

Тригонометрические уравнения. Отбор корней.

Алгебра

10 класс

Подготовка к решению заданий

C1

Что необходимо знать для решения тригонометрических уравнений?

- Принципы решения (формулы для решения простейших уравнений).
- Управлять преобразованиями с использованием формул.
- Пользоваться единичной окружностью для отбора корней.

Цель

Научиться объединять умения в одно решение.

Задачи

- Закрепить использование формул для решения простейших уравнений.
- Узнавать ситуации для использования формул преобразования.
- Отрабатывать навык отбора корней на единичной окружности.
- Использовать способ ограничений для проверки правильности отбора корней.

Каждому уравнению поставьте в соответствие номер правильного ответа.

А) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

В) $\operatorname{tg} x = -1$

Г) $\operatorname{ctg} x = -1$

1) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

2) $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

3) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

4) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Ответ: 4312

На единичной окружности отметьте точки соответствующие углам, которые обладают следующими свойствами:

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad 2) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 3) \sin \alpha = 0,$$

$$4) \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad 5) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 6) \cos \alpha = 0,$$

$$7) \operatorname{tg} \alpha = 1, \quad 8) \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad 9) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнение 1. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Решение.

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0;$$

$$2\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0;$$

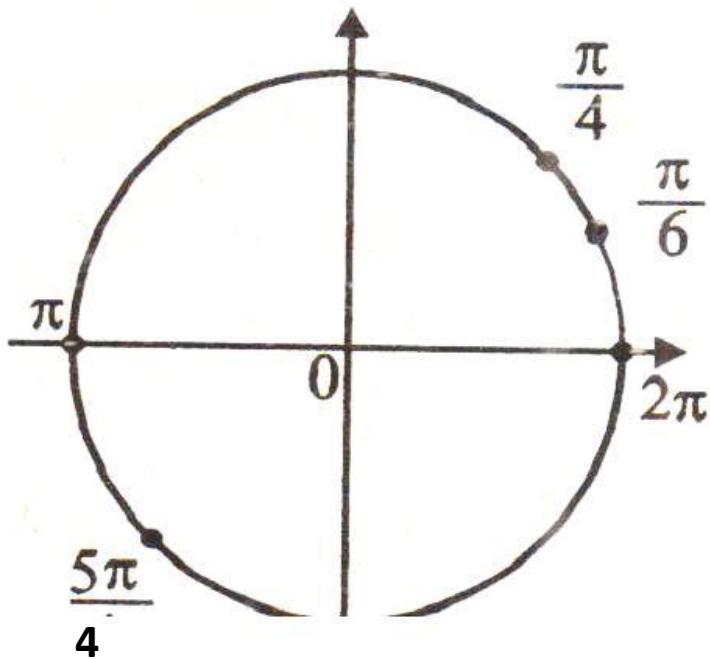
$$\sin x (\cos x - \sin x) = 0;$$

$$1) \sin x = 0; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin x = \cos x; \operatorname{tg} x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

$$\frac{\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; 2\pi$$



Проверим отбор корней с помощью ограничений.

$$1) x = \pi k, k \in \mathbf{Z}: \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq 2\pi; \frac{1}{6} \leq k \leq 2; k=1, k=2;$$

$$x_1 = \pi; x_2 = 2\pi.$$

$$2) x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}: \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 2\pi; \frac{1}{6} \leq \frac{1}{4} + n \leq 2;$$

$$-\frac{1}{12} \leq n \leq 1\frac{3}{4}; n=0, n=1;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4}; x_4 = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = \pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; 2\pi$$

Упражнение 2. Решите уравнение $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

$$\begin{aligned}\text{Упростим } \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - \\ &2\sin^2 x \cos x = (2\cos^2 x - 1) \cos x - \\ &2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Получим уравнение: $4\cos^3 x - 3\cos x = -2\cos x$,

$$\cos x (4\cos^2 x - 1) = 0,$$

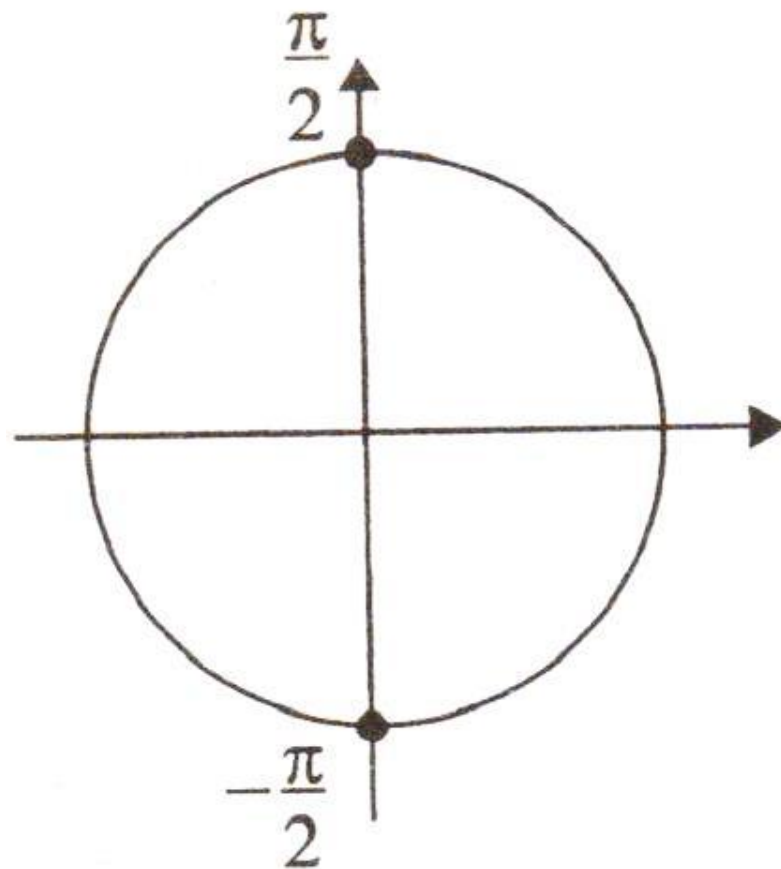
$$\cos x = 0 \text{ или } \cos^2 x = \frac{1}{4}; \left(\cos x = \pm \frac{1}{2}\right)$$

$$1) \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

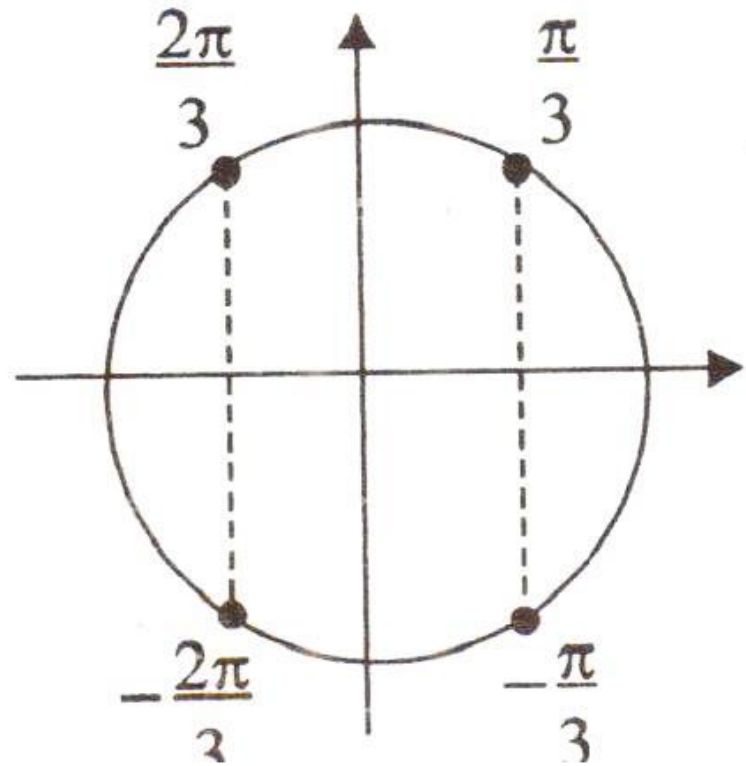
1) $\cos x = 0;$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$

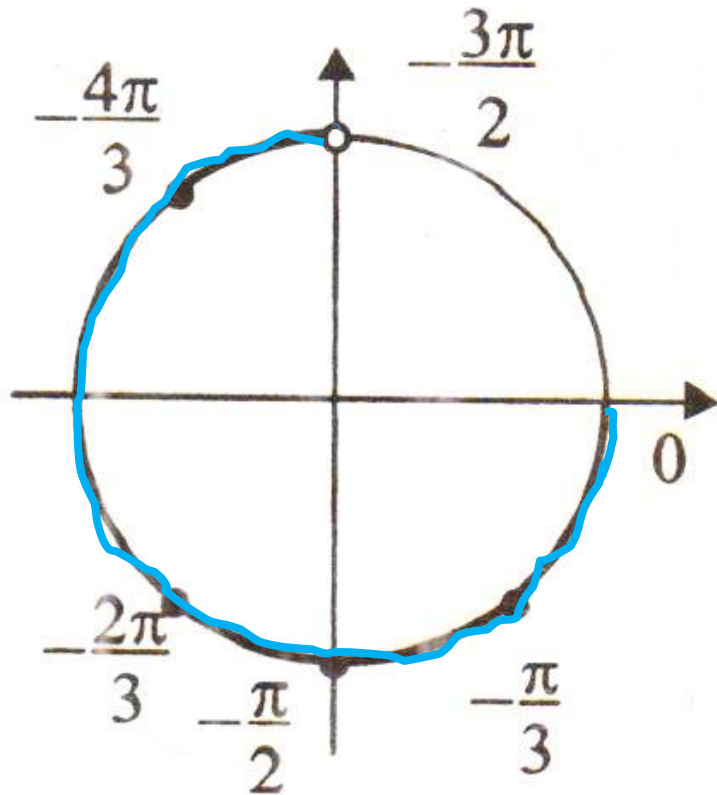


$$2) \cos x = \pm \frac{1}{2};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Отбор корней с помощью окружности



Ответ:

$$-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}.$$

Самостоятельное решение

Решите уравнение:

$$\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x).$$

Домашнее задание

- №21.29, с.61
- Определите некоторые промежутки, на которых решённые уравнения не имеют корней.