Решение неравенств

9 класс

Метод интервалов

- введение функции, отвечающей левой части неравенства, в нашем случае – *линейной функции* $y=a\cdot x+b$,
- нахождение ее нулей, которые разбивают область определения на промежутки,
- определение знаков, которые имеют значения функции на этих промежутках, на основе которых делается вывод о решении линейного неравенства.

Алгоритм решения $a \cdot x+b<0$ (≤, >, ≥) при $a \neq 0$

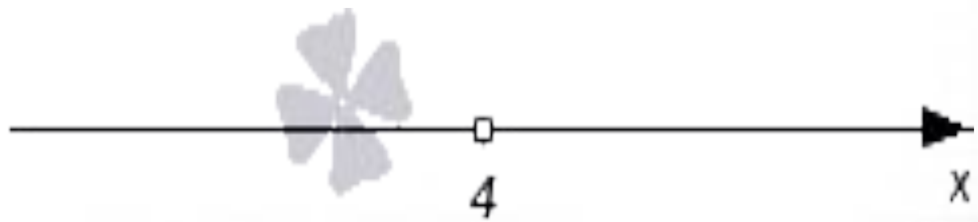
1. Находятся нули функции $y=a \cdot x+b$, для чего решается <u>линейное уравнение</u>$a \cdot x+b=0$. Как известно, при $a \neq 0$ оно имеет единственный корень, который обозначим x_0.
2. Строится <u>координатная прямая</u>, и на ней изображается точка с координатой x_0. Причем, если решается строгое неравенство (со знаком < или >), то эту точку делают выколотой (с пустым центром), а если нестрогое (со знаком ≤ или ≥), то ставят обычную точку. Эта точка разбивает координатную прямую на два промежутка $(-\infty, x_0)$ и $(x_0, +\infty)$.

3. Определяются знаки функции $y=a\cdot x+b$ на этих промежутках. Для этого вычисляется значение этой функции в любой точке промежутка $(-\infty, x_0)$, и знак этого значения и будет искомым знаком на промежутке $(-\infty, x_0)$. Аналогично, знак на промежутке $(x_0, +\infty)$ совпадает со знаком значения функции $y=a\cdot x+b$ в любой точке этого промежутка. Но можно обойтись без этих вычислений, а выводы о знаках сделать по значению коэффициента a: если $a>0$, то на промежутках $(-\infty, x_0)$ и $(x_0, +\infty)$ будут знаки − и + соответственно, а если $a>0$, то + и −.

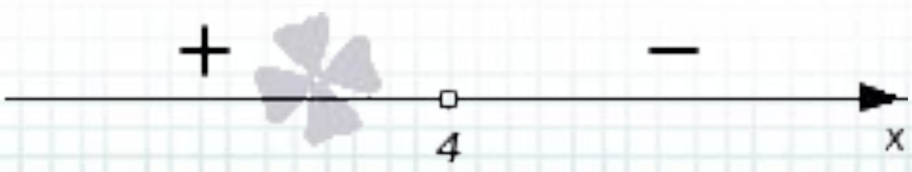
4. Если решается неравенство со знаками > или ≥, то ставится штриховка над промежутком со знаком плюс, а если решаются неравенства со знаками < или ≤, то – со знаком минус. В результате получается <u>геометрическое изображение числового множества</u>, которое и является искомым решением линейного неравенства

Решите неравенство $-3\cdot x+12>0$.

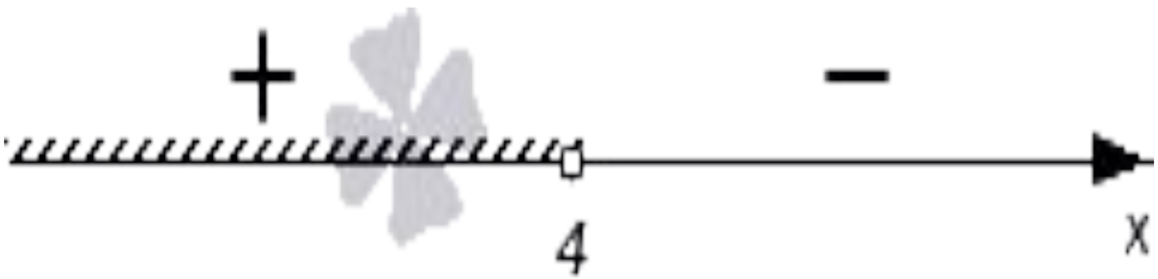
1. Согласно алгоритму, сначала находим корень уравнения $-3\cdot x+12=0$, $-3\cdot x=-12$, $x=4$. Дальше изображаем координатную прямую и отмечаем на ней точку с координатой 4, причем эту точку делаем выколотой, так как решаем строгое неравенство:



3. Теперь определяем знаки на промежутках. Для определения знака на промежутке *(−∞, 4)* можно вычислить значение функции $y=-3\cdot x+12$, например, при $x=3$. Имеем $-3\cdot 3+12=3>0$, значит, на этом промежутке знак +. Для определения знака на другом промежутке *(4, +∞)* можно вычислить значение функции $y=-3\cdot x+12$, к примеру, в точке $x=5$. Имеем $-3\cdot 5+12=-3<0$, значит, на этом промежутке знак −. Эти же выводы можно было сделать на основании значения коэффициента при x: так как он равен -3, то есть, он отрицательный, то на промежутке *(−∞, 4)* будет знак +, а на промежутке *(4, +∞)* знак −. Проставляем определенные знаки над соответствующими промежутками:



- Так как мы решаем неравенство со знаком >, то изображаем штриховку над промежутком со знаком +, чертеж принимает вид



По полученному изображению делаем вывод, что искомым решением является $(-\infty, 4)$ или в другой записи $x<4$.

Ответ $(-\infty, 4)$ или $x<4$.

Тест

1. Какие из чисел –0,5; –1; 1 и 0,5 являются решением неравенства $-3x - 4 > x - 1$?

а) 0,5; 1; б) –1; –0,5; в) -1; г) –0,5; 1; 0,5.

3. Известно, что $a > b$, какое из следующих неравенств неверно?

а) $a + 5 > b + 5$; в) $a - 5 < b - 5$;

б) $-5a < -5b$; г) $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$

3. Решите неравенство.

$$X - \frac{2x+1}{4} \geq \frac{4x-3}{3}$$

а) (–∞; 1,5]; в) [–1,5; +∞);

б) [–0,9; +∞); г) (–∞; 0,9].

4. При каких значениях *m* имеет смысл выражение ?

$$\sqrt{\frac{5}{0,8-3m}}$$

а) $\left(3\frac{3}{4};\ +\infty\right)$ в) $\left(-\infty;\ \frac{4}{15}\right)$

б) $\left(\frac{4}{15};\ +\infty\right)$ г) $\left[\frac{4}{15};\ +\infty\right)$

Проверка

1. в

2. а,б,г

3. г

4. в

Повторим. Пример №1:

Найти значение алгебраической дроби: $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$

если: а) a=2, b=1; б) a=5, b=0; в) a=4, b=4.

Решение:

в) a=4, b=4: $a-b=0;$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{\underline{(a+b)(a-b)=0}}$$

На 0 делить нельзя!

Переменные, входящие в состав алгебраической дроби, принимают лишь допустимые значения, т.е. такие значения, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль

Алгоритм нахождения допустимых значений дроби:

1. Находят значение переменной, при которых знаменатель дроби обращается в нуль.
2. Затем исключают эти значения из множества всех чисел.

Установите, при каких значениях переменной не имеет смысла дробь:

$$\frac{a-5}{a+5};$$

Решение

$$\frac{a-5}{a+5}$$

при a = – 5 знаменатель обращается в 0, значит недопустимое значение a = – 5.

Ответ: при a = – 5

Установите, при каких значениях переменной имеет смысл дробь:

а) $\dfrac{x-4}{x+2}$,

при $x \neq -2$;

б) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$,

при $x \neq 0$;

в) $\dfrac{2x+6}{x-2}$,

при $x \neq 2$;

г) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$,

x – любое число;

Установите, при каких значениях переменной имеет смысл дробь:

$$\frac{t^2+4t-1}{(3t-2)(3t+2)};$$

Решение

$(3t-2)(3t+2)=0,$

$(3t-2)=0$ или $(3t+2)=0,$

$3t=2$ $\qquad$ $3t=-2,$

$t=\frac{2}{3}$ или $t=-\frac{2}{3}$

Ответ: $t\neq\frac{2}{3}, t\neq-\frac{2}{3},$

Решение систем неравенств