

Решение задач и пути ее реализации

Задачи на смеси и сплавы

Нейфельд Е.Л.
учитель математики

Задача:

Сколько кг воды нужно выпарить из 100 кг массы ягод, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

Решение задачи:

1) $100\% - 90\% = 10\%$, что составляет 10 кг «чистого вещества».

2) Выпарили x кг, осталось $(100 - x)$ кг,

$$20\% = \frac{1}{5}$$

Уравнение: $\frac{10}{100 - x} = \frac{1}{5}$

$$50 = 100 - x$$

$$x = 50$$

Ответ: 50кг.

Понятия:

- **Абсолютное содержание вещества в смеси** – это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т. д.).
- **Относительное содержание вещества** – это отношение абсолютного содержания вещества к общей массе (объему) смеси.

Часто относительное содержание вещества называют концентрацией или процентным содержанием, при этом используют различные записи относительного содержания вещества: в долях, процентах.

Иллюстрация понятия:

Предположим, что в сосуд, содержащий 450 г воды, добавили 50 г соли. Общая масса полученного раствора 500г

- Абсолютное содержание соли 50г, относительное содержание соли

$$\frac{50 \text{ г}}{500 \text{ г}} = \frac{1}{10} = 10 \%$$

- Абсолютное содержание воды 450г, относительное содержание воды .

$$\frac{450 \text{ г}}{500 \text{ г}} = \frac{9}{10} = 0,9 = 90 \%$$

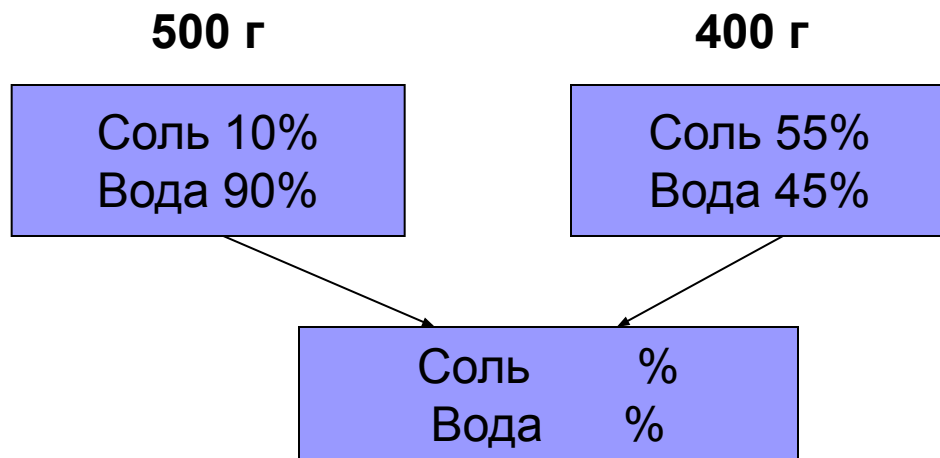
а) Смешали две смеси.

При образовании смеси складываются абсолютные содержания. Поэтому, если известны только относительные содержания, то нужно:

- **1. Подсчитать абсолютные содержания;**
- **2. Сложить абсолютные содержания, компонент.**
- **3. Подсчитать относительные содержания компонента.**

- Пример 1: Смешали 500г 10% раствора соли и 400г 55% раствора соли. Определите концентрацию соли в смеси.

Решение:



Абсолютное содержание соли:

- в I растворе $500 \cdot 0,1 = 50$ г.
- во II растворе $400 \cdot 0,55 = 220$ г.
- Смесь двух исходных растворов составляет:

$$\frac{270\text{г}(\text{абсолютное содержание соли})}{900\text{г}(\text{общая масса})} = 0,3 = 30\%.$$

Общий подход к данному типу задач:

$$\frac{P_1 m_1}{100}$$

- масса соли в I растворе

$$\frac{P_2 m_2}{100}$$

- масса соли во II растворе

$$\frac{P_1 m_1 + P_2 m_2}{100}$$

- масса соли при смешивании

Процентное содержание соли в смеси:

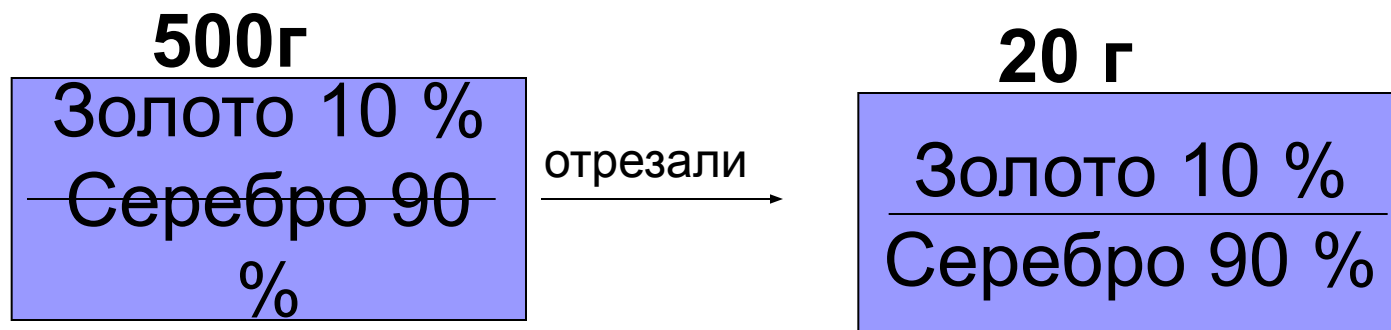
$$P = \frac{\frac{P_1 m_1 + P_2 m_2}{100} \cdot 100}{m_1 + m_2} = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$p_1 m_1 + p_2 m_2 = p (m_1 + m_2)$$

**б) Отлили часть раствора
(отрезали кусок сплава).**

Пример2: От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10% содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.

Пример2: От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10% содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.



$$1) 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ г}$$

$$2) 20 \cdot 0,9 = 18 \text{ г}$$

- **Пример3:** Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?

Пример3: Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?



$$24 \cdot 0,4 = 9,6 \text{ т}$$

$$24 - 9,6 = 14,4 \text{ т}$$

$$x - 0,04 x = 0,96 x$$

$$0,96 x = 14,4$$

$$x = 15$$

- **Пример 4:** В двух литрах водного раствора, содержащего 60% кислоты добавили 4 литра чистой воды. Определить % содержание кислоты в новом растворе?

Пример 4: В двух литрах водного раствора, содержащего 60% кислоты добавили 4 литра чистой воды.
Определить % содержание кислоты в новом растворе?

Ответ можно
получить по
рассмотренной
ранее формуле:

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{60 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{60 \cdot 2}{6} = 20\%$$

- **Пример 5:** Сколько литров воды нужно добавить в 2 литра водного раствора, содержащего 60 % кислоты, чтобы получить 20 % раствора кислоты?

Пример 5: Сколько литров воды нужно добавить в 2 литра водного раствора, содержащего 60 % кислоты, чтобы получить 20 % раствора кислоты?

Арифметический способ:

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ л.}$$

$$6 \text{ л} - 2 \text{ л} = 4 \text{ л}$$

Алгебраический способ:

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot 2 &= 0,2 (x + 2) \\ X &= 4 \end{aligned}$$

- **Пример 6:** Сколько л. воды нужно выпарить из 20л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?

Пример 6: Сколько л. воды нужно выпарить из 20л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?

Примеси в водном растворе

$$100\% - 80\% = 20\%$$

Стало:

$$\frac{100\% - 75\%}{25\%} =$$

Примеси увеличилось в

$$\frac{25}{20} = 1,25 \text{ раза}$$

Объем уменьшить в 1,25 раза

$$\begin{aligned} 20 : 1,25 &= 16\text{л} \\ 20 - 16 &= 4\text{л} \end{aligned}$$

- **Пример 7:** Сплав состоящий из двух металлов весит 18 кг. После того как из него выделили 40% первого и 25% второго, в нем первого металла осталось столько же, сколько второго. Сколько килограмм каждого металла было первоначально в сплаве?

Пример 7: Сплав состоящий из двух металлов весит 18 кг. После того как из него выделили 40% первого и 25% второго, в нем первого металла осталось столько же, сколько второго. Сколько килограмм каждого металла было первоначально в сплаве?

Металл	I - x	II - y	Всего: $x + y = 18$
Выделили	0,4 x	0,25 y	
Осталось	0,6 x	0,75 y	Поровну 0,6 $x = 0,75y$

Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 0.6x = 0.75y \end{cases}$$

Ответ: 10 кг, 8кг.

- **Пример 8:** Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30%.

Пример 8: Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30%.

Масса	Чистое вещество
I сорт X	0,05 x
II сорт Y	0,4 y
Всего: $x + y = 140$	$0,05x + 0,4y = 140 \cdot 0,3$

Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ 0.05x + 0.4y = 42 \end{cases}$$

Ответ: 40 тонн, 100 тонн.

в) Задачи на многократные переливания.

Пример 1:

В ведре находится 10 литров чистого, а в баке 20 литров 40 % раствора этого спирта. Некоторое количество спирта из ведра перелили в бак, полученную смесь перемешали и точно такое же количество перелили обратно. Эту операцию повторили несколько раз, соблюдая следующие условия: в ведро переливают такое же количество раствора, какое перед этим перелили в бак; после каждого переливания раствор тщательно перемешивают. После нескольких описанных операций в ведре оказался 70 % раствор спирта. Определите % концентрацию раствора спирта в баке.

Пример 1:

В ведре находится 10 литров чистого, а в баке 20 литров 40 % раствора этого спирта. Некоторое количество спирта из ведра перелили в бак, полученную смесь перемешали и точно такое же количество перелили обратно. Эту операцию повторили несколько раз, соблюдая следующие условия: в ведро переливают такое же количество раствора, какое перед этим перелили в бак; после каждого переливания раствор тщательно перемешивают. После нескольких описанных операций в ведре оказался 70 % раствор спирта. Определите % концентрацию раствора спирта в баке.

Самое важное в задаче заключается в следующем: общее количество спирта в ведре и баке после всех переливаний не изменилось.

Первоначально спирта было $10 + 8 = 18$ л. спирта.

В конце процесса в ведре $10 + 8 = 18$

$$10 \cdot 0,7 = 7 \text{ л}$$

$$18 - 7 = 11 \text{ л}$$

$$\frac{11 \cdot 100}{20} \% = 55\%$$

■ **Пример 2:**

В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке 20 л 75 % раствора спирта. Некоторое количество спирта переливают в бак, точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в ведре оказался 90 % раствор спирта. Сколько л спирта перелили из ведра в бак?

Пример 2:

В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке 20 л 75 % раствора спирта. Некоторое количество спирта переливают в бак, точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в ведре оказался 90 % раствор спирта. Сколько л спирта перелили из ведра в бак?

В баке $0,75 \cdot 20 = 15$ л спирта, а вместе $10 + 15 = 25$ л.

После двух переливаний в ведре $0,9 \cdot 10 = 9$ л спирта

А в баке $25 - 9 = 16$ л спирта Доля спирта в баке $\frac{16}{20} = 0,8$

x – количество переливаемого раствора

Перелитый в ведро раствор содержит $0,8x$ л спирта

После двух переливаний В баке осталось $15 + x - 0,8x = 15 + 0,2x$ $15 + 0,2x = 16$ $x = 5$

- **Пример 3:** В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько л. Спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом.

Пример 3: В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько л. Спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом.

В 1 сосуде оказалось 16 л, а во 2 – 14 л спирта.

Пусть было первоначально в 1 сосуде x л, а во 2 $(30 - x)$ л спирта.

После доливания водой первого сосуда спирт составляет

$$\frac{x}{30}$$

всего объема.

Во второй сосуд перелили

$$x \cdot \frac{x}{30} = \frac{x^2}{30} \text{ л.}$$

Стало:

$$\left(30 - x + \frac{x^2}{30} \right) \text{ л.}$$

Доля спирта

$$\frac{30 - x + \frac{x^2}{30}}{30}$$

В 12 л смеси:

$$12 \cdot \frac{30 - x + \frac{x^2}{30}}{30} = 12 - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{75} \text{ . Во 2 сосуде осталось:}$$

$$\left(30 - x + \frac{x^2}{30} \right) - \left(12 - \frac{2}{5}x + \frac{x^2}{75} \right) = 18 - \frac{3x}{5} + \frac{x^2}{50} \text{ или 14 л спирта.}$$

$$18 - \frac{3x}{5} + \frac{x^2}{50} = 14$$

$$\text{Ответ: } \begin{aligned} X_1 &= 10 \\ X_2 &= 20 \end{aligned}$$

Г) Более сложные задачи:

Пример 1: Имеется 2 сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что 1 сплав содержит 40 % олова, а второй 26 % меди. % содержание цинка в 1 и 2 сплаве одинаковое. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определите, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве?

	медь	цинк	олово	Масса (кг.)	Т.к. процент ное
1		30%	40%	150	Содержание цинка
2	26%	30%		250	Одинаковое и в 3
3		30%		400	Сплаве равно 30%, то в 1 и 2 сплавах

$250 \cdot 0,3 = 75$ (кг) цинка 2 сплав

$250 \cdot 0,26 = 65$ (кг) меди 2 сплав

$250 - (75+65) = 110$ (кг) олово во 2 сплаве

$150 \cdot 0,4 = 60$ (кг) олово в 1 сплаве

$110 + 60 = 170$ (кг) олово в 3 сплаве.

Пример 2: Из 2 растворов с различным процентным содержанием спирта и массой m и n отлили по одинаковому количеству спирта. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего % содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Пример 2:

Из 2 растворов с различным процентным содержанием спирта и массой m и n отлили по одинаковому количеству спирта. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего % содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Геометрическая иллюстрация:

	Масса	Было	Отлили	Долили	Получили
1	m	am	ax	vx	$am-ax+vx$
2	n	vn	vx	ax	$vn-vx+ax$

a – частей спирта в 1 сосуде

v – частей спирта во 2 сосуде

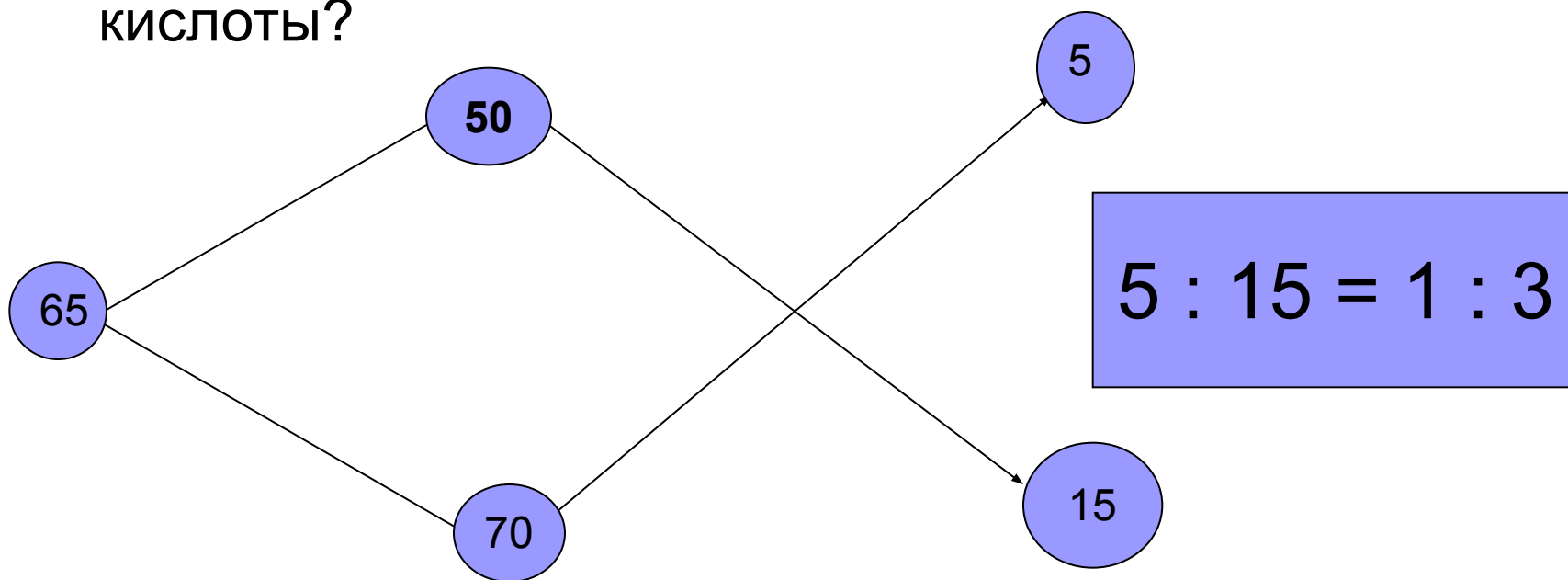
Т. к в обоих растворах процентное содержание спирта одинаково, то получим уравнение:

$$\text{Уравнение: } \frac{am - ax + vx}{m} = \frac{vn - vx + ax}{n}$$

$$X = \frac{mn}{m + n}$$

Пример 1: Арифметический старинный способ

В каких пропорциях нужно смешать раствор 50 % и 70 % кислоты, чтобы получить раствор 65 % кислоты?



Алгебраический способ

x - количество 50% кислоты

y - количество 70% кислоты

$(x+y)$ - количество смеси

$$0.5x + 0.7y = 0.65(x + y)$$

$$0.5x + 0.7y = 0.65x + 0.65y$$

$$0.15x = 0.05y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 1:3

Алгоритм решения задач на смеси и сплавы:

1. Выбор неизвестных.
2. Выбор чистого вещества.
3. Переход к долям.
4. Отслеживание состояния смеси или сплава.
5. Составление уравнения или выполнение действий.
6. Формирование ответа.



Тестовые задания

1. К 80 г 15% раствора соли добавили 20 г воды. Определите концентрацию получившегося раствора.
A) 10% B) 12% C) 20% D) 8%.
2. Сплав меди и олова массой 16 кг содержит 55% олова. Сколько чистого олова надо добавить в сплав, чтобы получившийся новый сплав имел 60% олова.
A) 2 кг B) 3 кг C) 5 кг D) 10 кг.
3. Из двух сплавов, которые содержат 60% и 80% железа, требуется получить 40 кг сплава с 75% содержанием железа сколько килограммов каждого сплава следует взять?
A) 24 кг и 16 кг B) 20 кг и 20 кг C) 10 кг и 30 кг D) 25 кг и 15 кг.
4. Чтобы получить 50% раствор кислоты надо к 30 г 15% раствора кислоты добавить 75% раствор этой же кислоты. Найдите количество 75% раствора кислоты, которое надо добавить.
A) 20 г B) 10 г C) 40 г D) 42 г.