

# Теорема Виета

---

**Выполнила:**  
**Кащенко А.С.**

## Виет (Вьет) Франсуа (1540-1603)



Французский математик. Разработал почти всю элементарную алгебру. Известны «формулы Виета», дающие зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения. Ввел буквенные обозначения для коэффициентов в уравнениях.

Знаменитая теорема, устанавливающая связь коэффициентов многочлена с его корнями, была обнаружена в 1591 году. Теперь она носит имя Виета, а сам автор формулировал ее так:

---

**"Если  $B+D$ , умноженное на  $A$ , минус  $A$  в квадрате равно  $BD$ , то  $A$  равно  $B$  и равно  $D$ ".**

- **Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту , взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.**

# Гипотеза

---

Если с помощью теоремы Виета можно быстро находить корни квадратного уравнения, то можно ли применить теорему к уравнениям высших степеней?

**Так же теорему Виета можно использовать для уравнений третьей степени.**

Сумма корней приведённого кубического уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, сумма произведений корней  $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$  равна третьему коэффициенту, а произведение корней равно свободному члену, взятому с противоположным знаком.

Для квадратных уравнений равенства (2) имеют вид:

$$\underline{x_1 + x_2} = -\frac{a_2}{a_0}, \quad x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Для корней уравнения третьей степени

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

справедливы равенства

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3} = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\underline{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3} = \frac{a_2}{a_0} \quad (3)$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

Приведём доказательство этой теоремы для  $n=3$

Из равенства (3) следует, что

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ &+ (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = \\ &= x^2(x - x_1) - x_2x(x - x_1) - x_3x(x - x_1) + x_2x_3(x - x_1) = \\ &= (x - x_1)(x^2 - x_2x - x_3x + x_2x_3) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (4)$$

Числа  $x_1, x_2, x_3$  являются корнями уравнения

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$



- Тогда из равенства (4) следует, что эти числа являются корнями уравнения

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = 0,$$

а значит, и равносильного ему уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

**Замечание.** Формулы Виета остаются справедливыми в случае, когда имеются кратные корни. Тогда в равенствах (2) каждый корень столько раз, какова его кратность.

Так же как и для квадратных уравнений, равенства (2) называют формулами Виета для корней целых рациональных уравнений степени  $n$ . Справедливо и утверждение обратное теореме 1.

**Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства (2), то числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются корнями целого рационального уравнения степени  $n$  стандартного вида**

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Рассмотрим целое рациональное уравнение степени  $n$  стандартного вида  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  (1)

В учебнике за 8 класс доказано, что если многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Имеет  $n$  различных корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  
то выполняются равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

.....

$$x_1x_2x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \quad (2)$$

Заметим, что левые части этих равенств являются симметрическими многочленами переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Так как любое целое число рациональное уравнение степени  $n$  можно привести к стандартному виду (1), то справедлива следующая теорема:

**Теорема 1 (Виета). Если целое рациональное уравнение степени  $n$ , приведённое к стандартному виду, имеет  $n$  различных корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то они удовлетворяют равенствам (2).**

## Пример 1

*Напишем приведённое кубическое уравнение*

---

*$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$ , корни которого обратны корням уравнения*

$$x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$$

Решение:

1. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  – корни уравнения  $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$ , О.Д.З.  $x \neq 0$

2. т.к.  $a = 1$ , то по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -5 \end{cases}$$

3. пусть  $y_1, y_2, y_3$  корни уравнения  $y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$ , О.Д.З.  $y \neq 0$

4. тогда  $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}, y_3 = \frac{1}{x_3}$

5. т.к.  $a = 1$ , то по теореме Виета

$$\begin{cases} b_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{7}{5}, \\ b_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{3}{5}, \\ b_3 = -y_1y_2y_3 = -\frac{1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

6. Следовательно искомое уравнение имеет вид:

$$y^3 + \frac{7}{5}y^2 - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5} = 0, \text{ или } 5y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0.$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

1. О. Д. З.  $x \in R$

2. Найдём делители свободного члена 6:  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ .

3. Если  $x_1 = -1 \in \text{О.Д.З.}$ , то  $-1 + 2 + 5 - 6 = 0$

$$\begin{array}{r} 4. \quad x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad \Big| \quad \underline{x + 1} \\ \quad - x^3 + x^2 \phantom{- 5x - 6} \\ \hline \phantom{x^3 + } x^2 - 5x \phantom{- 6} \\ \quad - x^2 + x \phantom{- 6} \\ \hline \phantom{x^3 + } \phantom{x^2 - } -6x - 6 \\ \quad -6x - 6 \\ \hline \phantom{x^3 + } \phantom{x^2 - } \phantom{-6x - } 0 \end{array}$$

5.  $x^2 + x - 6 = 0$

т.к.  $a=1$ , то по т. Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -6 \end{cases} \quad \begin{matrix} -3 \text{ и } 2 \\ -2 \text{ и } 3 \end{matrix}$$

$x_2 = -3 \in \text{О.Д.З.}$  ,  $x_3 = 2 \in \text{О.Д.З.}$

Ответ:  $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2$ .

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

1. О.Д.З.  $x \in R$
2. т.к.  $a=1$ , то по т. Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5 \\ x_1x_2x_3 = 6 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} -3; -1; 2. \end{array} \right.$$

$x_1 = -3 \in \text{О.Д.З.}, x_2 = -1 \in \text{О.Д.З.}, x_3 = 2 \in \text{О.Д.З.}$

Ответ:  $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2.$

**Теорема Виета позволяет рациональнее решить  
это уравнение**



Решим уравнение:  $x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x + 1 = 0$

1. О.Д.З.  $x \neq 0$

2. Это уравнение симметрическое, т.к. старший К равен свободному члену, второй К равен четвёртому К. =>

$$\underline{x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x + 1 = 0} \quad | : x^2 \neq 0$$

$$\underline{x^2 + 2x - 22 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

сгруппируем

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 22 = 0$$

3. Замена: а)  $x + \frac{1}{x} = t, t \neq 0$

б) Чтобы найти замену для I слагаемого возведём обе части замены (а) в квадрат

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$4. \quad t^2 - 2 + 2t - 22 = 0$$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

т.к.  $a=1$ , то по теореме Виета

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1 t_2 = -24 \end{cases} \quad -6 \text{ и } 4$$

$$t_1 = -6 \in \text{О.Д.З.}, \quad t_2 = 4 \in \text{О.Д.З.}$$

5. если  $t_1 = -6$ , то  $x + \frac{1}{x} = -6 \quad | x \neq 0$

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 = 32, \quad D > 0$$

$$\underline{x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}}$$

если  $t_2 = 4$ , то  $x + \frac{1}{x} = 4 \quad | x \neq 0$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$\underline{x_{3,4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \in \text{О.Д.З.}}$$

Ответ:  $x_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$ ,  $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$

**Вывод: когда корни иррациональны, то решить уравнение с помощью теоремы Виета очень трудно**

## **Вывод:**

---

Таким образом гипотеза о том, что теорема Виета помогает быстро находить корни квадратного уравнения применима к решению уравнений высших степеней.