$(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$

Решите неравенство $x^2 - 4x - 45 > 0$.

$(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$

Решите неравенство $x^2 + 11x + 24 \leq 0$.

$[-8; -3]$

Решите неравенство $x^2 + 5x - 6 \leq 0$.

$[-6; 1]$

Решите неравенство $x^2 - 6x - 16 \geq 0$.

$(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$

Решите неравенство $x^2 + 5x < 24$.

$(-8; 3)$

Решите неравенство $x^2 + 5x < 36$.

$(-9; 4)$

Решите неравенство $x^2 - x < 42$.

$(-6; 7)$

Решите неравенство $3x^2 - 13x - 29 \leq (x - 5)^2$.

$[-4,5; 6]$

Решите неравенство $3x^2 - 5x + 11 \leq (x - 9)^2$.

$[-10; 3,5]$

Решите неравенство $2x^2 + 14x + 33 \leq (x + 1)^2$.

$[-8; -4]$

Решите неравенство $2x^2 - 13x + 1 \geq (x - 3)^2$.

$(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$