



Признаки возрастания и убывания функции, 10 класс

Антонов Виктор Алексеевич

учитель математики

КГУ ОСШИОД № 4 «Болашак»



Тест (самостоятельная работа)

Вариант I

1. $y = x^2 + \sin x$; $y' = ?$

A. $y' = 2x + \cos x$; B. $y' = 3x^2 + \cos x$; C. $y' = x^2 - \sin x$; D. $y' = \cos x + x$

2. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)$; $f'(1) = ?$

A. 0; B. 2; C. -2; D. 4

3. $y = \frac{x}{x-1}$; $f'(0) = ?$

A. 0; B. 2; C. -2; D. -1

Вариант II

1. $y = x^{12} + \sin x$; $y' = ?$

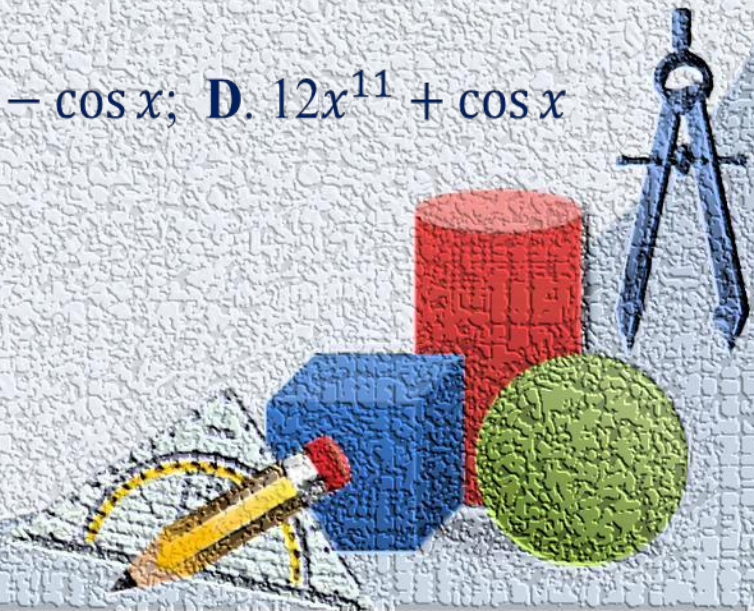
A. $y' = 12x + \cos x$; B. $y' = \frac{x^{13}}{13} - \cos x$; C. $y' = 12x^{11} - \cos x$; D. $12x^{11} + \cos x$

2. $f(t) = (t^4 - 3)(t^2 + 2)$; $f'(1) = ?$

A. 0; B. 2; C. 8; D. 4

3. $y = \frac{2-x}{x}$; $f'(0,5) = ?$

A. -9; B. 8; C. -8; D. -0,5



B \ №	1	2	3
I	A	D	D
II	D	C	C

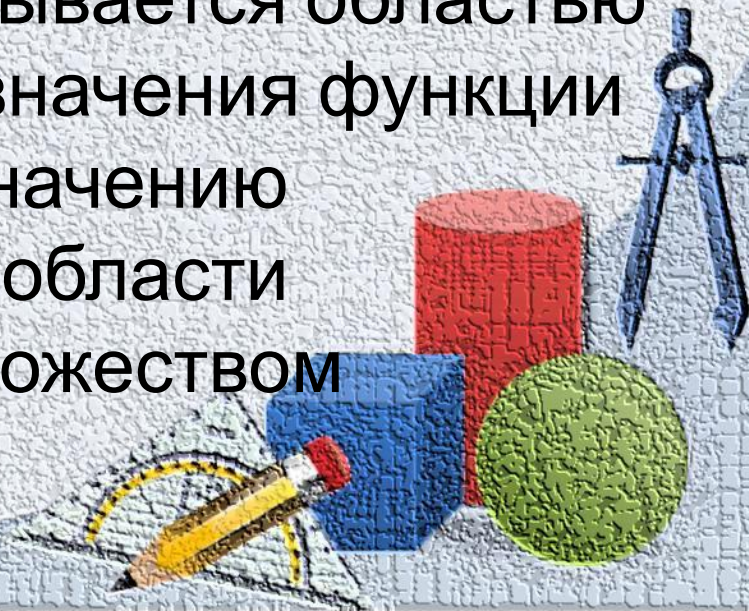


Определение

Правило, или закономерность, при котором каждому значению x , из множества X соответствует единственное значение y из множества Y , называется **функцией**.

Определение

Множество значений независимой переменной, при котором функция принимает вполне определенные значения, называется областью определения функции (**D**), а значения функции соответствующие каждому значению независимой переменной из области определения, называется множеством значений функции (**E**).



Определение

Если в области определения функции $y=f(x)$ для любых чисел $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция называется *возрастающей (убывающей)* функцией

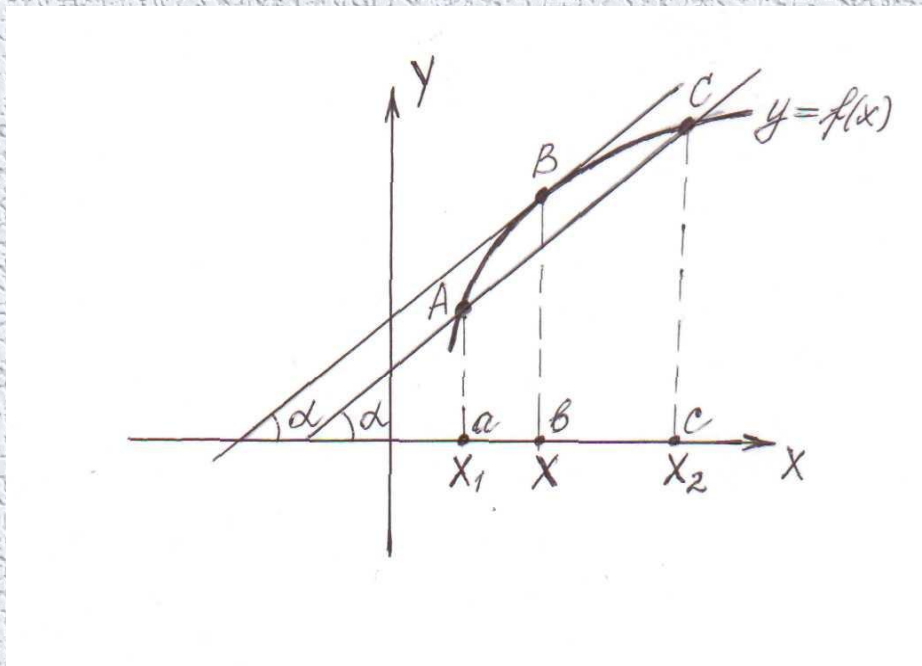


Если функция дифференцируема, то на интервале $(a; c)$ найдется точка $\theta \in (a; c)$,

$$\text{что } f'(\theta) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

$$\text{Формула Лагранжа} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(1)



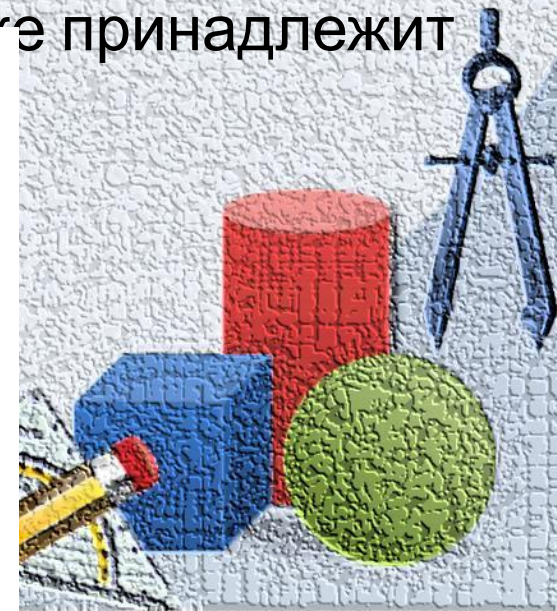
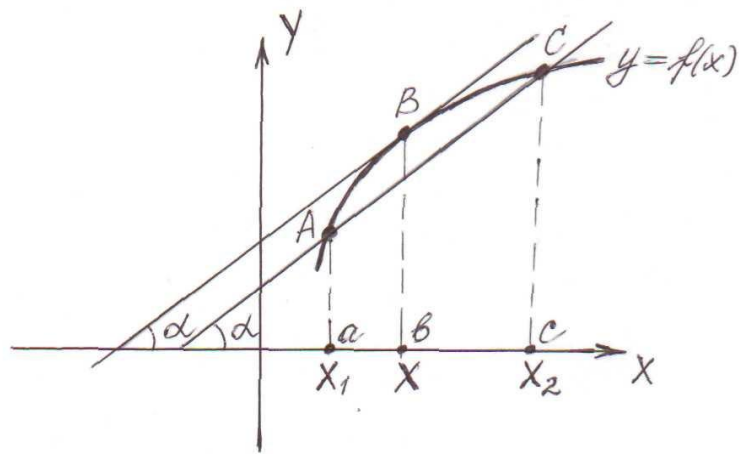
Теорема

Если для функции $f(x)$ в каждой точке промежутка X производная функции $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то на данном промежутке X функция возрастает (убывает).

Доказательство: Возьмем любые две точки x_1, x_2 из промежутка X , причем $x_1 < x_2$. Тогда по формуле Лагранжа

$$(1) \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

найдется число c из промежутка $(x_1; x_2)$ для которого выполняется равенство (1). Из принадлежности точек x_1 и x_2 промежутку X следует, что число c также принадлежит этому промежутку.



Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) > 0$, тогда $f'(e) > 0$, а по предположению $x_2 - x_1 > 0$, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_1) < f(x_2)$.

Следовательно, по определению возрастающей функции $f(x)$ - возрастающая функция.

Если же для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) < 0$, тогда $f'(e) < 0$, а по предположению $x_2 - x_1 > 0$, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_1) > f(x_2)$.

Следовательно, по определению убывающей функции $f(x)$ - убывающая функция.



Следовательно, с помощью производной для любой функции можно найти промежутки возрастания и убывания и при этом используется следующий алгоритм:

- 1) найти область определения функции;
- 2) вычислить производную функции;
- 3) решить неравенство $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$;
- 4) используя утверждение теоремы найти промежутки возрастания и убывания функции.



Примечание:

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на концах промежутка, то эти точки входят в данный промежуток.

2. Для решения неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в какой-нибудь точке.



Пр.1 (№261(в))

Найти промежутки возрастания и убывания функции

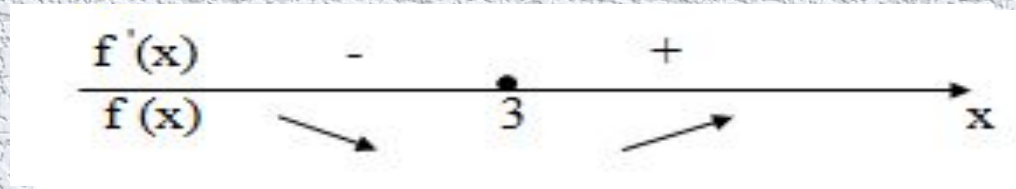
$$y = x^2 - 6x$$

решение:

1. $D(f(x)) = (-\infty; +\infty)$

2. $f'(x) = (x^2 - 6x)' = 2x - 6$

3. $2x - 6 > 0$, $2x - 6 < 0$; применим метод интервалов: $2x - 6 = 0$,
 $x = 3$ (рисунок)



4. при $x < 3$, получаем $f'(x) < 0$. Тогда по теореме на промежутке $(-\infty; 3]$ функция убывает, а при $x > 3$, получаем $f'(x) > 0$, поэтому на промежутке $[3; +\infty)$ функция возрастает.



Пр.2(№263(е))

Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} - x$$

Решение.

1. $D(f(x)) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2. $f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1} - x\right)' = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} + 1 =$

$$= \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} + 1 = \frac{3}{(x+1)^2} + 1$$

3. $\frac{3}{(x+1)^2} + 1 > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

4. на $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ функция \uparrow



Пример 1. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. По графику найдите промежутки, в которых производная функции:

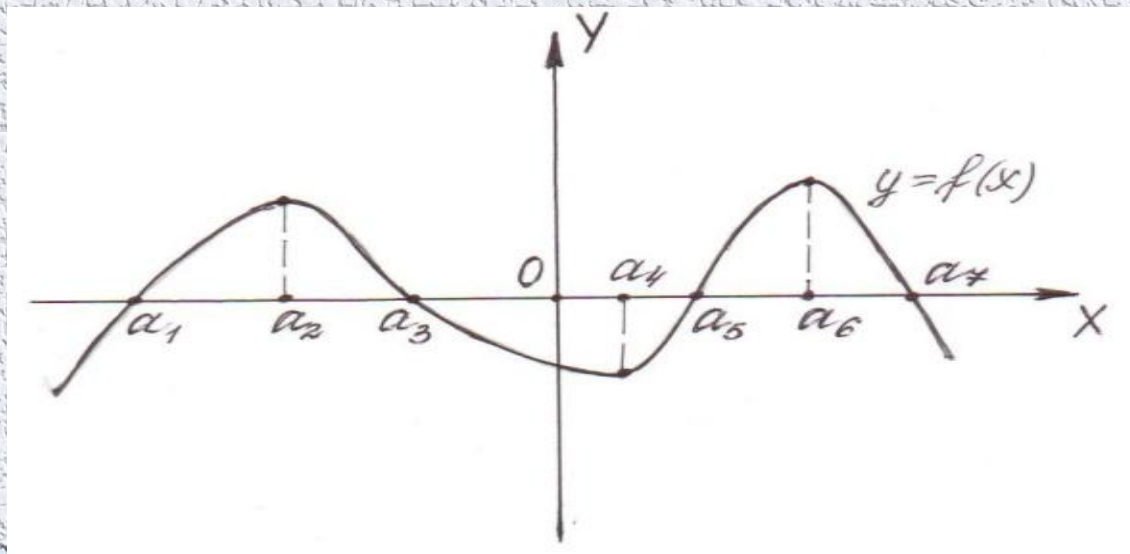
а) положительная; б) отрицательная.

а) $f'(x) > 0$

на $(-\infty; a_2) \cup (a_4; a_6)$ -промежутки возрастания функции $f(x)$.

б) $f'(x) < 0$

на $(a_2; a_4) \cup (a_6; +\infty)$ - промежутки убывания функции $f(x)$.



Пример 2. На рисунке дан график производной функции $y=f'(x)$.

С помощью графика определите промежутки:

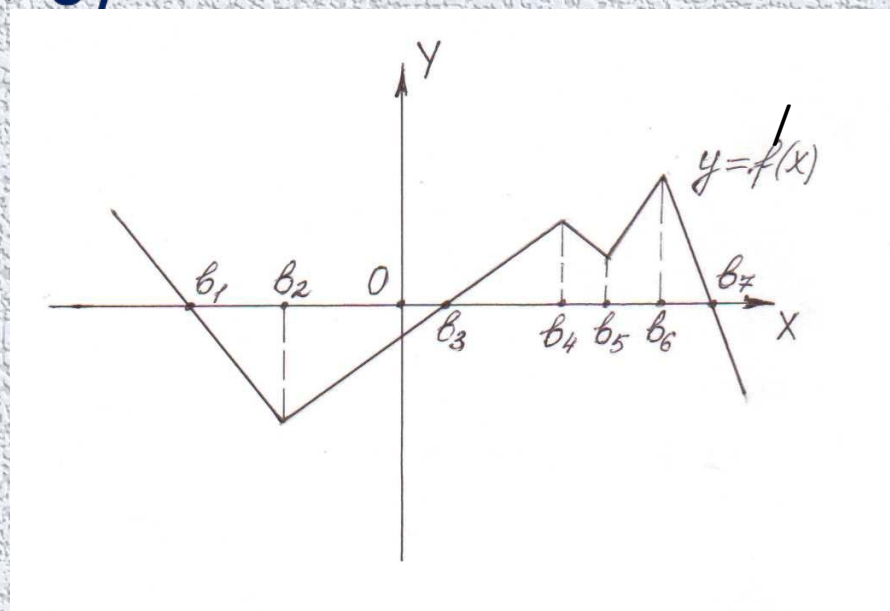
а) возрастания $y=f(x)$; б) убывания $y=f(x)$.

а) $f(x)$ возрастает ($f'(x) > 0$)

$(-\infty; b_1] \cup [b_3; b_7]$

б) $f(x)$ убывает ($f'(x) < 0$)

$[b_1; b_3] \cup [b_7; +\infty)$



№ 258 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

а) $f(x)=3x-1$

1. $D(f(x))=(-\infty; +\infty)$

2. $f'(x)=3$

3. $f'(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$

4. $f(x) \uparrow$ на \mathbb{R}

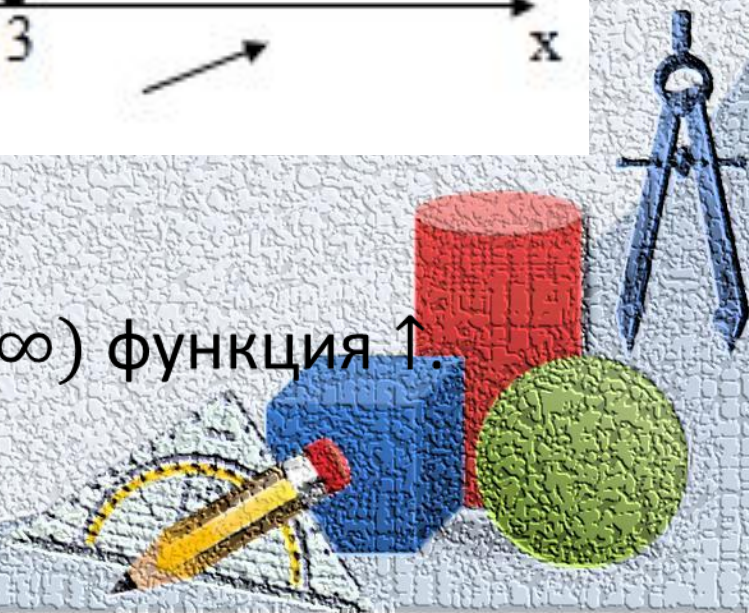
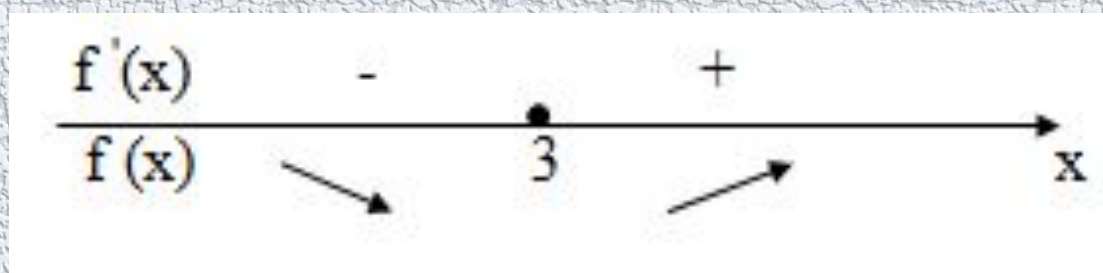
в) $f(x)=x^2-6x+5$

1. $D(f(x))=\mathbb{R}$

2. $f'(x)=2x-6$

3. $f'(x)=0; 2x-6=0, x=3$

4. на $(-\infty; 3)$ функция \downarrow , на $[3; +\infty)$ функция \uparrow .



№ 259 Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей (работа учащихся у доски и в тетрадях)

а) $y = \frac{1}{6} + 2,3x$

1. $D(y) = \mathbb{R}$

2. $y' = 2,3 > 0$

3. y возрастает на \mathbb{R}

г) $y = 5 - \frac{3}{x}$

1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $y' = \frac{3}{x^2} > 0$

3. y возрастает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



Уровень В. № 261 (б) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

1. $D(y) = \mathbb{R}$

2. $y' = \frac{1}{3} * 3x^2 - \frac{1}{2} * 2x = x^2 - x$

3. $x^2 - x > 0$ и $x^2 - x < 0$

Метод интервалов:

$$x^2 - x = x(x - 1) = 0$$



4. на $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, $f(x) \uparrow$
на $[0; 1]$, $f(x) \downarrow$



№ 263 (г) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2$$

1. $D(f(x)) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $f'(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2\right)' = \frac{1}{4} + \frac{4}{x^2}$

3. $\frac{1}{4} + \frac{4}{x^2} > 0$

4. на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty), f(x) \uparrow$



Самостоятельная работа на 2 варианта

1 вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259 (б)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0,7$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (в)

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} + x$$

2 вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259(в)

$$y = -\frac{7}{x}$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (б)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$$



I вариант

1) № 259 (б)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0,7$$

1. $D(y) = \mathbb{R}$

2. $y' = x^2$

3. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

4. на $\mathbb{R}, y \uparrow$

2) № 263 (в)

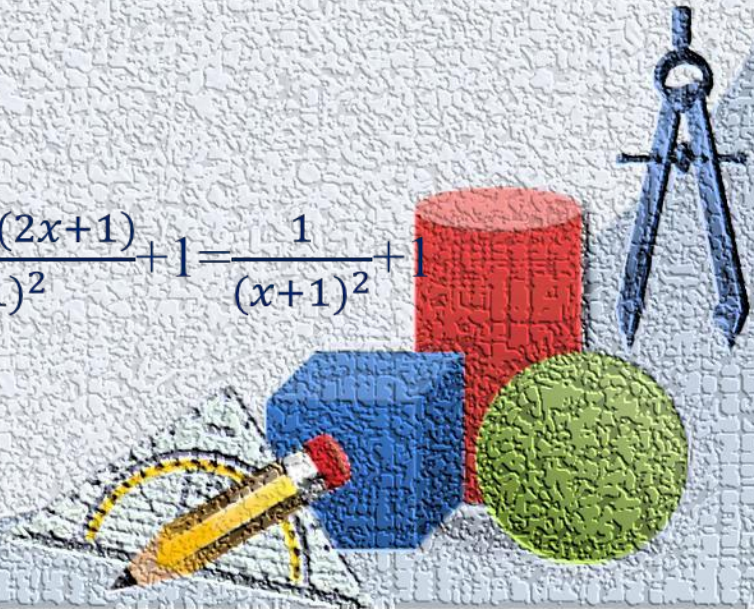
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} + x$$

1. $D(f(x)) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2. $f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1} + x\right)' = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' + 1 = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} + 1 = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$

3. $f'(x) > 0, \forall x \in D(f(x))$

4. на $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty), f(x) \uparrow$



II вариант

1) № 259(в)

$$y = -\frac{7}{x}$$

1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $y' = \frac{7}{x^2}$

3. $y' > 0, \forall x \in D(y)$

4. на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $f(x) \uparrow$

2) № 263 (б)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$$

1. $D(f(x)) = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

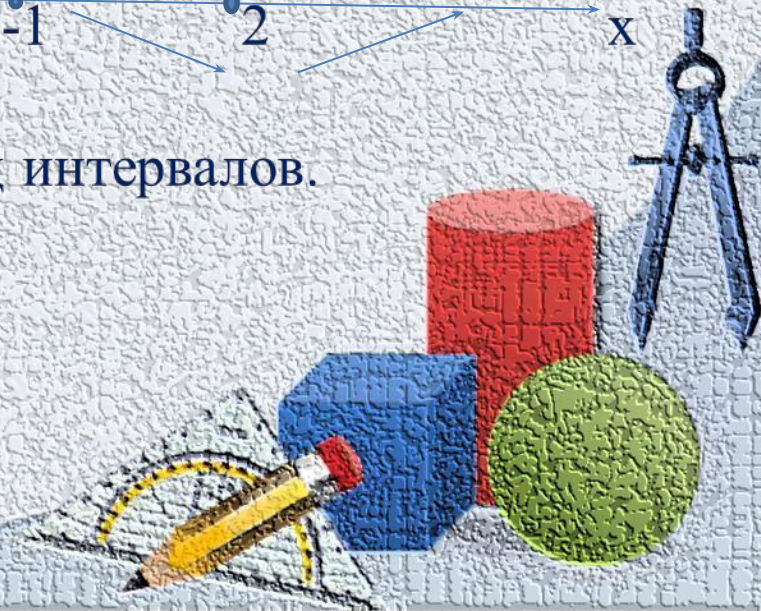
3. $x^2 - x - 2 > 0$ и $x^2 - x - 2 < 0$ метод интервалов.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = -1; 2$$

4. на $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ $f(x) \uparrow$

на $[-1; 2]$, $f(x) \downarrow$



Уровень С. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

Решение:

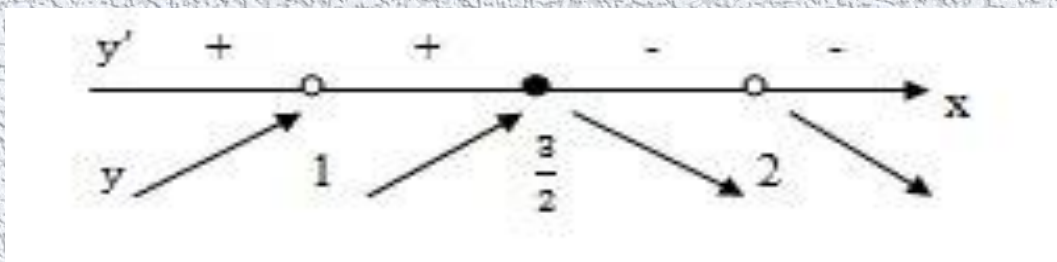
Область определения – все x , которые не обращают знаменатель в нуль (на нуль делить нельзя), а так как

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \text{ то } x \neq 1, x \neq 2$$

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$y' = \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)' = ((x^2 - 3x + 2)^{-1})' = -(x^2 - 3x + 2)^{-2} \cdot (x^2 - 3x + 2)' =$$
$$= -\frac{1}{(x^2 - 3x + 2)^2} \cdot (2x - 3) = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2};$$

$$-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} \geq 0; \quad -(2x - 3) \geq 0; \quad 3 - 2x \geq 0; \quad \text{метод интервалов: } 3 - 2x = 0; \quad x = \frac{3}{2};$$



4. на $(-\infty; 1) \cup (1; \frac{3}{2}]$ функция возрастает; на $[\frac{3}{2}; 2) \cup (2; +\infty]$ функция убывает.

