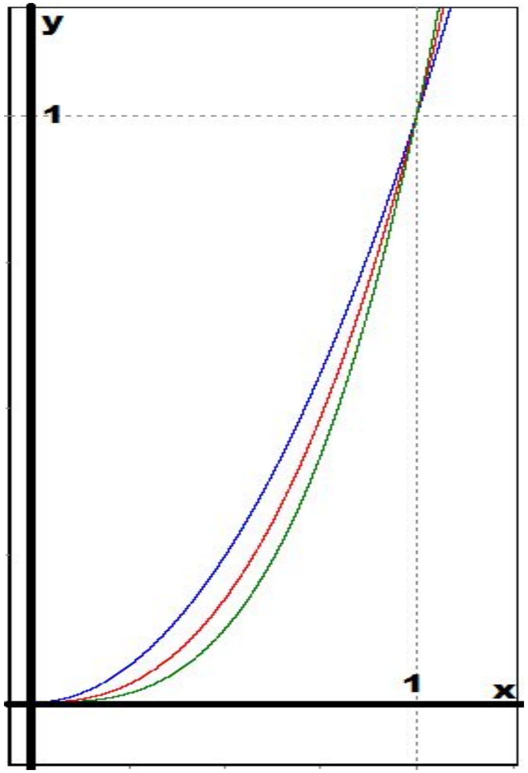
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.



УРОК НА ТЕМУ: СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СВОЙСТВА, ГРАФИКИ.

Степенные функции.

Ребята, на прошлом уроке мы узнали, как работать с числами с рациональным показателем степени.

На этом уроке мы рассмотрим степенные функции и ограничимся случаем, когда показатель степени рациональный.

Мы будем рассматривать функции вида:

$$\boxed{y = x^{\frac{m}{n}}}$$

Рассмотрим сначала функции, у которых показатель степени больше одного.

$$\frac{m}{n} > 1$$

Степенные функции.

Пусть нам дана конкретная функция $y = x^{2.5}$

Согласно определению, которое мы дали на прошлом уроке x≥0, то есть область определения нашей функции луч [0;+∞).

Таблица значений.

x	0	1	4
y	0	1	32

Давайте, сравним три степенных функции

$$y = x^2;\ \ y = x^{2.5}; y = x^3$$

Число 2,5 лежит между 2 и 3, тогда кажется, что и график нашей функции будет лежать между соответствующими графиками, сравним значения функций при различных x.

1. Если $0<x<1$, то $x^6 < x^5 < x^4$ няется $\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4}$

или $x^3 < x^{2.5} < x^2$

2. Если $x>1$, то $x^4 < x^5 < x^6$ лняется $\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6}$

или $x^2 < x^{2.5} < x^3$

Степенные функции.

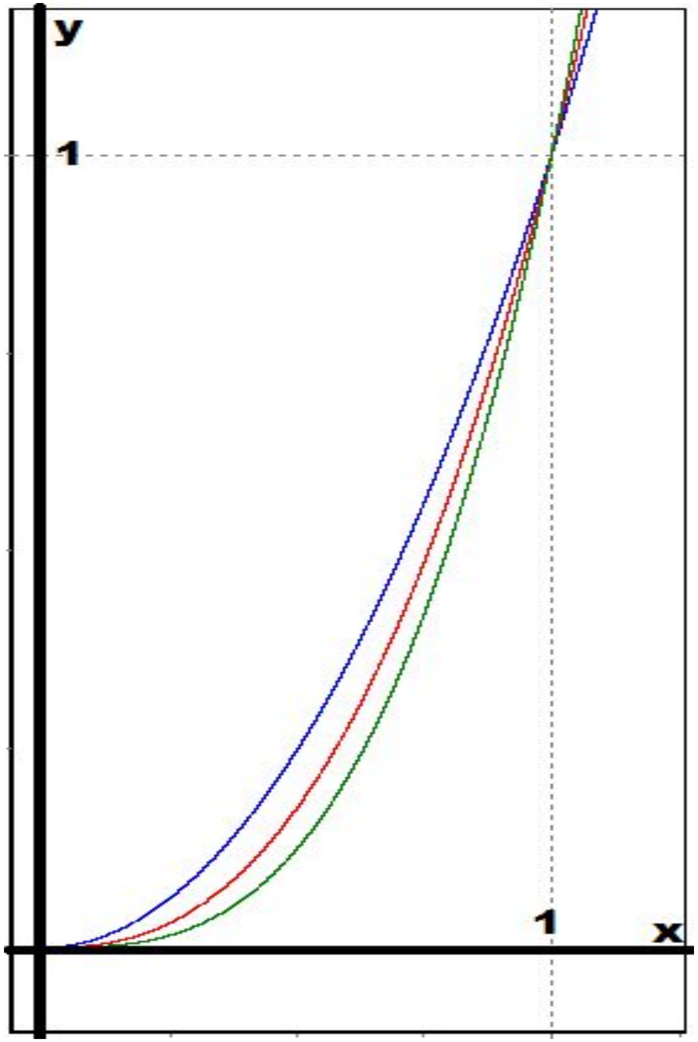
Давайте построим все три графика на одном рисунке:
На первом рисунке построим графики для случая 0<x<1

На нашем графике показыны функции

Синим $y = x^2$

Красным $y = x^{2.5}$

Зеленым $y = x^3$



Степенные функции.

Теперь построим графики на всей области определения функции

$$y = x^{2.5}$$

Цвет графиков такой же как и на предыдущем рисунке.

График функции

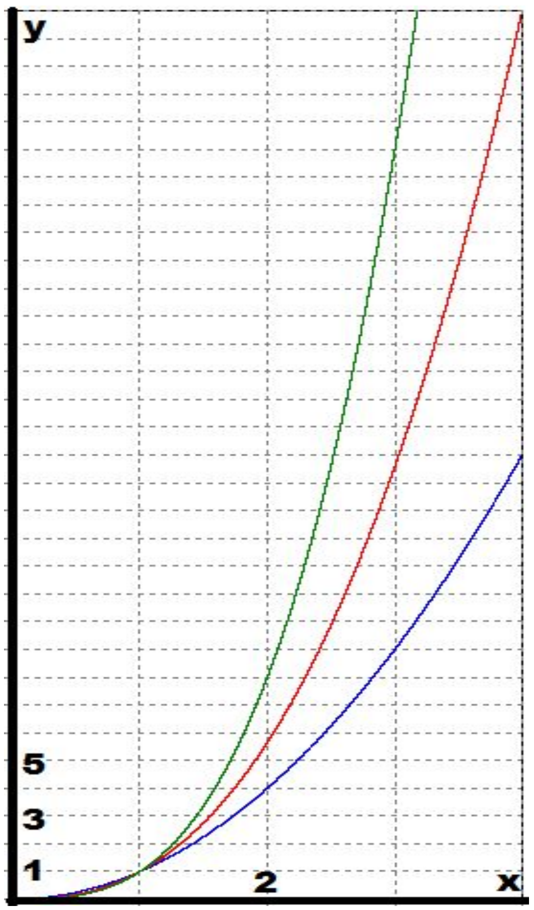
$$y = x^{\frac{m}{n}} \ (m > n)$$

– ***кривая, проходящая через точки (0,0) и (1,1) и похожая на ветвь параболы.*** Чем больше показатель, тем круче вверх уходит график функции.

Степенные функции.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}\ (m > n)$

1. D(y)=[0;+∞)
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на [0;+∞).
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. E(f)=[0; +∞).
8. Выпукла вниз.



Степенные функции.

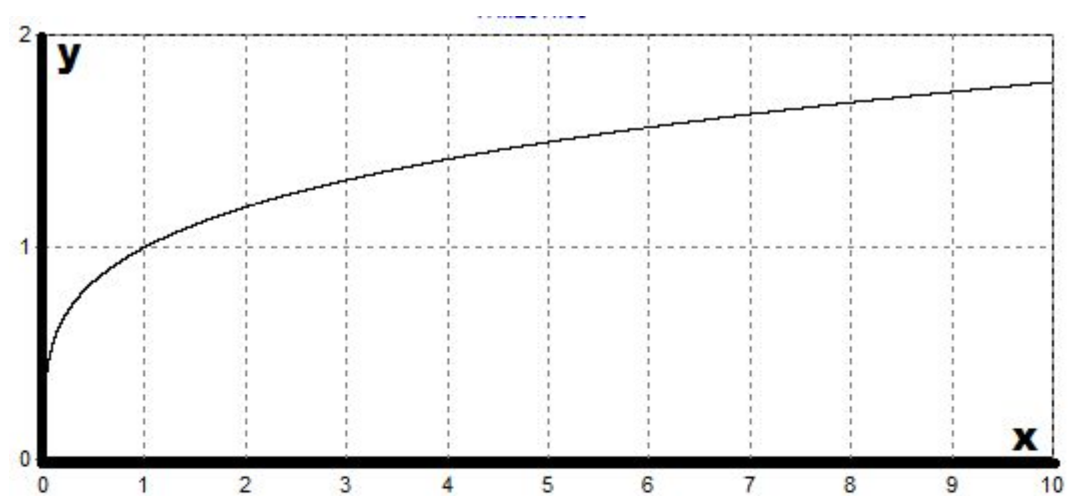
Перейдем к случаю ***показателя степени правильная дробь (то есть когда числитель меньше знаменателя).***

График функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ $(m < n)$ к на график функции $y = \sqrt[n]{x}$

Давайте схематично изобразим наш график функции.

Свойства функции :

1. D(y)=[0;+∞)
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на [0;+∞).
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. E(f)=[0; +∞).
8. Выпукла вверх.



Степенные функции.

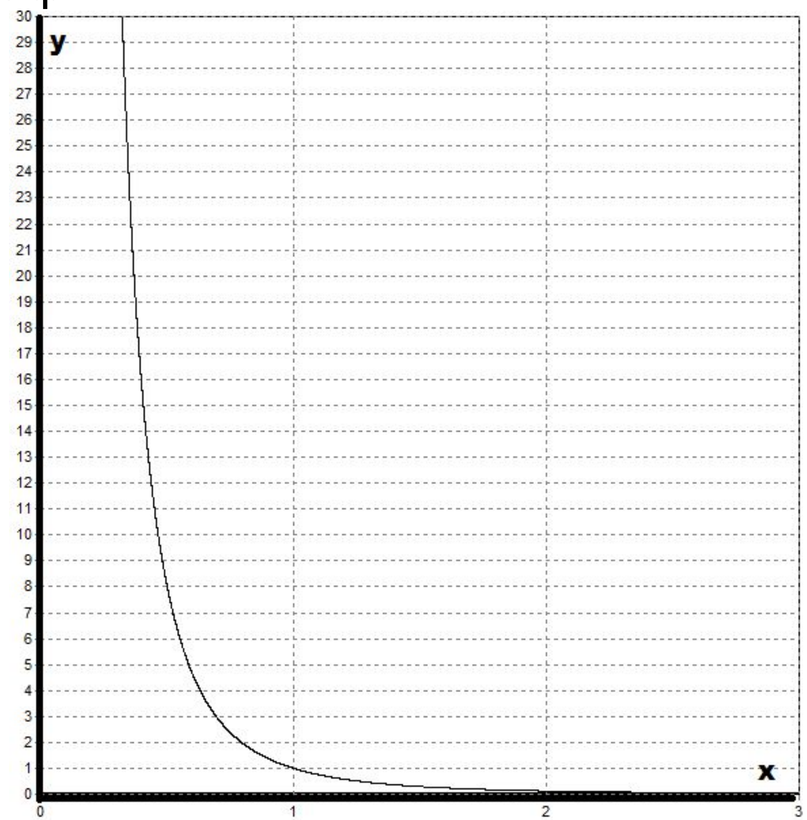
Нам осталось рассмотреть график функции

$$y = x^{-\frac{m}{n}}$$

Не трудно догадаться, что ***наш график будет иметь схожий вид с гиперболой***. График имеет две асимптоты: горизонтальную y=0 и вертикальную x=0. Давайте схематично изобразим наш график:

Свойства функции :

1. D(y)=(0;+∞)
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Убывает на (0;+∞).
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. E(f)=(0; +∞).
8. Выпукла вниз.



Степенные функции.

Ребята, мы с вами забыли одно очень важное свойство – **дифференцируемость функции**. Чему равна производная степенной функции с рациональным показателем?

Определение. Если x>0 и r – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ **вычисляется по формуле:**

$$\boxed{y' = r \cdot x^{r-1}}$$

Например:

$$(x^{1000})' = 1000x^{999}; (x^{-8})' = -8x^{-9}; (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\sqrt[6]{(2x+5)^5}\right)' = ((2x+5)^{\frac{5}{6}})' = 2 \cdot \frac{5}{6}(2x+5)^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{3}(2x+5)^{-\frac{1}{6}}$$

Степенные функции.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{5}{2}}$$

на отрезке: а) [1;16] б) (2,10) в) на луче [9;+∞)

Решение.

Показатель степени нашей функции положительный, тогда посмотрев на свойства нашей функции мы видим, что она возрастает на всей области определения, а это значит, что достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах заданных отрезков (если она определена в этих точках)

а) $y_{\text{наим.}} = 1^{\frac{5}{2}} = 1; y_{\text{наиб.}} = 16^{\frac{5}{2}} = \sqrt{16^5} = (\sqrt{16})^5 = 4^5 = 1024$

б) Наибольшего и наименьшего значения функции на этом промежутке нет, так как нам дан открытый промежуток, и точки 0 и 4 этому промежутку не принадлежат.

в)Наибольшьего значения нет. $y_{\text{наим.}} = 9^{\frac{5}{2}} = \sqrt{9^5} = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$

Степенные функции.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{16}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4$$

на отрезке [1;9].

Решение.

Ребята, вы помните как мы находили наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке в 10 классе? Правильно, мы использовали производную, давайте решим наш пример, заодно и повторим алгоритм поиска наименьшего и наибольшего значения.

1. Найдем производную заданной функции:

2. Производная сущ $y' = \frac{16}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8\sqrt{x^3} - x^3$ **деления исходной функции, тогда критических точек нет.**

Найдем стационарные точки:

$$y' = 8\sqrt{x^3} - x^3 = 0$$

$8\sqrt{x^3} = x^3$ ном $64x^3 = x^6$ прин $x^6 - 64x^3 = 0$ ькс $x^3(x^3 - 64) = 0$ е $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{64} = 4$

Построим таблицу значений нашей функции на концах о $x_2 = 4$ а и в точке экстремума:

x	1	4	9
y	2.95	38.4	-862.65

Ответ:

$$y_{наим.} = -862.65\ (\textit{при}\ x = 9);\ y_{наиб.} = 38.4\ (\textit{при}\ x = 4)$$

Степенные функции.

Пример. Решить уравнение

$$x^{\frac{4}{3}} = 24 - x$$

Решение.

График функции – $y = x^{\frac{4}{3}}$**астает**, а график функции y=24-x **убывает**, ребята мы с вами знаем, **если одна функция возрастает, а другая убывает, то они пересекаются только в одной точке**, то есть у нас с вами только одно решение.

Заметим:

$$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$$

$$24 - 8 = 16$$

То есть при x=8 мы получили верное равенство 16=16, это и есть решение нашего уравнения.

Ответ: x=8.

Степенные функции.

Пример.

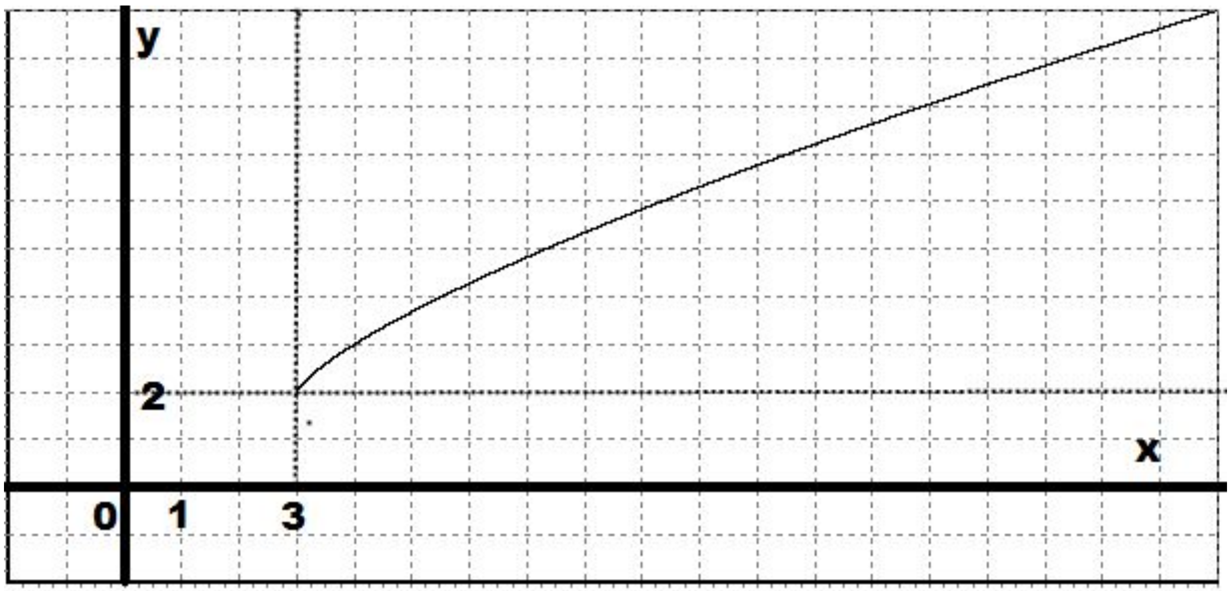
Построить график функции: $y = (x-3)^{\frac{3}{4}} + 2$

Решение.

График нашей функции получается из графика функции

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

смещением его на 3 единицы вправо и 2 единицы вверх.



Степенные функции.

Пример. Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{4}{5}}$$

в точке x=1.

Решение. Уравнение касательной определяется известной нам формулой:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

В нашем случае a=1.

$$f(a) = f(1) = 1^{-\frac{4}{5}} = 1$$

Найдем производную:

$$y' = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}$$

Вычислим:

$$f'(a) = -\frac{4}{5}\cdot 1^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}$$

Найдем уравнение касательной:

$$y = 1 - \frac{4}{5}(x-1) = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$$

Ответ: $y = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$

Степенные функции.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ на отрезке:

а) [1;8] б) (4,50) в) на луче [27;+∞)

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x$$

на отрезке [1;27].

3. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{4}} = 18 - x$$

4. Построить график фvнкции:

$$y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - 1$$

5. Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{3}{7}}$$

в точке x=1.