

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

Метод рационализации
(декомпозиции) - это метод
замены одного неравенства
на равносильное другое,
более простое неравенство

Модуль

$$\square |f| - |g| > 0,$$

$$(|f| - |g|)(|f| + |g|) > 0$$

$$|f|^2 - |g|^2 > 0$$

$$f^2 - g^2 > 0$$

$$(f - g)(f + g) > 0$$

Вывод: $|f| - |g| > 0 \Leftrightarrow (f - g)(f + g) > 0$

Квадратный корень

$$\sqrt{f} - \sqrt{g} \geq 0$$

$$(\sqrt{f} - \sqrt{g})(\sqrt{f} + \sqrt{g}) \geq 0$$

$$(\sqrt{f})^2 - (\sqrt{g})^2 \leq 0$$

$$f - g \leq 0$$

ОДЗ:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \geq 0, \\ g \geq 0; \end{array} \right.$$

Вывод: $\sqrt{f} - \sqrt{g} \leq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f - g \leq 0, \\ f \geq 0 \\ g \geq 0 \end{array} \right.$

Показательные неравенства

$$a^f - a^g > 0, \quad a > 0, \quad a^f > a^g$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a < 1 \\ f > g \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ f < g \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a - 1 < 0 \\ f - g > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a - 1 > 0 \\ f - g < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(f-g) > 0$$

Вывод: $a^f - a^g > 0, \quad a > 0, \quad (a-1)(f-g) > 0$

$$\Leftrightarrow$$

Частный случай

$$a^f - 1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 ; a^f - a^0 > 0 \quad a > 0 \quad (a-1)(f-0) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$



Вывод:

$$a^f - 1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0 \quad (a-1)f \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$



Пример

$$\frac{4x^2 + 3x - 2 - 0,5^{2x^2 + 2x - 1}}{5^x - 1} \leq 0$$

$$\text{ОДЗ: } 5^x - 1 \neq 0$$

$$5^x \neq 5^0$$

$$x \neq 0$$

$$\frac{2^{2x^2 + 6x - 4} - 2^{-2x^2 - 2x + 1}}{5^x - 5^0} \leq 0$$

$$\frac{(2 - 1)(2x^2 + 6x - 4 - (-2x^2 - 2x + 1))}{(5 - 1)(x - 0)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2 + 6x - 4 + 2x^2 + 2x - 1}{4x} \leq 0$$

$$\frac{4x^2 + 8x - 5}{4x} \leq 0$$

$$Y = \frac{4x^2 + 8x - 5}{4x}$$

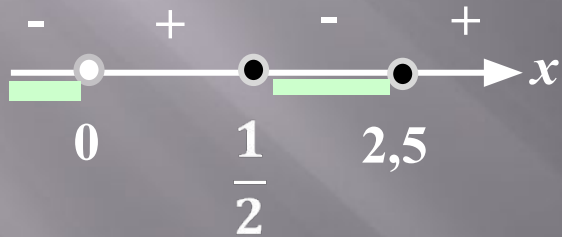
$$\frac{4x^2 + 8x - 5}{4x} = 0$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 8x - 5 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$D = 16 - 4 \times (-5) = 36$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{5}{2}$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; 2,5\right]$$

Логарифмические неравенства

$$\square \log_a f - \log_a g \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0$$

$$\log_a f \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < 1 \\ f > g \\ < \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f > g \\ < \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a - 1 < 0 \\ f - g > 0 \\ < \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 > 0 \\ f - g > 0 \\ < \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)(f-g) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

Вывод: $\log_a f - \log_a g \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0 \quad (a-1)(f-g) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

$$\Leftrightarrow$$

Частные случаи

$$1) \log_a f - 1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad \log_a f - \log_a a \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad a > 0, a \neq 1, f > 0 \quad (a-1)(f-a) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

\Leftrightarrow

Вывод: $\log_a f - 1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0, a \neq 1, f > 0 \quad (a-1)(f-a) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

\Leftrightarrow

$$2) \log_a f - 0 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0; \quad \log_a f - \log_a 1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad a > 0, a \neq 1, f > 0 \quad (a-1)(f-1) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

\Leftrightarrow

Вывод: $\log_a f \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0, a \neq 1, f > 0 \quad (a-1)(f-1) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

\Leftrightarrow

$$3) \log_a f + \log_a g \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0 \quad \log_a f - (-\log_a g) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

\Leftrightarrow
 \Leftrightarrow

$$a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0 \quad \log_a g - \log_a g^{-1} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0$$

\Leftrightarrow

\Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \log_a f - \log_a \frac{1}{g} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

Вывод:

$$\log_a f + \log_a g \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0 \quad (a-1)\left(f - \frac{1}{g}\right) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

\Leftrightarrow