ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ: «КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Работу выполнил студент группы
РА 15-1
Кожок Вадим

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

разобрать существующие методы решения квадратных уравнений, провести анализ решения квадратных уравнений разными возрастами, создать шпаргалку по различным методам решения квадратных уравнений.

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

- познакомиться с литературой по данной теме;
- сформулировать все определения, используемые при решении данной задачи;
- изучить всевозможные способы решения квадратных уравнений, выявить плюсы и минусы;
- принять участие в проводимом исследовании решения квадратных уравнений:
- подготовить компьютерную презентацию результатов работы.

ЗНАЧИМОСТЬ ПРОЕКТА

Значимость: «Если я сделаю запланированное, то приобрету дополнительные знания, которыми смогу пользоваться на экзамене и в дальнейшей жизни; студенты получат листовки-шпаргалки с формулами по которым решаются квадратные уравнения не стандартными методами».

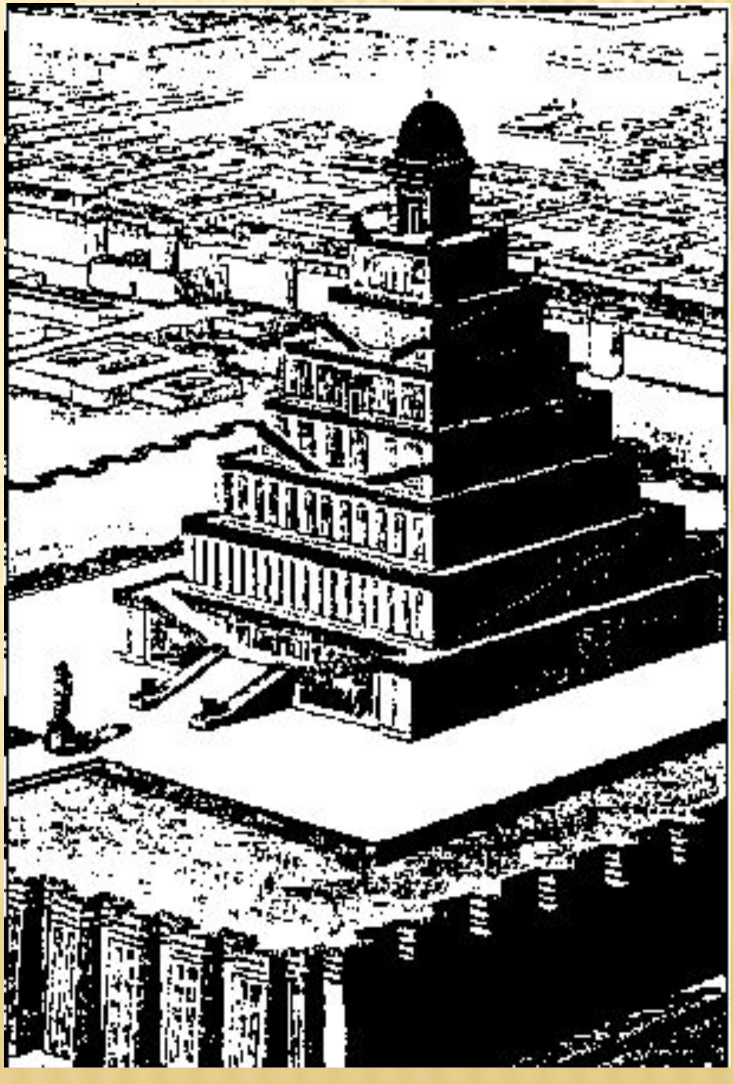
ПЛАН РАБОТЫ:

1. Определить источники информации;
2. Определить способы сбора и анализа информации;
3. Определить способы представления результатов;
4. Выработать критерии оценки результатов и процесса работы.

ИСТОРИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне
2.Квадратные уравнения в Индии
3.Квадратные уравнения у Аль-Хорезми
4.Квадратные уравнения в Европе XII-XVII в
5.Способы решения квадратных уравнений

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

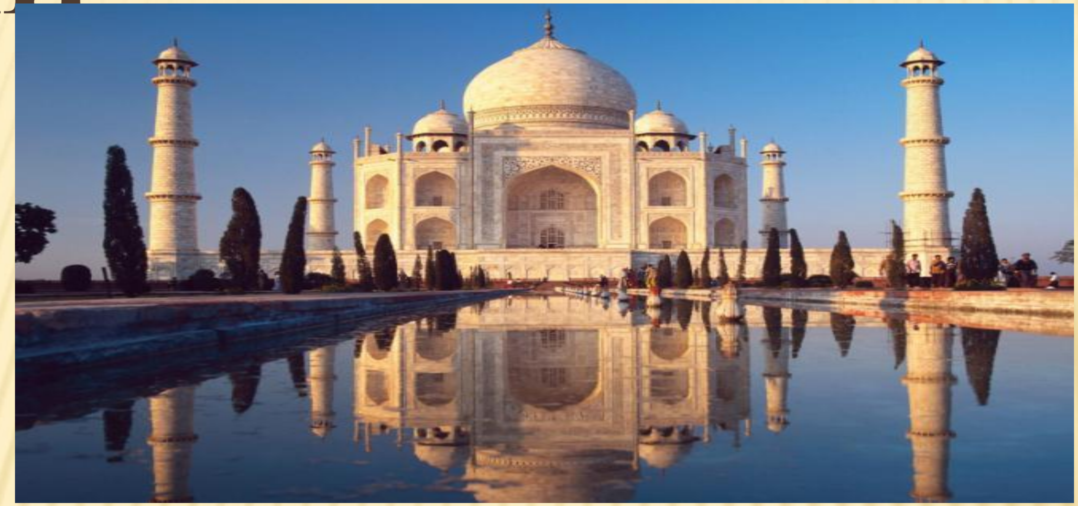


Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения: $x^2 - x = 14\frac{1}{2}$.

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИНДИИ



Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$ax^2 + bx = c$, a>

В уравнении коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ У АЛЬ-ХОРЕЗМИ

Для Аль-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида Аль-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Приведем пример.

Задача 4. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.[3,75]

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕВРОПЕ XII-XVII В

Формы решения квадратных уравнений по образцу Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202г. итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Эта книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из этой книги переходили почти во все европейские учебники XIV-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2 + bx = c$ при всевозможных комбинациях знаков и коэффициентов b, c, было сформулировано в Европе в 1544 г. М. Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЛЕВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$(x + 12)(x - 2) = 0$

Произведение множителей равно нулю, если по крайней мере, один из его множителей равен нулю.

$x + 12= 0$ *или* $x – 2=0$

$x=-12$ $x=2$

Ответ: -12; 2.

Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат:

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$

тогда, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0,$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

$$x + 3 = 4 \quad \text{или} \quad x + 3 = -4$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_2 = -7$$

Ответ: 1; -7.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛАМ.

Умножим обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ на 4а, тогда

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

1. Таким образом, в случае положительного дискриминанта, т.е. при $b^2 - 4ac > 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

2. Если дискриминант равен нулю, т.е. $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет один корень .

3. Если дискриминант отрицателен, т.е. $b^2 - 4ac < 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Формула (1) корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ позволяет найти корни ***любого*** квадратного уравнения (если они есть), в том числе приведенного и неполного. Словесно формула (1) выражается так: *корни квадратного уравнения равны дроби, числитель которой равен второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент.*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМЫ ВИЕТА.

По праву достойна в стихах быть воспета

О свойствах корней теорема Виета.

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида где старший коэффициент равен единице.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ «ПЕРЕБРОСКИ».

Рассмотрим квадратное уравнение
$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.
Умножая обе его части на а, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.
Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильно данному.
Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета и окончательно:
$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.
При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и в настоящее время забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 сборника: Брадис В.М Четырехзначные математические таблицы. - М., Просвещение, 1990

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициен-

там определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена

по формулам (рис.10):

Полагая *OC = p, ED = q, OE = a* (все в см.), из

подобия треугольников *CAH* и *CDF* получим

пропорцию

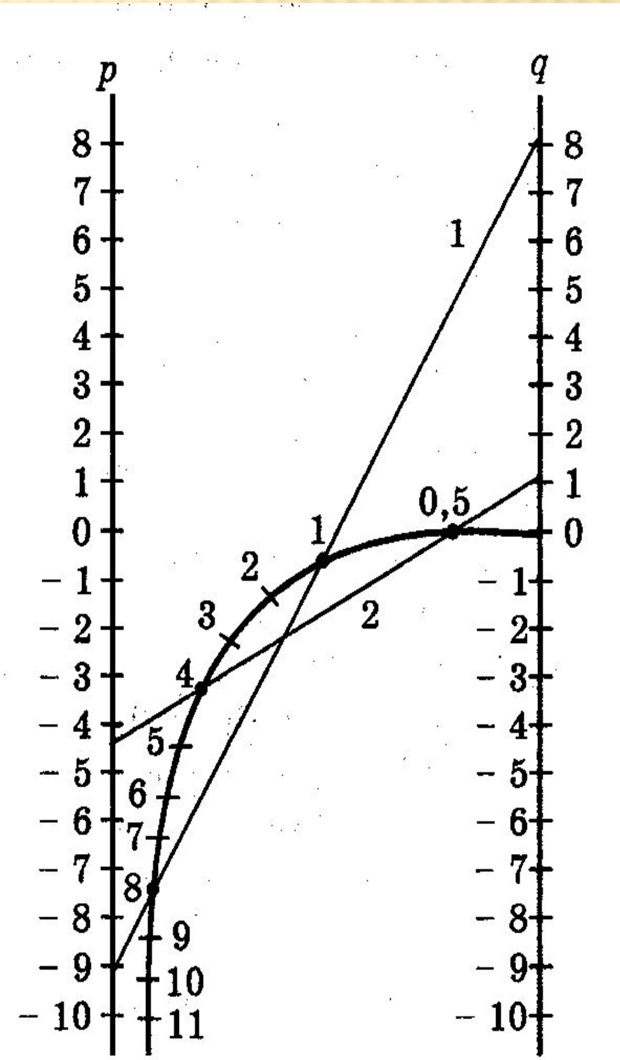
Рис.10

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнени

$z^2 + pz + q = 0,$

Рис.11

причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.



ИССЛЕДОВАНИЕ

В процессе исследования я провел следующие:

- нашёл нужную литературу;

-составил квадратные уравнения;

- раздал уравнения обучающимся 1 курса, для решения им и их родственникам (родители, бабушки, дедушки, дяди, тети).

- проверил решения предоставленные испытуемыми;

- обработал результаты:

Из 4 групп первого курса принимавших участие в эксперименте 80 человек, их родственники 50 человек. При обработке результатов было видно, что все испытуемые использовали один и тот же способ решения квадратных уравнений с помощью формул (находили дискриминант), правильных решений уравнений с помощью дискриминанта в возрастной группе от 15 до 17 лет было 81,25 %, не верных 18,75. Во второй возрастной группе от 18 до 60 лет было решено верно 34 % не решено или решено не верно 66%.

ВЫВОД

Из проведенного исследования я сделал следующий вывод: плюсы и минусы рассматриваемых мной методов. Применяют в своих решениях только стандартный вариант решения с помощью формул (дискриминанта), теорему Витта изучаемую в школьном курсе не применил не один человек. Поэтому проведя свою работу я сделал листовки-шпаргалки, которые обучающиеся будут использовать в решении контрольных, практических и экзаменационных работах.