Теорема Виета

Выполнила:
Кащенко А.С.

Виет (Вьет) Франсуа (1540-1603)

Французский математик. Разработал почти всю элементарную алгебру. Известны «формулы Виета», дающие зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения. Ввел буквенные обозначения для коэффициентов в уравнениях.

Знаменитая теорема, устанавливающая связь коэффициентов многочлена с его корнями, была обнародована в 1591 году. Теперь она носит имя Виета, а сам автор формулировал ее так:

"Если B+D, умноженное на A, минус A в квадрате равно BD, то A равно B и равно D".

- **Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту , взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.**

Гипотеза

Если с помощью теоремы Виета можно быстро находить корни квадратного уравнения, то можно ли применить теорему к уравнениям высших степеней?

Так же теорему Виета можно использовать для уравнений третьей степени.

Сумма корней приведённого кубического уравнения равна второму коофиценту, взятому с противоположным знаком, сумма произведений корней ($x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$) равна третьему коофиценту, а произведение корней равно свободному члену , взятому с противоположным знаком.

Для квадратных уравнений равенства (2) имеют вид:

$$x_1+x_2= -\frac{a_2}{a_0},\ x_1x_2=\frac{a_2}{a_0}.$$

Для корней уравнения третей степени

$$a_0x^3+a_1x^{2+}a_2x+a^3=0$$

справедливы равенства

$$x_1+x_2+x_3= -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_2}{a_0} \qquad (3)$$

$$x_1x_2x_3= -\frac{a_3}{a_0}$$

Приведём доказательство этой теоремы для n=3

Из равенства (3) следует, что

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x_2+$$

$$+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3=$$

$$=x^2(x-x_1)-x_2x(x-x_1)-x_3x(x-x_1)+x_2x_3(x-x_1)=$$

$$=(x-x_1)(x^2-x_2x-x_3x+x_2x_3)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Итак, $x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$ (4)

Числа x_1,x_2,x_3 являются корнями уравнения

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0.$$

- Тогда из равенства (4) следует, что эти числа являются корнями уравнения

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=0,$$

а значит, и равносильного ему уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.$$

Замечание. Формулы Виета остаются справедливыми в случае, когда имеются кратные корни. Тогда в равенствах (2) каждый корень столько раз, какова его кратность.

Так же как и для квадратных уравнений, равенства (2) называют формулами Виета для корней целых рациональных уравнений степени n. Справедливо и утверждение обратное теореме 1.

Теорема 2 (обратная). **Если выполняются равенства (2), то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями целого рационального уравнения степени n стандартного вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$**

Рассмотрим целое рациональное уравнение степени n стандартного вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ (1)

В учебнике за 8 класс доказано, что если многочлен

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

Имеет n различных корней $x_1, x_2, \ldots x_n$,
то выполняются равенства

$$x_1+x_2+\ldots+x_n= -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0} \qquad (2)$$

Заметим, что левые части этих равенств являются симметрическими многочленами переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как любое целое число рациональное уравнение степени n можно привести к стандартному виду (1), то справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Виета). **Если целое рациональное уравнение степени n, приведённое к стандартному виду, имеет n различных корней x_1, x_2, …, x_n, то они удовлетворяют равенствам (2).**

Пример 1

Напишем приведённое кубическое уравнение $y^3+b_1y^2+b_2y+b_3=0$, *корни которого обратны корням уравнения*

$x^3-3x^2+7x+5=0$

Решение:

1. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3-3x^2+7x+5=0$, О.Д.З. $x \neq 0$
2. т.к. а = 1, то по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 3 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -5 \end{cases}$$

3. пусть y_1, y_2, y_3 корни уравнения $y^3 + b_1y^2+b_2y+b_3=0$, О.Д.З. $y \neq 0$
4. тогда $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{1}{x_3}$
5. т.к. а = 1, то по теореме Виета

$$\begin{cases} b_1=-(y_1+y_2+y_3)= -\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \dfrac{7}{5}, \\ b_2=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3} =-\dfrac{3}{5}, \\ b_3= -y_1y_2y_3= -\dfrac{1}{x_1x_2x_3} =\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

6. Следовательно искомое уравнение имеет вид:

$$y^3+\frac{7}{5}y^2-\frac{3}{5}y+\frac{1}{5}=0, \text{ или } 5y^3+7y^2-3y+1=0.$$

$x^3+2x^2-5x-6=0$

1. О. Д. З. $x \in R$
2. Найдём делители свободного члена 6: ±1; ±2; ±3; ±6.
3. Если $x_1=-1 \in$ О.Д.З., то $-1+2+5-6=0$
4.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2} & x^2+x-6 \\
x^2-5x & \\
-\underline{x^2+x} & \\
-6x-6 & \\
-\underline{-6x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

5. $x^2+x-6=0$

т.к. $a=1$, то по т. Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=-6 \end{cases} \Bigg| \quad -3 \text{ и } 2$$

$x_2=-3 \in$ О.Д.З. , $x_3=2 \in$ О.Д.З.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

$x^3+2x^2-5x-6=0$

1. О.Д.З. $x \in R$
2. т.к. а=1, то по т. Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5 \\ x_1x_2x_3=6 \end{cases} \Bigg| \ -3;\ -1;\ 2.$$

$x_1=-3 \in$ О.Д.З., $x_2=-1 \in$ О.Д.З., $x_3=2 \in$ О.Д.З.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

Теорема Виета позволяет рациональнее решить это уравнение

Решим уравнение: $x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x + 1 = 0$

1. О.Д.З. $x \neq 0$
2. Это уравнение симметрическое, т.к. старший К равен свободному члену, второй К равен четвёртому К. =>

   $x^4+2x^3 - 22x^2 + 2x+1=0 \;\Big|: \; x^2 \neq 0$

   $x^2+2x - 22+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

   сгруппируем

   $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-22=0$

3. Замена: а) $x+\frac{1}{x}=t, t \neq 0$

   б) Чтобы найти замену для I слагаемого возведём обе части замены (а) в квадрат

   $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$

   $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

4. $t^2 - 2 + 2t - 22 = 0$

   $t^2 + 2t - 24 = 0$

   т.к. a=1, то по теореме Виета

   $\begin{cases} t_1+t_2= -2 \\ t_1 t_2= -24 \end{cases} \Big|\; -6 \text{ и } 4$

   $t_1=-6 \in О.Д.З$, $t_2=4 \in О.Д.З.$

5. если $t_1= -6$, то $x+\frac{1}{x}= -6 \;\big|\, x \neq 0$

   $x^2+6x+1=0$

   $Д = b^2 - 4ac = 36 - 4 = 32$, $Д>0$

   $x_{1;2}= \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

   если $t_2 = 4$, то $x+\frac{1}{x}=4 \big|\cdot x \neq 0$

   $x^2 - 4x+1=0$

   $Д=16 - 4 = 12$

   $x_{3;4}= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \in О.Д.З.$

   Ответ: $x_{1;2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$, $x_{3;4} = 2 \pm \sqrt{3}$

Вывод: когда корни иррациональны, то решить уравнение с помощью теоремы Виета очень трудно

Вывод:

Таким образом гипотеза о том, что теорема Виета помогает быстро находить корни квадратного уравнения применима к решению уравнений высших степеней.