



Равносильность уравнений

учитель математики
Яровенко Ольга Сергеевна

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют ***равносильными***, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \quad (2)$$

то уравнение (2) называют следствием уравнения (1)

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Этапы решения уравнений

Технический

Анализ решения

Проверка

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.



Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?



Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?



Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?



В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Теоремы о равносильности уравнений



«Спокойные теоремы»

гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.



«Беспокойные теоремы»

работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений.

«СПОКОЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ»

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

ОДЗ

Определение 3.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x , при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

«БЕСПОКОЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ»

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.

Теорема 6.

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X — решение системы неравенств $f(x) > 0$, $g(x) > 0$
Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Краткая запись теорем 4 – 6.

4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x)f(x) = h(x)g(x)$, где $h(x) \neq 0$
и $h(x)$ имеет смысл в ОДЗ данного уравнения.
5. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n = (g(x))^n$, где $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$
и $n = 2k$ (чётное число).
6. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0$,
 $g(x) > 0$ и $a > 0$ и $a \neq 1$

Преобразование данного уравнения в уравнение – следствие. Проверка корней.

Если в процессе решения уравнения применяем теоремы 4-6, не проверив выполнения ограничительных условий, то получим уравнение-следствие.

Например. а) $x - 1 = 3; x = 4$

Умножим обе части на $(x - 2)$:

$(x - 2)(x - 1) = 3(x - 2); x = 4$ и $x = 2$ – посторонний корень \Rightarrow
проверка!

б) $\ln(2x-4) = \ln(3x-5)$

Потенцируем $2x - 4 = 3x - 5; x = 1$, но при этом значении уравнение не имеет смысла \Rightarrow **искать ОДЗ или проверка.**

Пример 1

Решить уравнение

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$$

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме (1) -> (2) (3) -> (4) -> ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

$$(\sqrt{5x-6})^2 = (5 - \sqrt{2x+5})^2$$

$$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$$

$$100(2x+5) = 1296 - 216x + 9x^2$$

$$9x^2 - 416x + 796 = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = 398/9$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

$x_2 = 398/9$ - посторонний корень.

Ответ: $x = 2$

Пример 2

Решить уравнение

$$\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3)$ выражением $\ln(x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x).$$

Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x); 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x; 2x^2 + 13x + 11 = 0; x_1 = -1, x_2 = -5,5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение ОДЗ уравнения, значит, обязательна проверка.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения ОДЗ уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5,5$ не удовлетворяет уже первому неравенству, это посторонний корень.

Ответ: -1.

О потере корней

Две причины потери корней при решении уравнений:

1. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$ (а не к уравнению $f(x) = g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим:

$$x^2 = 10^4; \quad x_1 = 100, \quad x_2 = -100.$$

Второй способ. Имеем: $2\lg x = 4; \quad \lg x = 2; \quad x = 100.$

Обратите внимание: при втором способе произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2\lg|x|$ мы воспользовались неправильной формулой

$\lg x^2 = 2\lg x$, сужающей область определения выражения, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу (особенно тригонометрическую), следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Домашнее задание

