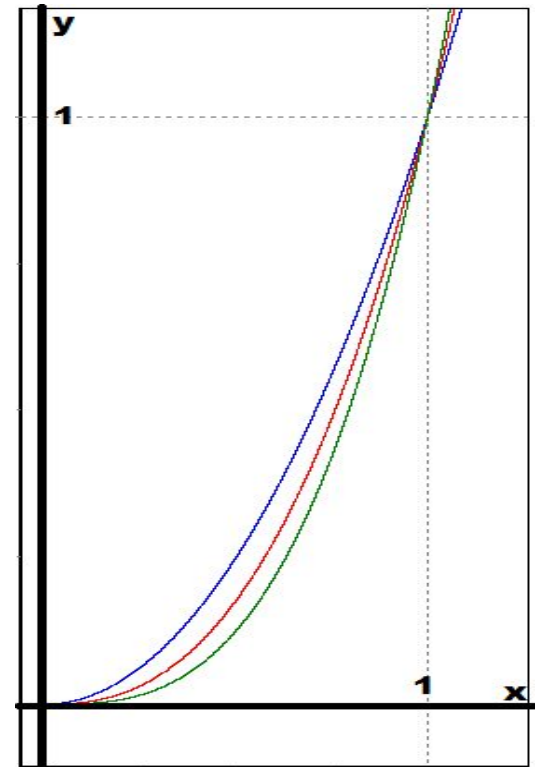


# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:  
СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ,  
СВОЙСТВА, ГРАФИКИ.



# Степенные функции.

Ребята, на прошлом уроке мы узнали, как работать с числами с рациональным показателем степени.

На этом уроке мы рассмотрим степенные функции и ограничимся случаем, когда показатель степени рациональный.

Мы будем рассматривать функции вида:

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

Рассмотрим сначала функции, у которых показатель степени больше одного.

$$\frac{m}{n} > 1$$

# Степенные функции.

Пусть нам дана конкретная функция  $y = x^{2.5}$

Согласно определению, которое мы дали на прошлом уроке  $x \geq 0$ , то есть область определения нашей функции луч  $[0; +\infty)$ .

Таблица значений.

x	0	1	4
y	0	1	32

Давайте, сравним три степенных функции

$$y = x^2; \quad y = x^{2.5}; \quad y = x^3$$

Число 2,5 лежит между 2 и 3, тогда кажется, что и график нашей функции будет лежать между соответствующими графиками, сравним значения функций при различных  $x$ .

1. Если  $0 < x < 1$ , то  $x^6 < x^5 < x^4$  няется  
или  $x^3 < x^{2.5} < x^2$

$$\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4}$$

2. Если  $x > 1$ , то  $x^4 < x^5 < x^6$  лняется  
или  $x^2 < x^{2.5} < x^3$

$$\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6}$$

# Степенные функции.

Давайте построим все три графика на одном рисунке:

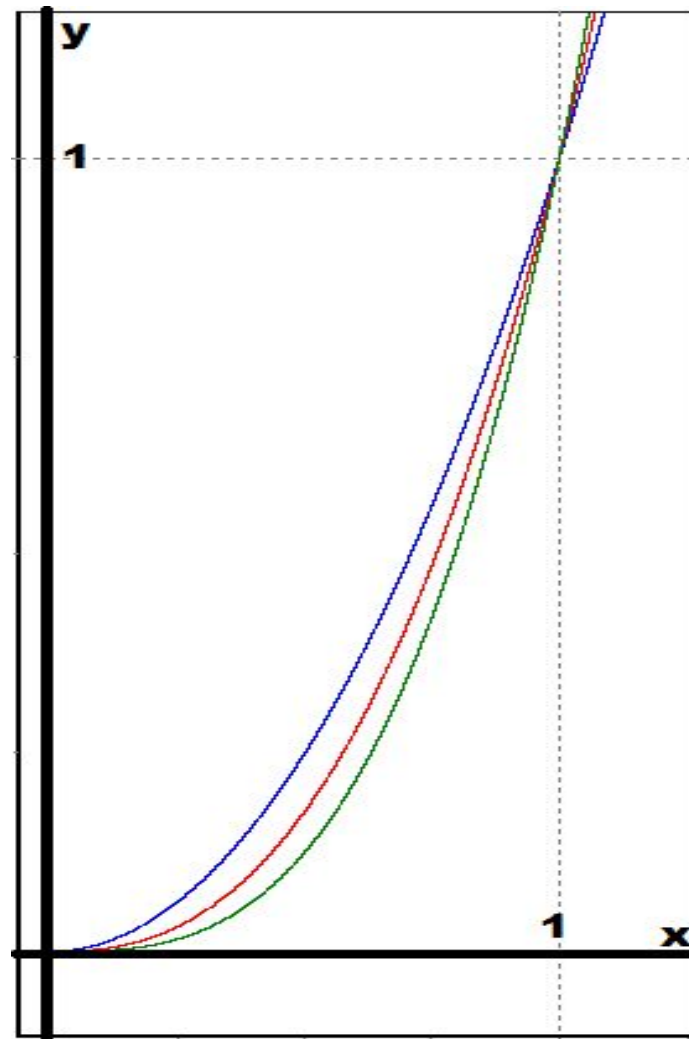
На первом рисунке построим графики для случая  $0 < x < 1$

На нашем графике показаны функции

**Синим**  $y = x^2$

**Красным**  $y = x^{2.5}$

**Зеленым**  $y = x^3$



# Степенные функции.

Теперь построим графики на всей области определения функции

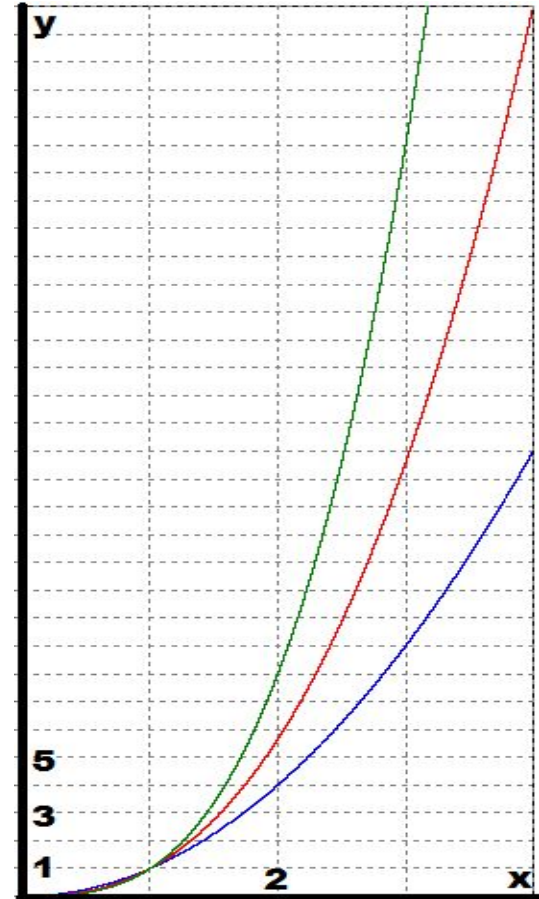
$$y = x^{2.5}$$

Цвет графиков такой же как и на предыдущем рисунке.

График функции

$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad (m > n)$$

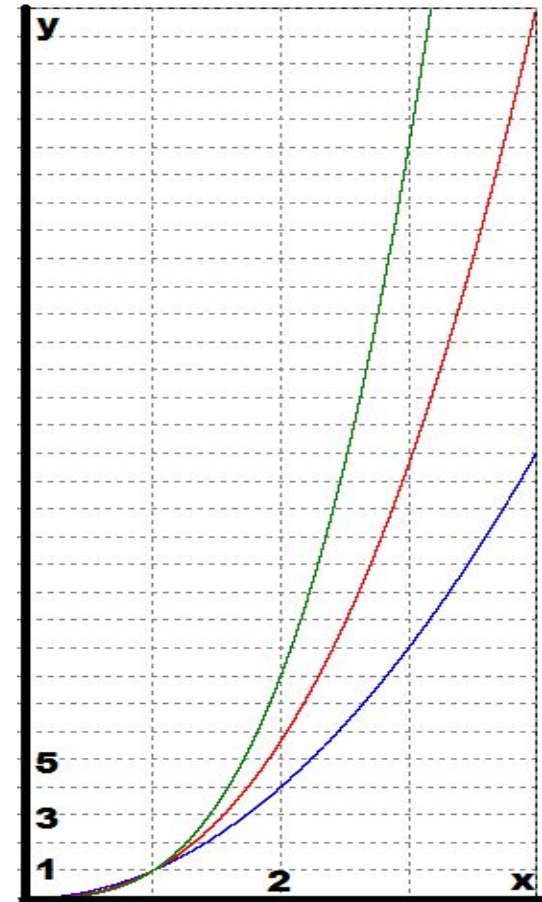
– *кривая, проходящая через точки (0,0) и (1,1) и похожая на ветвь параболы.* Чем больше показатель, тем круче вверх уходит график функции.



# Степенные функции.

Свойства функции  $y = x^{\frac{m}{n}}$  ( $m > n$ )

1.  $D(y)=[0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на  $[0;+\infty)$ .
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7.  $E(f)=[0; +\infty)$ .
8. Выпукла вниз.



# Степенные функции.

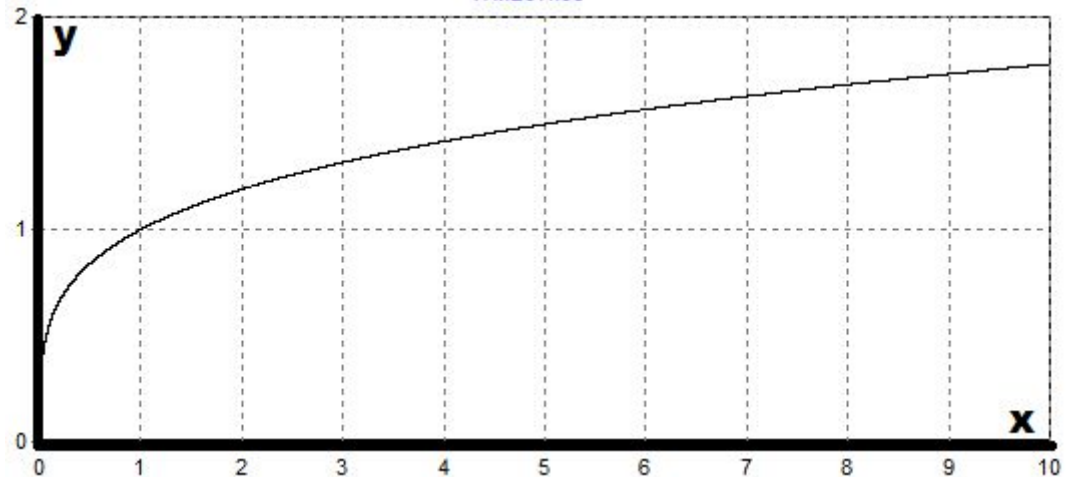
Перейдем к случаю *показателя степени правильная дробь (то есть когда числитель меньше знаменателя)*.

График функции  $y = x^{\frac{m}{n}}$  ( $m < n$ )<sup>с</sup> на график функции  
Давайте схематично изобразим наш график функции.

$$y = \sqrt[n]{x}$$

## Свойства функции :

1.  $D(y)=[0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Возрастает на  $[0;+\infty)$ .
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7.  $E(f)=[0; +\infty)$ .
8. Выпукла вверх.



# Степенные функции.

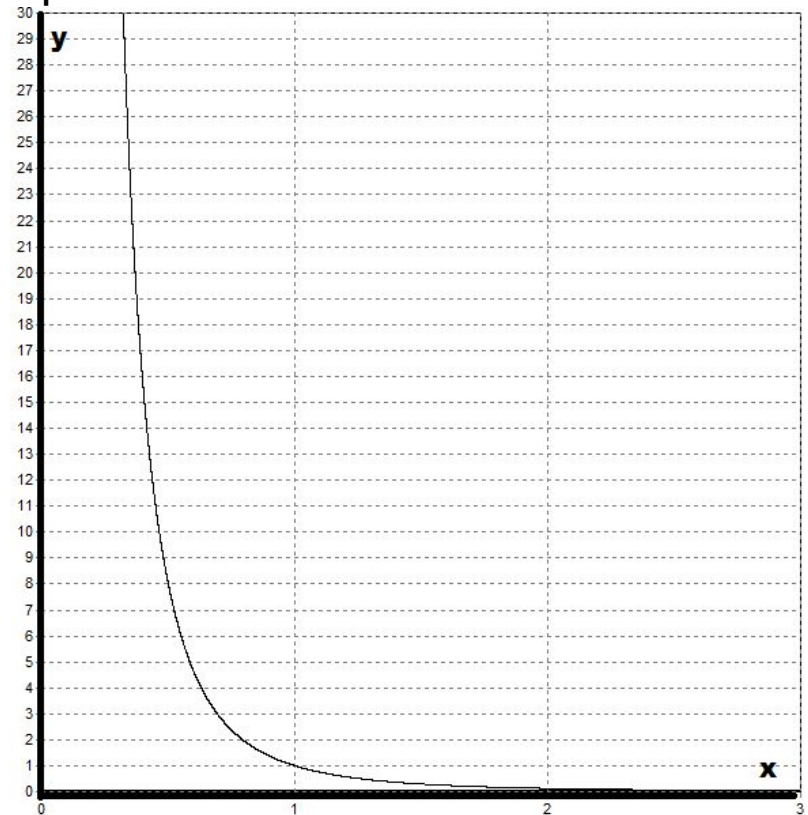
Нам осталось рассмотреть график функции

$$y = x^{-\frac{m}{n}}$$

Не трудно догадаться, что *наш график будет иметь схожий вид с гиперболой*. График имеет две асимптоты: горизонтальную  $y=0$  и вертикальную  $x=0$ . Давайте схематично изобразим наш график:

## Свойства функции :

1.  $D(y)=(0;+\infty)$
2. Не является ни четной, ни нечетной.
3. Убывает на  $(0;+\infty)$ .
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение равно нулю.
6. Непрерывна.
7.  $E(f)=(0; +\infty)$ .
8. Выпукла вниз.





# Степенные функции.

Ребята, мы с вами забыли одно очень важное свойство – **дифференцируемость функции**. Чему равна производная степенной функции с рациональным показателем?

**Определение.** Если  $x > 0$  и  $r$  – любое рациональное число, то производная степенной функции  $y = x^r$  **вычисляется по формуле:**

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

Например:

$$(x^{1000})' = 1000x^{999}; (x^{-8})' = -8x^{-9}; (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\sqrt[6]{(2x+5)^5}\right)' = \left((2x+5)^{\frac{5}{6}}\right)' = 2 \cdot \frac{5}{6} (2x+5)^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{3} (2x+5)^{-\frac{1}{6}}$$

# Степенные функции.

## Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{5}{2}}$$

на отрезке: а)  $[1;16]$  б)  $(2,10)$  в) на луче  $[9;+\infty)$

## Решение.

Показатель степени нашей функции положительный, тогда посмотрев на свойства нашей функции мы видим, что она возрастает на всей области определения, а это значит, что достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах заданных отрезков (если она определена в этих точках)

а)  $y_{\text{наим.}} = 1^{\frac{5}{2}} = 1; y_{\text{наиб.}} = 16^{\frac{5}{2}} = \sqrt{16^5} = (\sqrt{16})^5 = 4^5 = 1024$

б) Наибольшего и наименьшего значения функции на этом промежутке нет, так как нам дан открытый промежуток, и точки 0 и 4 этому промежутку не принадлежат.

в) Наибольшего значения нет.  $y_{\text{наим.}} = 9^{\frac{5}{2}} = \sqrt{9^5} = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$

# Степенные функции.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{16}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4$$

на отрезке  $[1;9]$ .

**Решение.**

Ребята, вы помните как мы находили наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке в 10 классе? Правильно, мы использовали производную, давайте решим наш пример, заодно и повторим алгоритм поиска наименьшего и наибольшего значения.

**1. Найдем производную заданной функции:**

**2. Производная существует  $y' = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8x^{\frac{3}{2}} - x^3 = 8\sqrt{x^3} - x^3$  деления исходной функции, тогда критических точек нет.**

**Найдем стационарные точки:**

$$y' = 8\sqrt{x^3} - x^3 = 0$$
$$8\sqrt{x^3} = x^3 \text{ умножим на } \sqrt{x^3} \text{ получим } 64x^3 = x^6 \text{ при } x^6 - 64x^3 = 0 \text{ вынесем } x^3(x^3 - 64) = 0 \text{ где } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = \sqrt[3]{64} = 4$$

Построим таблицу значений нашей функции на концах отрезка  $[1;9]$  и в точке экстремума:

x	1	4	9
y	2.95	38.4	-862.65

**Ответ:**

$$y_{\text{наим.}} = -862.65 \text{ (при } x = 9); y_{\text{наиб.}} = 38.4 \text{ (при } x = 4)$$

# Степенные функции.

**Пример.** Решить уравнение

$$x^{\frac{4}{3}} = 24 - x$$

**Решение.**

График функции  $y = x^{\frac{4}{3}}$  **растет**, а график функции  $y = 24 - x$  **убывает**, ребята мы с вами знаем, **если одна функция возрастает, а другая убывает, то они пересекаются только в одной точке**, то есть у нас с вами только одно решение.

Заметим:

$$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$$
$$24 - 8 = 16$$

То есть при  $x=8$  мы получили верное равенство  $16=16$ , это и есть решение нашего уравнения.

**Ответ:**  $x=8$ .

# Степенные функции.

**Пример.**

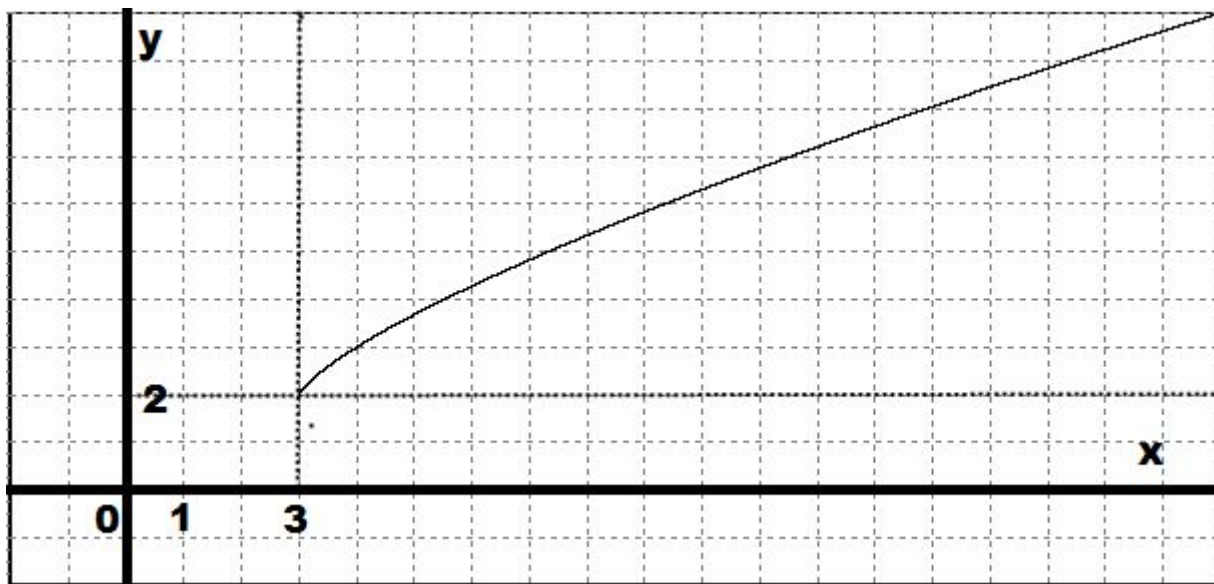
Построить график функции:  $y = (x - 3)^{\frac{3}{4}} + 2$

**Решение.**

График нашей функции получается из графика функции

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

смещением его на 3 единицы вправо и 2 единицы вверх.



# Степенные функции.

**Пример.** Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{4}{5}}$$

в точке  $x=1$ .

**Решение.** Уравнение касательной определяется известной нам формулой:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

В нашем случае  $a=1$ .

$$f(a) = f(1) = 1^{-\frac{4}{5}} = 1$$

Найдем производную:

$$y' = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}$$

Вычислим:

$$f'(a) = -\frac{4}{5} \cdot 1^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}$$

Найдем уравнение касательной:

$$y = 1 - \frac{4}{5}(x - 1) = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$$

**Ответ:**  $y = -\frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$

# Степенные функции.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = x^{\frac{4}{3}}$  на отрезке:

а)  $[1;8]$  б)  $(4,50)$  в) на луче  $[27;+\infty)$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x$$

на отрезке  $[1;27]$ .

3. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{4}} = 18 - x$$

4. Построить график функции:

$$y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - 1$$

5. Составить уравнение касательной к прямой

$$y = x^{-\frac{3}{7}}$$

в точке  $x=1$ .