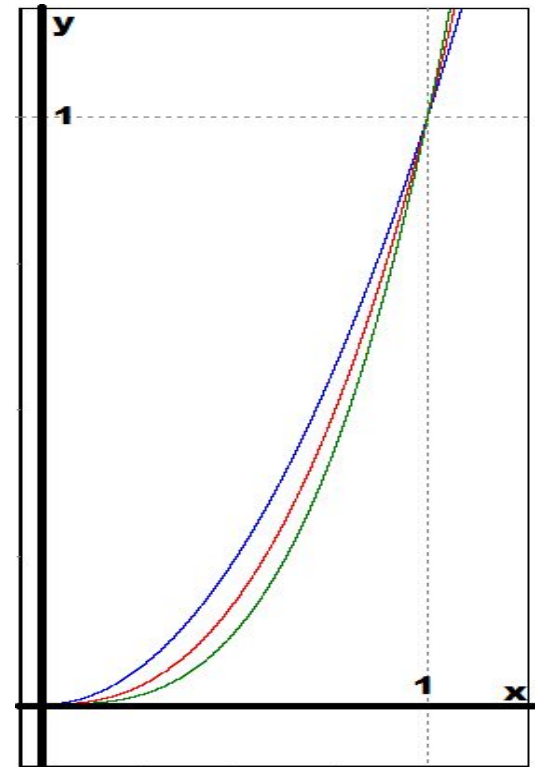


АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ,
СВОЙСТВА, ГРАФИКИ.



Степенные функции.

Ребята, на прошлом уроке мы узнали, как работать с числами с рациональным показателем степени.

На этом уроке мы рассмотрим степенные функции и ограничимся случаем, когда показатель степени рациональный.

Мы будем рассматривать функции вида:

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

Рассмотрим сначала функции, у которых показатель степени больше одного.

$$\frac{m}{n} > 1$$

Степенные функции.

Пусть нам дана конкретная функция $y = x^{2.5}$

Согласно определению, которое мы дали на прошлом уроке $x \geq 0$, то есть область определения нашей функции луч $[0; +\infty)$.

Таблица значений.

x	0	1	4
y	0	1	32

Давайте, сравним три степенных функции

$$y = x^2; \quad y = x^{2.5}; \quad y = x^3$$

Число 2,5 лежит между 2 и 3, тогда кажется, что и график нашей функции будет лежать между соответствующими графиками, сравним значения функций при различных x .

1. Если $0 < x < 1$, то $x^6 < x^5 < x^4$ няется
или $x^3 < x^{2.5} < x^2$

$$\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4}$$

2. Если $x > 1$, то $x^4 < x^5 < x^6$ лняется
или $x^2 < x^{2.5} < x^3$

$$\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6}$$

Степенные функции.

Давайте построим все три графика на одном рисунке:

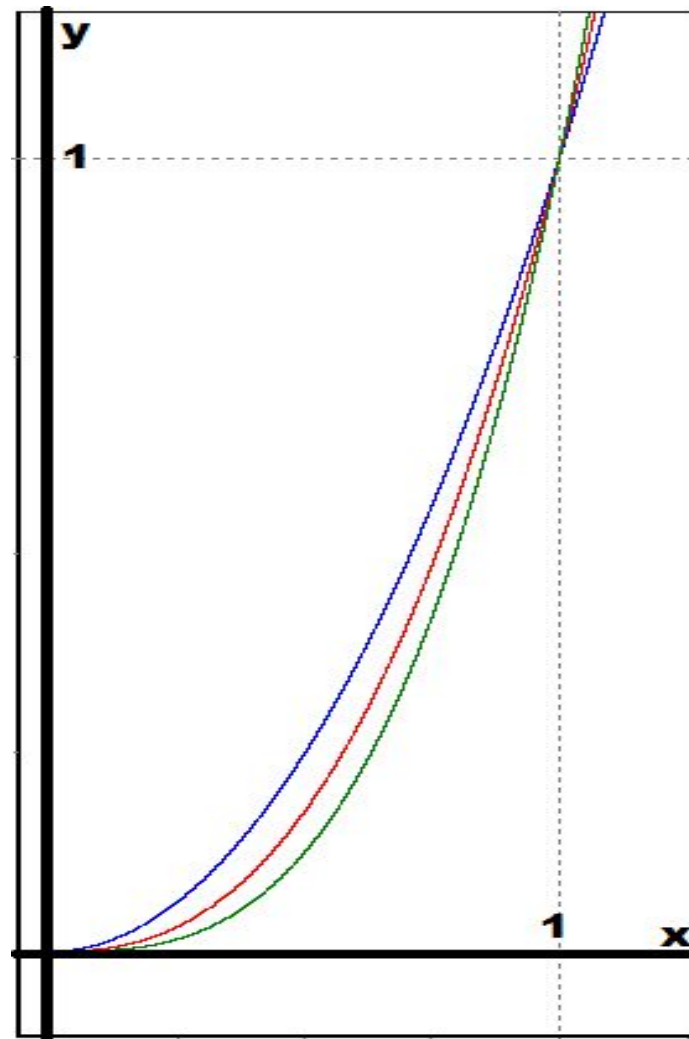
На первом рисунке построим графики для случая $0 < x < 1$

На нашем графике показаны функции

Синим $y = x^2$

Красным $y = x^{2.5}$

Зеленым $y = x^3$



Степенные функции.

Теперь построим графики на всей области определения функции

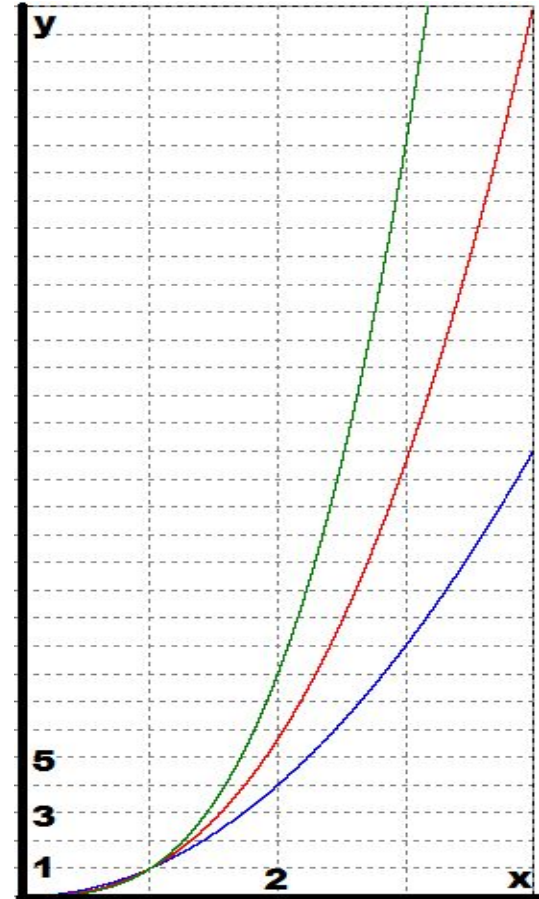
$$y = x^{2.5}$$

Цвет графиков такой же как и на предыдущем рисунке.

График функции

$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad (m > n)$$

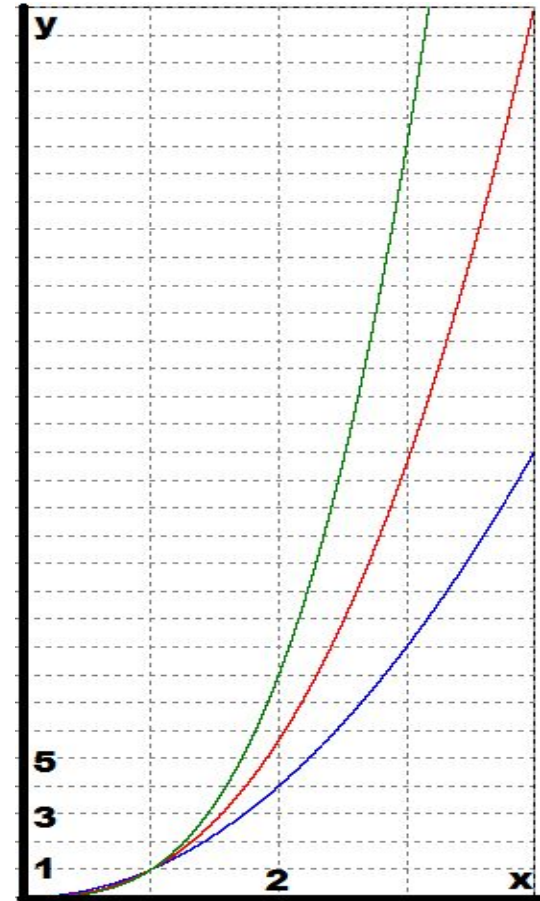
– *кривая, проходящая через точки (0,0) и (1,1) и похожая на ветвь параболы.* Чем больше показатель, тем круче вверх уходит график функции.



Степенные функции.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($m > n$)

1. $D(y)=[0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на $[0;+\infty)$.
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. $E(f)=[0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



Степенные функции.

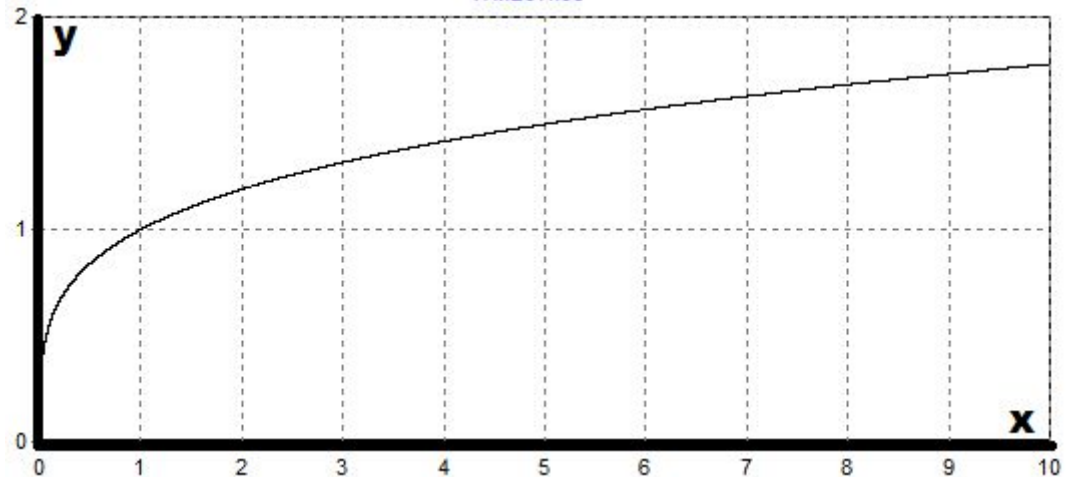
Перейдем к случаю *показателя степени правильная дробь (то есть когда числитель меньше знаменателя)*.

График функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($m < n$)^с на график функции
Давайте схематично изобразим наш график функции.

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Свойства функции :

1. $D(y)=[0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на $[0;+\infty)$.
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. $E(f)=[0; +\infty)$.
8. Выпукла вверх.



Степенные функции.

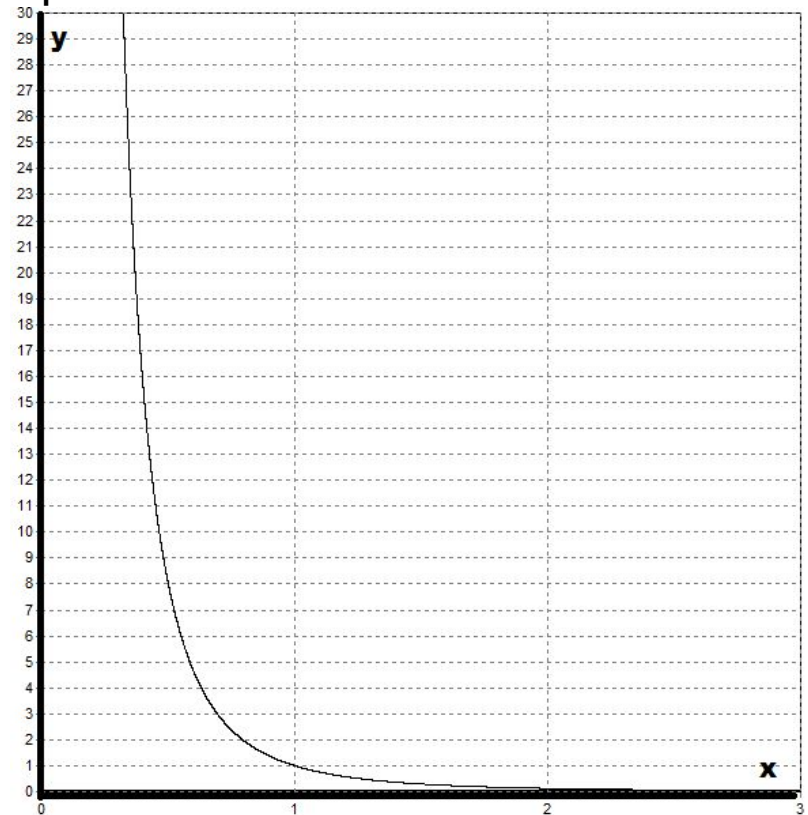
Нам осталось рассмотреть график функции

$$y = x^{-\frac{m}{n}}$$

Не трудно догадаться, что *наш график будет иметь схожий вид с гиперболой*. График имеет две асимптоты: горизонтальную $y=0$ и вертикальную $x=0$. Давайте схематично изобразим наш график:

Свойства функции :

1. $D(y)=(0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Убывает на $(0;+\infty)$.
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7. $E(f)=(0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



Степенные функции.

Ребята, мы с вами забыли одно очень важное свойство – **дифференцируемость функции**. Чему равна производная степенной функции с рациональным показателем?

Определение. Если $x > 0$ и r – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ **вычисляется по формуле:**

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

Например:

$$(x^{1000})' = 1000x^{999}; (x^{-8})' = -8x^{-9}; (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\sqrt[6]{(2x+5)^5}\right)' = \left((2x+5)^{\frac{5}{6}}\right)' = 2 \cdot \frac{5}{6}(2x+5)^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{3}(2x+5)^{-\frac{1}{6}}$$

Степенные функции.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{5}{2}}$$

на отрезке: а) $[1;16]$ б) $(2,10)$ в) на луче $[9;+\infty)$

Решение.

Показатель степени нашей функции положительный, тогда посмотрев на свойства нашей функции мы видим, что она возрастает на всей области определения, а это значит, что достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах заданных отрезков (если она определена в этих точках)

а)
$$y_{\text{наим.}} = 1^{\frac{5}{2}} = 1; y_{\text{наиб.}} = 16^{\frac{5}{2}} = \sqrt{16^5} = (\sqrt{16})^5 = 4^5 = 1024$$

б) Наибольшего и наименьшего значения функции на этом промежутке нет, так как нам дан открытый промежуток, и точки 0 и 4 этому промежутку не принадлежат.

в) Наибольшего значения нет.
$$y_{\text{наим.}} = 9^{\frac{5}{2}} = \sqrt{9^5} = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$$

Степенные функции.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{16}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4$$

на отрезке $[1;9]$.

Решение.

Ребята, вы помните как мы находили наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке в 10 классе? Правильно, мы использовали производную, давайте решим наш пример, заодно и повторим алгоритм поиска наименьшего и наибольшего значения.

1. Найдем производную заданной функции:

2. Производная существует $y' = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8\sqrt{x^3} - x^3$ **деления исходной функции, тогда критических точек нет.**

Найдем стационарные точки:

$$y' = 8\sqrt{x^3} - x^3 = 0$$

$$8\sqrt{x^3} = x^3 \text{ умножим на } \sqrt{x^3} \text{ получим } 64x^3 = x^6 \text{ при } x^6 - 64x^3 = 0 \text{ вынесем } x^3(x^3 - 64) = 0 \text{ где } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = \sqrt[3]{64} = 4$$

Построим таблицу значений нашей функции на концах отрезка $[1;9]$ и в точке экстремума:

x	1	4	9
y	2.95	38.4	-862.65

Ответ:

$$y_{\text{наим.}} = -862.65 \text{ (при } x = 9); y_{\text{наиб.}} = 38.4 \text{ (при } x = 4)$$

Степенные функции.

Пример. Решить уравнение

$$x^{\frac{4}{3}} = 24 - x$$

Решение.

График функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ **растет**, а график функции $y = 24 - x$ **убывает**, ребята мы с вами знаем, **если одна функция возрастает, а другая убывает, то они пересекаются только в одной точке**, то есть у нас с вами только одно решение.

Заметим:

$$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$$
$$24 - 8 = 16$$

То есть при $x=8$ мы получили верное равенство $16=16$, это и есть решение нашего уравнения.

Ответ: $x=8$.

Степенные функции.

Пример.

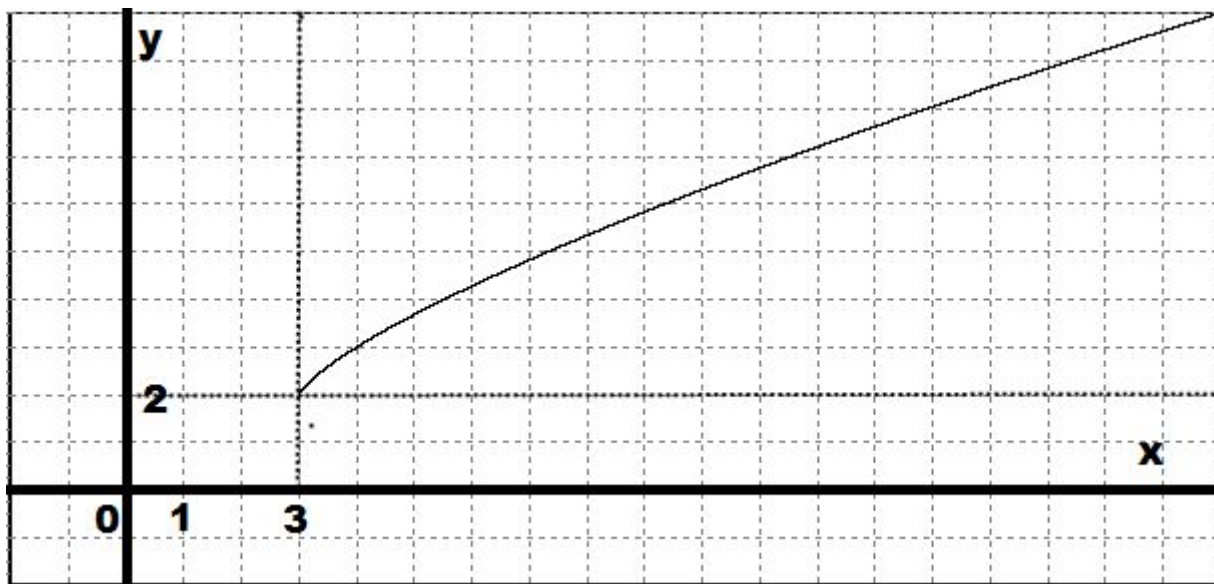
Построить график функции: $y = (x - 3)^{\frac{3}{4}} + 2$

Решение.

График нашей функции получается из графика функции

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

смещением его на 3 единицы вправо и 2 единицы вверх.



Степенные функции.

Пример. Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{4}{5}}$$

в точке $x=1$.

Решение. Уравнение касательной определяется известной нам формулой:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

В нашем случае $a=1$.

$$f(a) = f(1) = 1^{-\frac{4}{5}} = 1$$

Найдем производную:

$$y' = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}$$

Вычислим:

$$f'(a) = -\frac{4}{5} \cdot 1^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}$$

Найдем уравнение касательной:

$$y = 1 - \frac{4}{5}(x - 1) = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$$

Ответ: $y = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$

Степенные функции.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ на отрезке:

а) $[1;8]$ б) $(4,50)$ в) на луче $[27;+\infty)$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x$$

на отрезке $[1;27]$.

3. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{4}} = 18 - x$$

4. Построить график функции:

$$y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - 1$$

5. Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{3}{7}}$$

в точке $x=1$.