Признаки возрастания и убывания функции, 10 класс

Антонов Виктор Алексеевич

учитель математики

КГУ ОСШИОД № 4 «Болашак»

Тест (самостоятельная работа)

Вариант I

1. y=$x^2+\sin x$; y'=?

A. $y'=2x+\cos x$; B. $y'=3x^2+\cos x$; C. y'=$x^2-\sin x$; D. y'=$\cos x+x$

2. f(x)=$(x^2+1)(x^3-x)$; f '(1)=?

A. 0; B. 2; C. -2; **D**. 4

3. $y=\frac{x}{x-1}$; f '(0) = ?

A. 0; B. 2; C. -2; **D**. -1

Вариант II

1. y=$x^{12}+\sin x$; y'=?

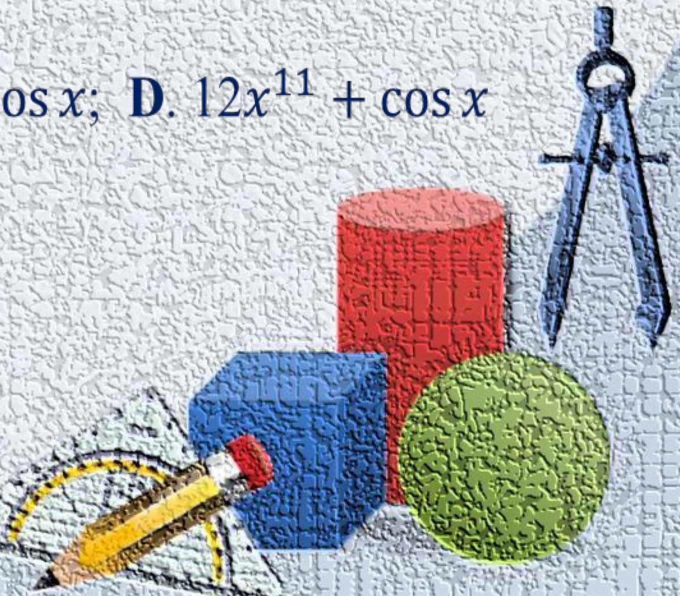
A. y'=12x+$\cos x$; B. y'=$\frac{x^{13}}{13}-\cos x$; C. y'=$12x^{11}-\cos x$; **D**. $12x^{11}+\cos x$

2. f(t)=$(t^4-3)(t^2+2)$; f '(1)=?

A. 0; B. 2; **C**. 8; D. 4

3. y=$\frac{2-x}{x}$; f '(0,5)=?

A. -9; B. 8; **C**. -8; D. -0,5



в \ №	1	2	3
I	A	D	D
II	D	C	C

Определение

Правило, или закономерность, при котором каждому значению x, из множества X соответствует единственное значение y из множества У, называется **функцией.**

Определение

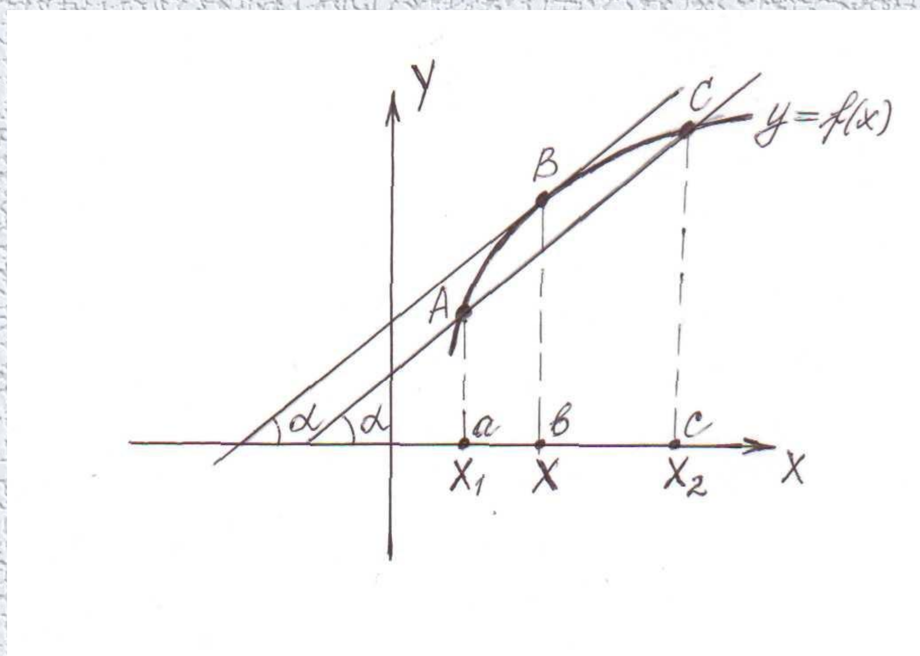
Множество значений независимой переменной, при котором функция принимает вполне определенные значения, называется областью определения функции **(D)**, а значения функции соответствующие каждому значению независимой переменной из области определения, называется множеством значений функции **(E)**.

Определение

Если в области определения функции $y=f(x)$ для любых чисел $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то функция называется ***возрастающей (убывающей)*** функцией

Если функция дифференцируема, то на интервале $(a;c)$ найдется точка $в \in (a;c)$, что $f'(в) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Формула Лагранжа $\leftrightarrow f'(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1)



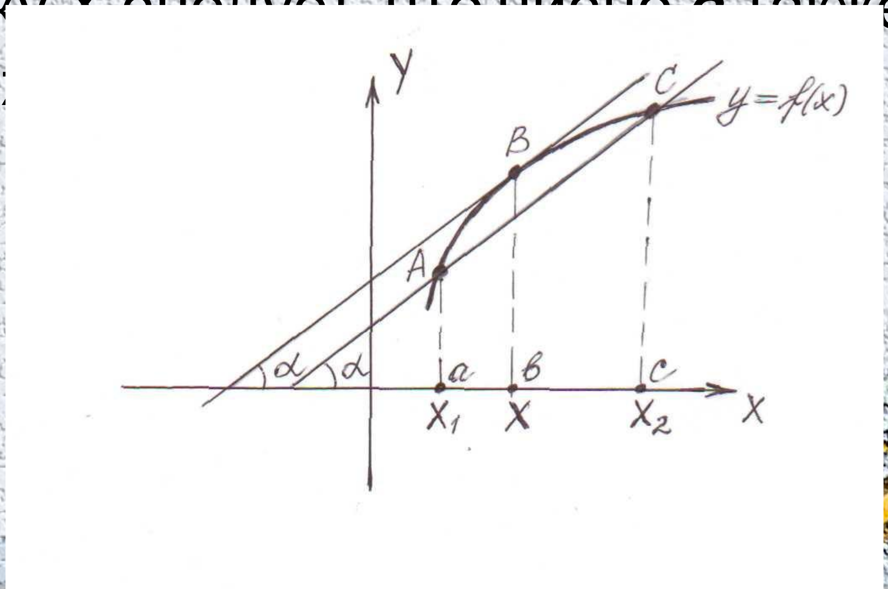
Теорема

Если для функции f(x) в каждой точке промежутка Х производная функции $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то на данном промежутке Х функция возрастает (убывает).

Доказательство: Возьмем любые две точки x_1, x_2 из промежутка Х, причем $x_1 < x_2$. Тогда по формуле Лагранжа (1)

$$f'(в) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

найдется число ***в*** из помежутка (x_1;x_2) для которого выполняется равенство (1). Из принадлежности точек x_1 и x_2 промежутку Х следует, что число ***в*** также принадлежит этому промеж



Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x)>0$,тогда $f'(в)>0$, а по предположению $x_2-x_1>0$, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1)>0$ или $f(x_1)< f(x_2)$. Следовательно, по определению возрастающей функции f(x) - возрастающая функция.

Если же для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x)<0$, тогда $f'(в)<0$, а по предположению $x_2-x_1>0$, из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1)<0$ или $f(x_1)> f(x_2)$.

Следовательно, по определению убывающей функции f(x) – убывающая функция.

Следовательно, с помощью производной для любой функции можно найти промежутки возрастания и убывания и при этом используется следующий алгоритм:

1) **найти область определения функции;**

2) **вычислить производную функции;**

3) **решить неравенство $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$;**

4) **используя утверждение теоремы найти промежутки возрастания и убывания функции.**

Примечание:

1.Если функция $f(x)$ непрерывна на концах промежутка, то эти точки входят в данный промежуток.

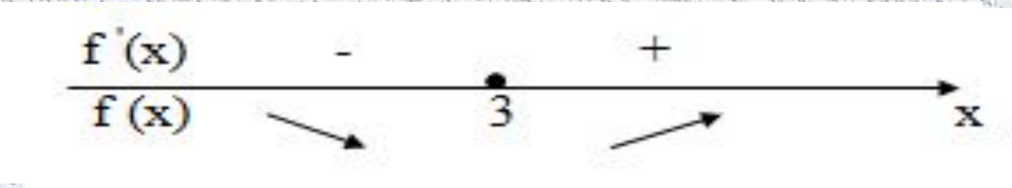
2. Для решения неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в какой-нибудь точке.

Пр.1 (№261(*в*))

Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=x^2 - 6x$

решение:

1. $D(f(x))=(-\infty;+\infty)$
2. $f'(x)=(x^2-6x)'=2x-6$
3. $2x-6>0$, $2x-6<0$; применим метод интервалов: $2x-6=0$, $x=3$ (рисунок)



4. при $x<3$, получаем $f'(x)<0$. Тогда по теореме на промежутке $(-\infty;3]$ функция убывает, а при $x>3$, получаем $f'(x)>0$, поэтому на промежутке $[3;+\infty)$ функция возрастает.

Пр.2(№263(*в*))

Найти промежутки возрастания и убывания функции

$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}-x$

Решение.

1. $D(f(x)) = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

2. $f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}-x\right)' = \frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}+1=$

$=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}+1=\frac{3}{(x+1)^2}+1$

3. $\frac{3}{(x+1)^2}+1>0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

4. на $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ функция $\uparrow$

Пример1. На рисунке изображен график функции y=f(x). По графику найдите промежутки, в которых производная функции:

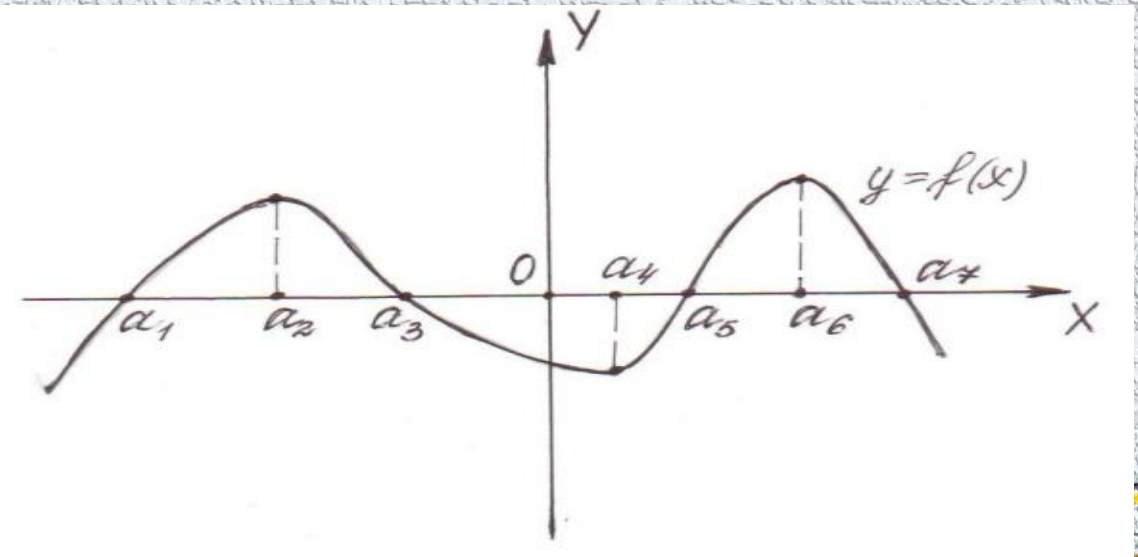
а) положительная; б) отрицательная.

а) f '(x)>0

на (-∞; a_2)U(a_4; a_6)-промежутки возрастания функции f(x).

б) f '(x)<0

на (a_2; a_4)U(a_6; +∞)- промежутки убывания функции f(x).



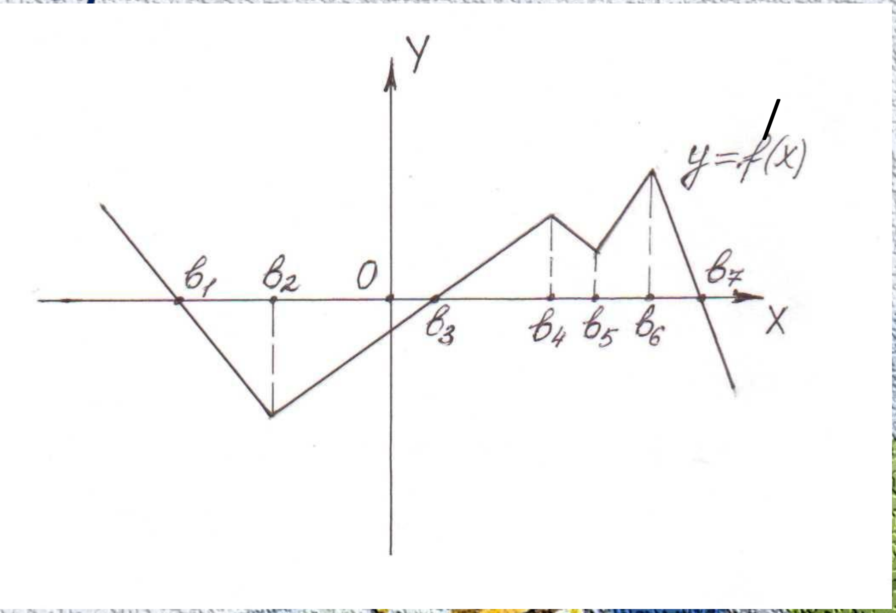
Пример 2. На рисунке дан график производной функции
$y=f'(x)$.
С помощью графика определите промежутки:
а)возрастания $y=f(x)$; б)убывания $y=f(x)$.

а) $f(x)$ возрастает ($f'(x)>0$)

$(-\infty;\ b_1]\cup[b_3;\ b_7]$

б) $f(x)$ убывает ($f'(x)<0$)

$[\ b_1;\ b_3]\cup[\ b_7;+\infty)$

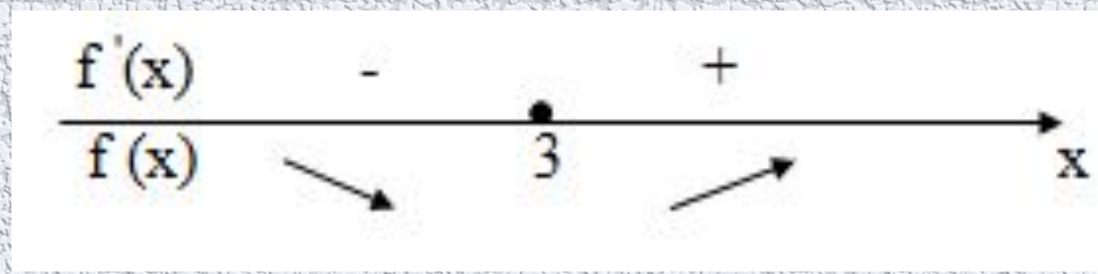


№ 258 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

а) $f(x)=3x-1$

1. $D(f(x))=(-\infty;\ +\infty)$
2. $f'(x)=3$
3. $f'(x)>0,\ \forall x \in R$
4. $f(x)\uparrow$ на R

в) $f(x)=x^2-6x+5$



1. $D(f(x))=R$
2. $f'(x)=2x-6$
3. $f'(x)=0;\ \ 2x-6=0,\ x=3$
4. на $(-\infty; 3)$ функция $\downarrow$, на $[3;\ +\infty)$ функция $\uparrow$.

№ 259 Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей (работа учащихся у доски и в тетрадях)

а) $y = \frac{1}{6} + 2,3x$

1. D(y)=R
2. $y' = 2,3 > 0$
3. y возрастает на R

г) $y = 5 - \frac{3}{x}$

1. D (y)=(-∞; 0)U(0;+∞)
2. $y' = \frac{3}{x^2} > 0$
3. y возрастает на (-∞;0)U(0;+∞)

Уровень В. № 261 (б) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

1. D(y)=R
2. y'= $\frac{1}{3} * 3x^2 - \frac{1}{2} * 2x$=$x^2 - x$
3. $x^2 - x > 0$ и $x^2 - x < 0$

Метод интервалов:

$$x^2 - x = x(x-1) = 0$$

f '(x) + – +

f(x) ↗ *0* ↘ *1* ↗ *x*

4. на (-∞; 0] ∪ [1; +∞), $f\ (x)$ ↑
на [0; 1], $f\ (x)$ ↓

№ 263 (г) Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$f\ (x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2$$

1. D $(f\ (x)) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$
2. $f'(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2\right)' = \frac{1}{4} + \frac{4}{x^2}$
3. $\frac{1}{4} + \frac{4}{x^2} > 0$
4. на $(-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$, $f\,(x) \uparrow$

Самостоятельная работа на 2 варианта

1вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259 (б)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0{,}7$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (в)

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x+1} + x$$

2вариант

1. Докажите, что данная функция в области определения является возрастающей:

№ 259(в)

$$y = -\,\frac{7}{x}$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

№ 263 (б)

f(x) = $2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$

I вариант

1) № 259 (б)

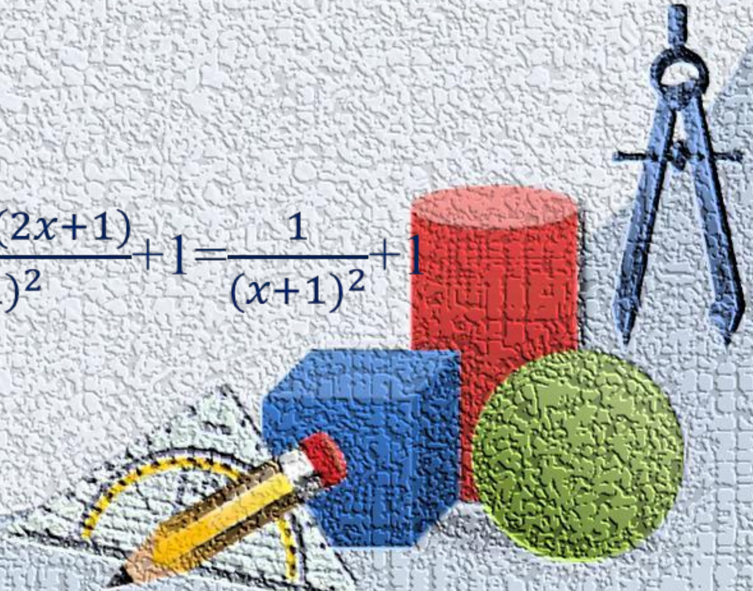
$$y = \frac{1}{3}x^3 + 0{,}7$$

1. D(y)=R
2. y'=x^2
3. y'>0, $\forall x \in R$
4. на R,y↑

2) № 263 (в)

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x+1} + x$$

1. $\mathrm{D}\big(f\,(x)\big) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$
2. $f\,'(x) = (\frac{2x+1}{x+1} + x)' = (\frac{2x+1}{x+1})' + 1 = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} + 1 = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$
3. $f\,'(x) > 0, \forall x \in D(f\,(x))$
4. на (-∞; -1)U(-1;+∞), f(x)↑



II вариант

1) № 259(в)

y=- $\frac{7}{x}$

1. D(y)=(-∞; 0)U(0; +∞)

2. y'=$\frac{7}{x^2}$

3. y'>0, $\forall x \in D(y)$

4. на (-∞; 0)U(0;+∞), f(x)↑

2) № 263 (б)

f(x)=$2x^3-3x^2-12x-1$

$f'(x)$ + - +

f(x) ↗ -1 ↘ 2 ↗ x

1. D(f(x))=R

2. $f'(x)=6x^2-6x-12$

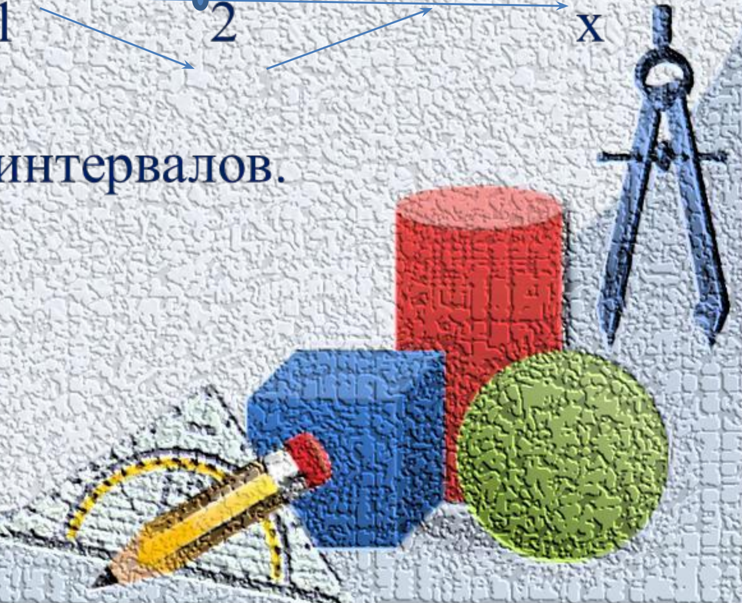
3. $x^2-x-2>0$ и $x^2-x-2<0$ метод интервалов.

$x^2-x-2=0$

$x_{1/2}=-1;2$

4. на (- ∞; - 1]U[2; +∞) f(x)↑

на [-1; 2], f(x)↓



Уровень С. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

Решение:

Область определения – все x, которые не обращают знаменатель в нуль (на нуль делить нельзя), а так как

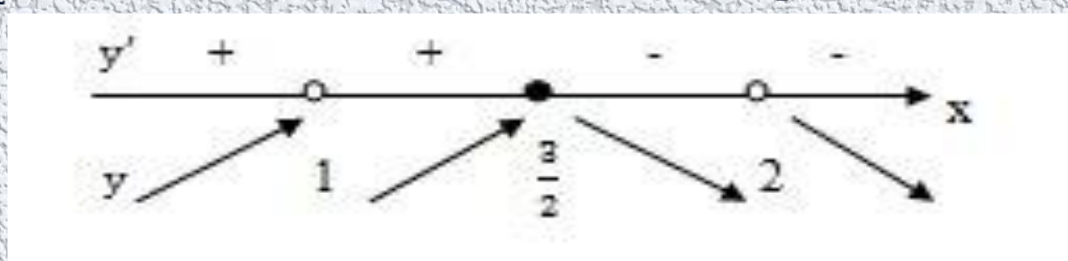
$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, то $x \neq 1$, $x \neq 2$

$D(y)=(-\infty;\ 1)\cup(1;2)\ \cup(2;\ +\infty)$

$y' = \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' =((x^2 - 3x + 2)^{-1})' = -\ (x^2 - 3x + 2)^{-2}\cdot(x^2 - 3x + 2)' =$

$= -\ \frac{1}{(x^2-3X+2)^2} \cdot (2x-3) = = -\ \frac{2x-3}{(x^2-3X+2)^2};$

$-\ \frac{2x-3}{(x^2-3X+2)^2} \gtreqless 0$; $-\ (2x-3) \gtreqless 0$; $3-2x \gtreqless 0$; метод интервалов: $3-2x=0$; $x = \frac{3}{2}$;



4.на $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \frac{3}{2}]$ функция возрастает; на $[\frac{3}{2};\ 2)\cup(2;\ +\infty]$ функция убывает.