# Признаки возрастания и убывания функции, 10 класс

***Антонов Виктор Алексеевич***

***учитель математики***

***КГУ ОСШИОД № 4 «Болашак»***

## Тест (самостоятельная работа)

### Вариант I

**1.** $\mathbf{y=x^2+\sin x;\ y'=?}$

**A**. $y'=2x+\cos x$; B. $y'=3x^2+\cos x$; C. $y'=x^2-\sin x$; D. $y'=\cos x+x$

**2.** $\mathbf{f(x)=(x^2+1)(x^3-x);\quad f'(1)=?}$

A. 0; B. 2; C. -2; **D**. 4

**3.** $\mathbf{y=\frac{x}{x-1};\ f'(0)=?}$

A. 0; B. 2; C. -2; **D**. -1

### Вариант II

**1.** $\mathbf{y=x^{12}+\sin x;\ y'=?}$

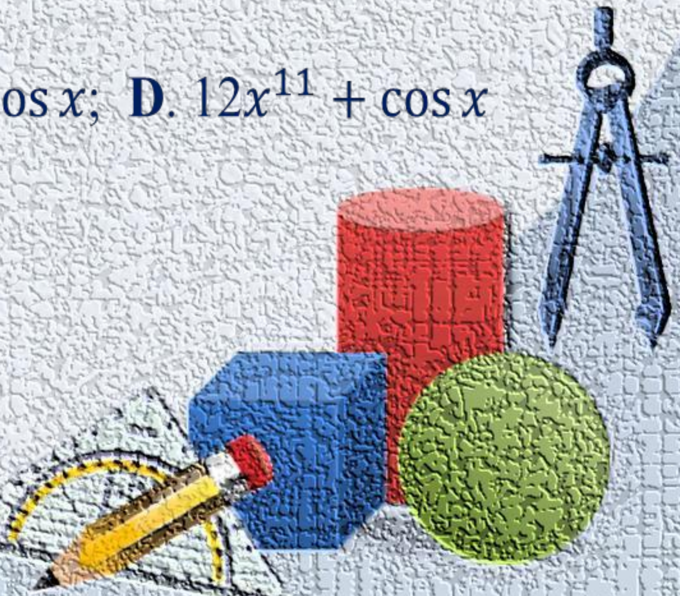
A. $y'=12x+\cos x$; B. $y'=\frac{x^{13}}{13}-\cos x$; C. $y'=12x^{11}-\cos x$; **D**. $12x^{11}+\cos x$

**2.** $\mathbf{f(t)=(t^4-3)(t^2+2);\ f'(1)=?}$

A. 0; B. 2; **C**. 8; D. 4

**3.** $\mathbf{y=\frac{2-x}{x};\ f'(0{,}5)=?}$

A. -9; B. 8; **C**. -8; D. -0,5



| в / № | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| I | A | D | D |
| II | D | C | C |

**Определение**

Правило, или закономерность, при котором каждому значению х, из множества Х соответствует единственное значение у из множества У, называется **функцией.**

**Определение**

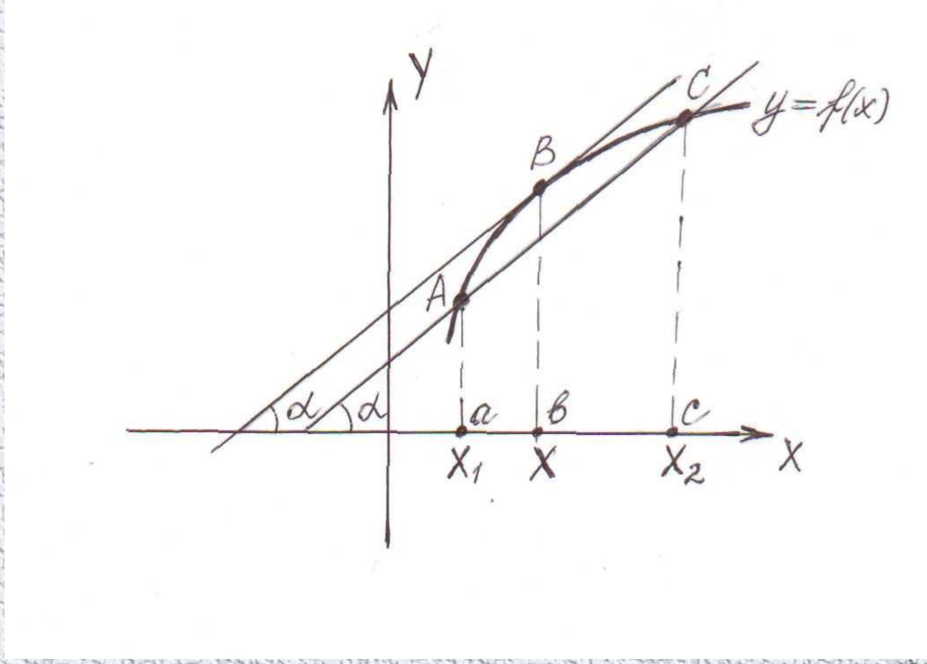
Множество значений независимой переменной, при котором функция принимает вполне определенные значения, называется областью определения функции **(D)**, а значения функции соответствующие каждому значению независимой переменной из области определения, называется множеством значений функции **(E)**.

# Определение

Если в области определения функции $y=f(x)$ для любых чисел $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция называется ***возрастающей (убывающей)*** функцией

Если функция дифференцируема, то на интервале $(a;c)$ найдется точка $в \in (a; c)$, что $f'(в) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Формула Лагранжа$\leftrightarrow f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)



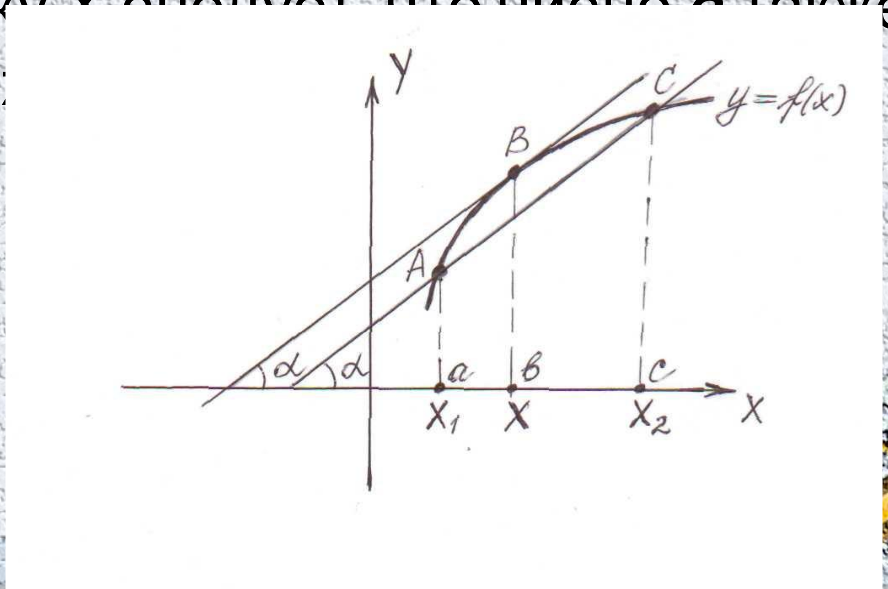
# Теорема

**Если для функции f(x) в каждой точке промежутка X производная функции $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то на данном промежутке X функция возрастает (убывает).**

Доказательство: Возьмем любые две точки $x_1$, $x_2$ из промежутка X, причем $x_1 < x_2$. Тогда по формуле Лагранжа (1)

$$f'(в) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

найдется число ***в*** из помежутка $(x_1;x_2)$ для которого выполняется равенство (1). Из принадлежности точек $x_1$ и $x_2$ промежутку X следует, что число ***в*** также принадлежит этому проме



Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x)>0$, тогда $f'(в)>0$, а по предположению $x_2-x_1>0$, из равенства (1) следует, что
$f(x_2) - f(x_1)>0$ или $f(x_1)< f(x_2)$.
Следовательно, по определению возрастающей функции $f(x)$ - возрастающая функция.
Если же для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x)<0$, тогда $f'(в)<0$, а по предположению $x_2-x_1>0$, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1)<0$ или $f(x_1)> f(x_2)$.
Следовательно, по определению убывающей функции
$f(x)$ – убывающая функция.

Следовательно, с помощью производной для любой функции можно найти промежутки возрастания и убывания и при этом используется следующий алгоритм:

1) **найти область определения функции;**

2) **вычислить производную функции;**

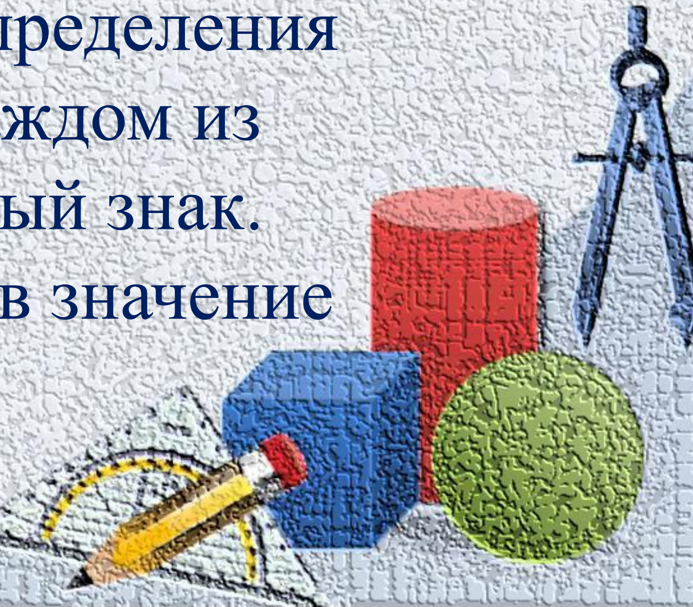
3) **решить неравенство $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$;**

4) **используя утверждение теоремы найти промежутки возрастания и убывания функции.**

**Примечание:**

1.Если функция $f(x)$ непрерывна на концах промежутка, то эти точки входят в данный промежуток.

2. Для решения неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в какой-нибудь точке.



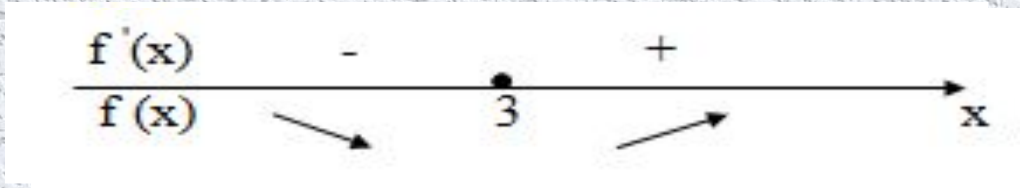
Пр.1 (№261(*в*))

Найти промежутки возрастания и убывания функции

$y=x^2-6x$

решение:

1. $D(f(x))=(-\infty;+\infty)$
2. $f'(x)=(x^2-6x)'=2x-6$
3. $2x-6>0$, $2x-6<0$; применим метод интервалов: $2x-6=0$, $x=3$ (рисунок)




4. при $x<3$, получаем $f'(x)<0$. Тогда по теореме на промежутке $(-\infty;3]$ функция убывает, а при $x>3$, получаем $f'(x)>0$, поэтому на промежутке $[3;+\infty)$ функция возрастает.

Пр.2(№263(*в*))

Найти промежутки возрастания и убывания функции

$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}-x$

Решение.

1. $D(f(x)) = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

2. $f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}-x\right)' = \frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}+1=$

$=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}+1=\frac{3}{(x+1)^2}+1$

3. $\frac{3}{(x+1)^2}+1>0, \forall x \in (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

4. на $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ функция $\uparrow$

Пример1. На рисунке изображен график функции y=f(x). По графику найдите промежутки, в которых производная функции:

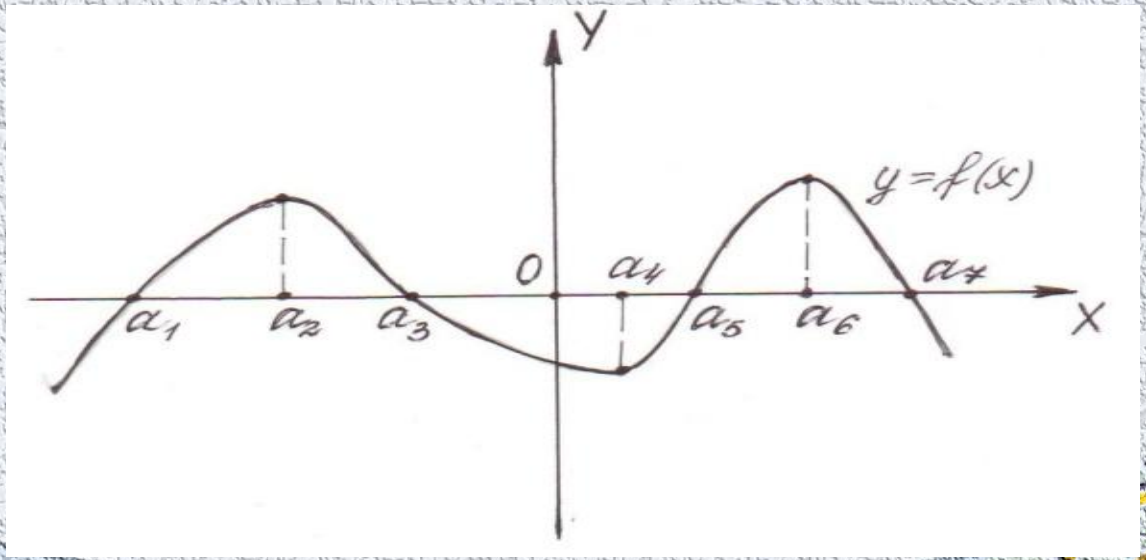
а) положительная; б) отрицательная.

а) $f'(x)>0$

на $(-\infty;\ a_2)\cup(a_4;\ a_6)$-промежутки возрастания функции f(x).

б) $f'(x)<0$

на $(a_2;\ a_4)\cup(a_6;\ +\infty)$- промежутки убывания функции f(x).



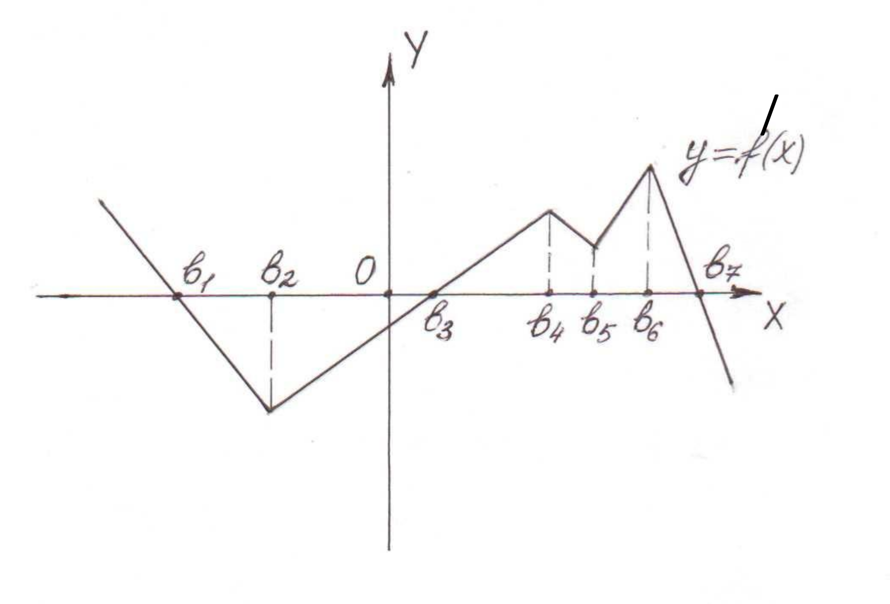
Пример 2. На рисунке дан график производной функции
$y=f'(x)$.
С помощью графика определите промежутки:
а)возрастания $y=f(x)$; б)убывания $y=f(x)$.

а) $f(x)$ возрастает ($f'(x)>0$)

$(-\infty; b_1]\cup[b_3;\ b_7]$

б) $f(x)$ убывает ($f'(x)<0$)

$[b_1;\ b_3]\cup[b_7; +\infty)$

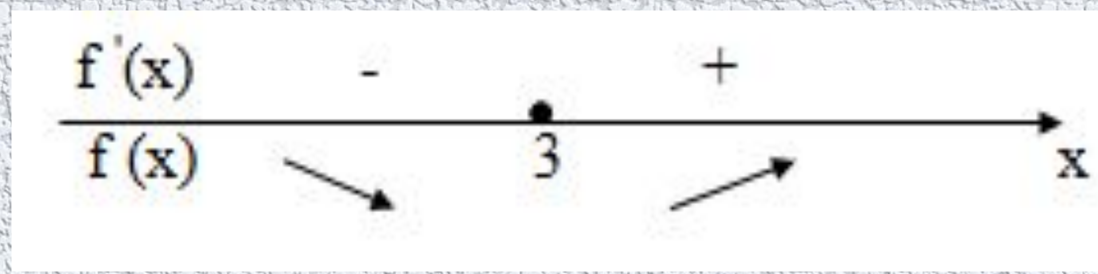


№ 258 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

а) $f(x)=3x-1$

1. $D(f(x))=(-\infty;+\infty)$
2. $f'(x)=3$
3. $f'(x)>0, \forall x \in R$
4. $f(x)\uparrow$ на R

в) $f(x)=x^2-6x+5$




1. $D(f(x))=R$
2. $f'(x)=2x-6$
3. $f'(x)=0;\ 2x-6=0,\ x=3$
4. на $(-\infty; 3)$ функция $\downarrow$, на $[3; +\infty)$ функция $\uparrow$.

№ 259 Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей (работа учащихся у доски и в тетрадях)

а) $y = \frac{1}{6} + 2{,}3x$

1. D(y)=R
2. $y'=2{,}3>0$
3. y возрастает на R

г) $y = 5 - \frac{3}{x}$

1. D (y)=(-∞; 0)U(0;+∞)
2. $y' = \frac{3}{x^2} > 0$
3. y возрастает на (-∞;0)U(0;+∞)

Уровень В. № 261 (б) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

1. D(y)=R
2. y'= $\frac{1}{3} * 3x^2 - \frac{1}{2} * 2x$=$x^2 - x$
3. $x^2 - x > 0$ и $x^2 - x < 0$

Метод интервалов:

$$x^2 - x = x(x-1) = 0$$

*f '(x)*  +  −  +

*f(x)*  *0*  *1*  *x*

4. на (-∞; 0] ∪ [1; +∞), $f\ (x)$ ↑

на [0; 1], $f\ (x)$ ↓

№ 263 (г) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$f\,(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2$$

1. D $(f\,(x)) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$
2. $f'(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2\right)' = \frac{1}{4} + \frac{4}{x^2}$
3. $\frac{1}{4} + \frac{4}{x^2} > 0$
4. на $(-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$, $f\,(x) \uparrow$

Самостоятельная работа на 2 варианта

1вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259 (б)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0{,}7$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (в)

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x+1} + x$$

2вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259(в)

$$y = -\frac{7}{x}$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (б)

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$

**I вариант**

1) № 259 (б)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0{,}7$$

1. D(y)=R
2. y'=$x^2$
3. y'>0, $\forall x \in R$
4. на R,y↑

2) № 263 (в)

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x+1} + x$$

1. $\mathrm{D}\big(f\,(x)\big) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$
2. $f\,'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1} + x\right)' = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' + 1 = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} + 1 = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$
3. $f\,'(x) > 0, \forall x \in D(f\,(x))$
4. на (-∞; -1)U(-1;+∞), f(x)↑

**II вариант**

1) № 259(в)

у=- $\frac{7}{x}$

1. D(у)=(-∞; 0)U(0; +∞)

2. у'=$\frac{7}{x^2}$

3. у'>0, $\forall x \in D(y)$

4. на (-∞; 0)U(0;+∞), f(x)↑

2) № 263 (б)

f(x)=$2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$

$f'(x)$ + - +

f(x) -1 2 x

1. $D$(f(x))=R

2. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

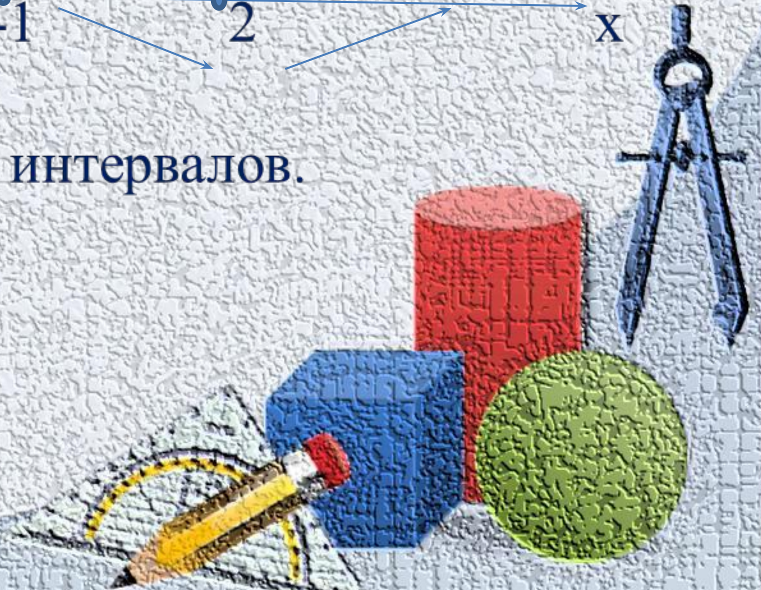
3. $x^2 - x - 2 > 0$ и $x^2 - x - 2 < 0$ метод интервалов.

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1/2} = -1; 2$

4. на (- ∞; - 1]U[2; +∞) f(x)↑

на [-1; 2], f(x)↓



Уровень С. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

Решение:

Область определения – все x, которые не обращают знаменатель в нуль (на нуль делить нельзя), а так как

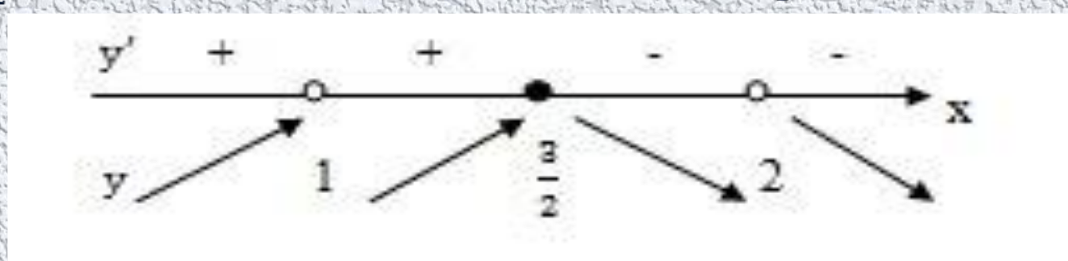
$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, то $x \neq 1$, $x \neq 2$

$D(y)=(-\infty; 1)\cup(1;2)\cup(2; +\infty)$

$y' = \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' = ((x^2 - 3x + 2)^{-1})' = -(x^2 - 3x + 2)^{-2} \cdot (x^2 - 3x + 2)' =$

$= -\frac{1}{(x^2-3X+2)^2} \cdot (2x-3) = = -\frac{2x-3}{(x^2-3X+2)^2};$

$-\frac{2x-3}{(x^2-3X+2)^2} \gtreqless 0$; $-(2x-3) \gtreqless 0$; $3-2x \gtreqless 0$; метод интервалов: $3-2x=0$; $x=\frac{3}{2}$;




4.на $(-\infty; 1)\cup(1; \frac{3}{2}]$ функция возрастает; на $[\frac{3}{2}; 2)\cup(2; +\infty]$ функция убывает.