Критические точки функции, максимумы и минимумы.

Урок по алгебре и началам анализа в *11* классе по учебнику А. Н. Колмогорова.

Учитель математики МБОУ СОШ № *31* Туапсинского района Краснодарского края Зайцева Нина Михайловна

Цели урока:

- **ОБУЧАЮЩАЯ :**

1) Ввести определение критических точек;
2) Рассмотреть теорему Ферма, которая является необходимым условием экстремума функции;
3) Вывести признак максимума функции и признак минимума функции;
4) Научиться решать задачи на данную тему, используя полученные знания

- **РАЗВИВАЮЩАЯ :**

1) Способствовать развитию общения как метода научного познания, аналитико-синтетического мышления, смысловой памяти и произвольного внимания,
2) Развитие навыков исследовательской деятельности

- **ВОСПИТАТЕЛЬНАЯ :**

1) Способствовать развитию творческой деятельности
2) Развивать у учащихся коммуникативные компетенции, потребности к самообразованию.

Математический диктант

Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

1 [-2; 4]

2 [-5; 6)

3 [-5; 5]

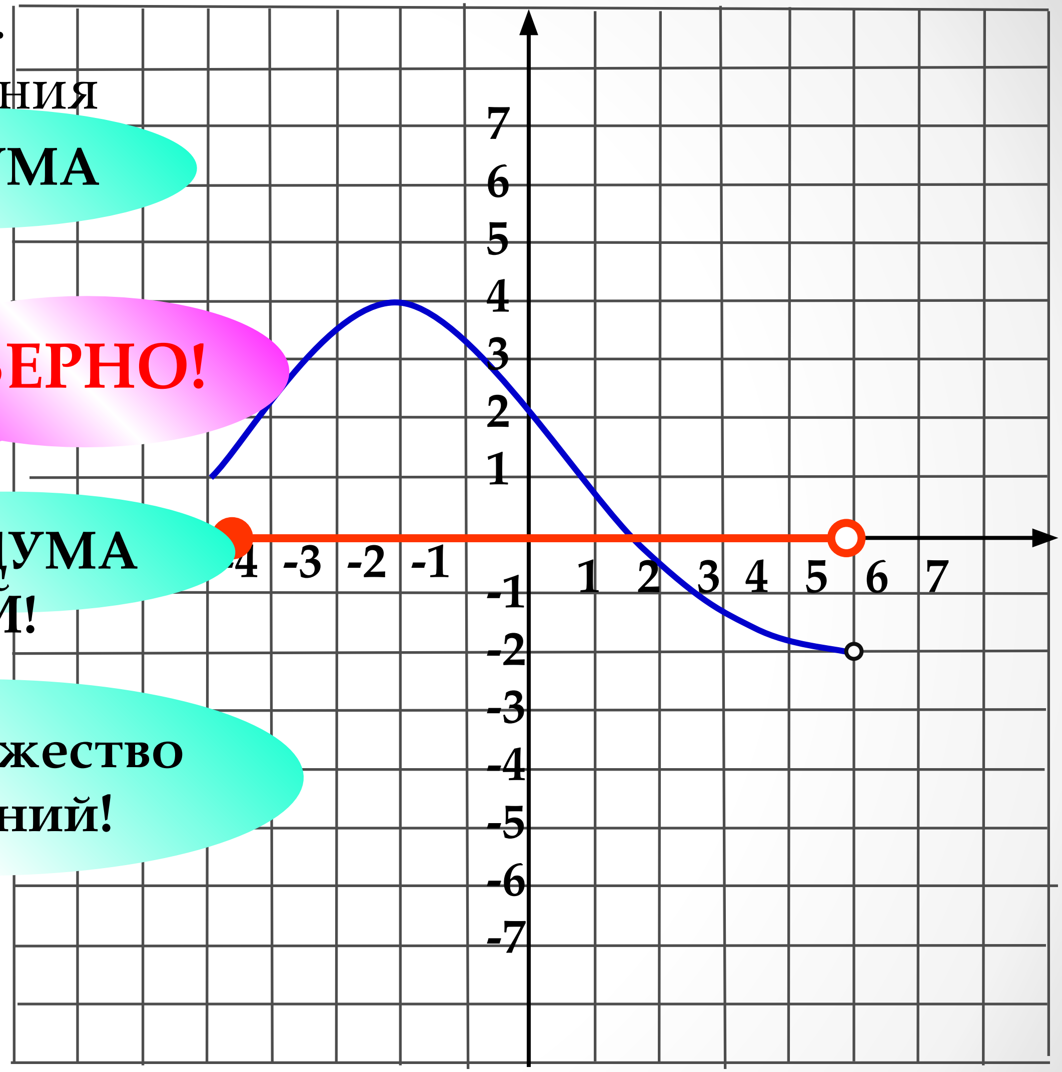
4 (-2; 4]

ПОДУМАЙ!

ВЕРНО!

ПОДУМАЙ!

Это множество значений!



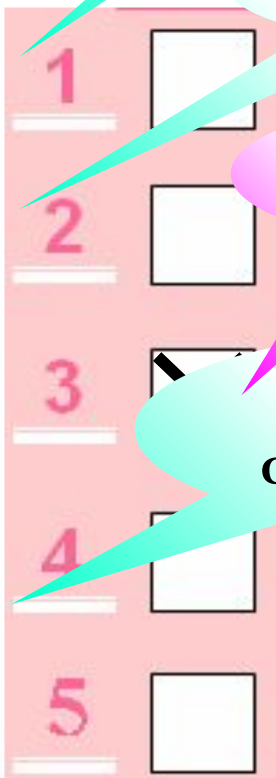
Функция задана графиком. Укажите множество значений этой функции.

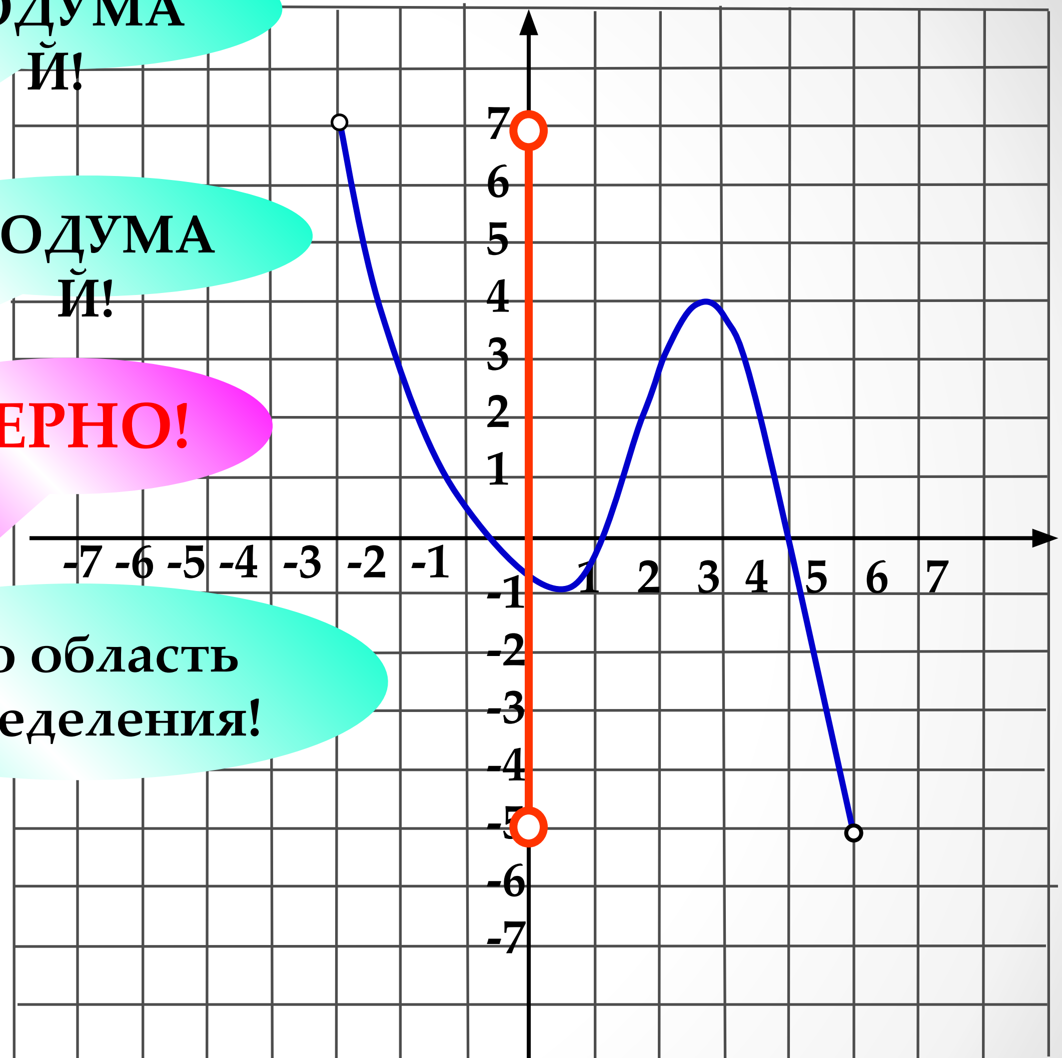
1 [-5; 7]

2 [-3; 5]

3 (-5; 7)

4 (-3; 5)





ПОДУМАЙ!

ПОДУМАЙ!

ВЕРНО!

Это область определения!

В какой из указанных точек производная функции, график которой изображен на рисунке, отрицательна?

ПОДУМАЙ!

1 x_1 В этой точке производная равна нулю!

2 x_2 Угол наклона касательной с осью Ох тупой, значит $k < o$.

ПОДУМАЙ!

3 x_3 В этой точке производная равна нулю!

ПОДУМАЙ!

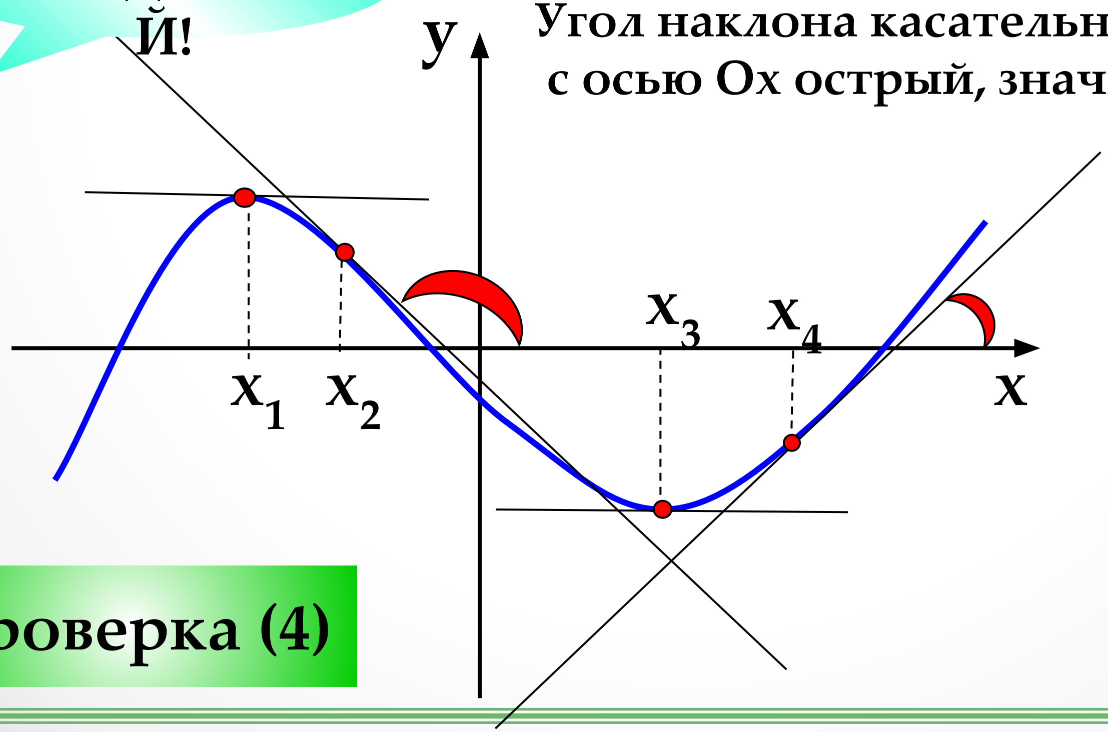
4 x_4 Угол наклона касательной с осью Ох острый, значит $k > o$

Геометрический смысл производной

$k = \operatorname{tg} \alpha$

ВЕРНО!

1	☐
2	☒
3	☐
4	☐
5	☐



Проверка (4)

На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной в точке x_0.

1 **0**

2 **1**

3 **–1**

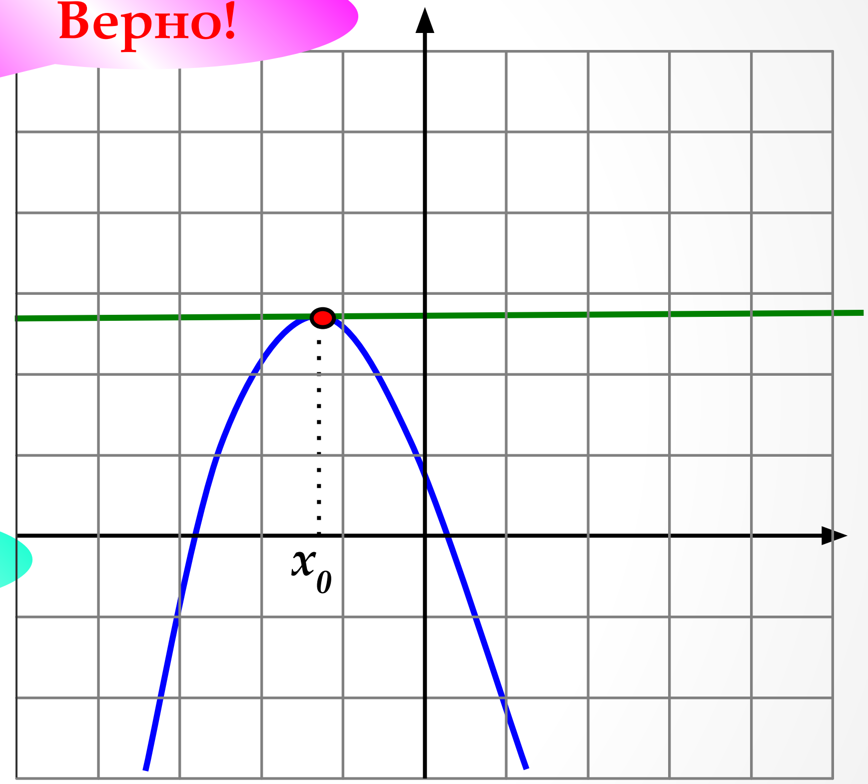
4 **не существует**

Верно!

Подумай!

Подумай!

Подумай!



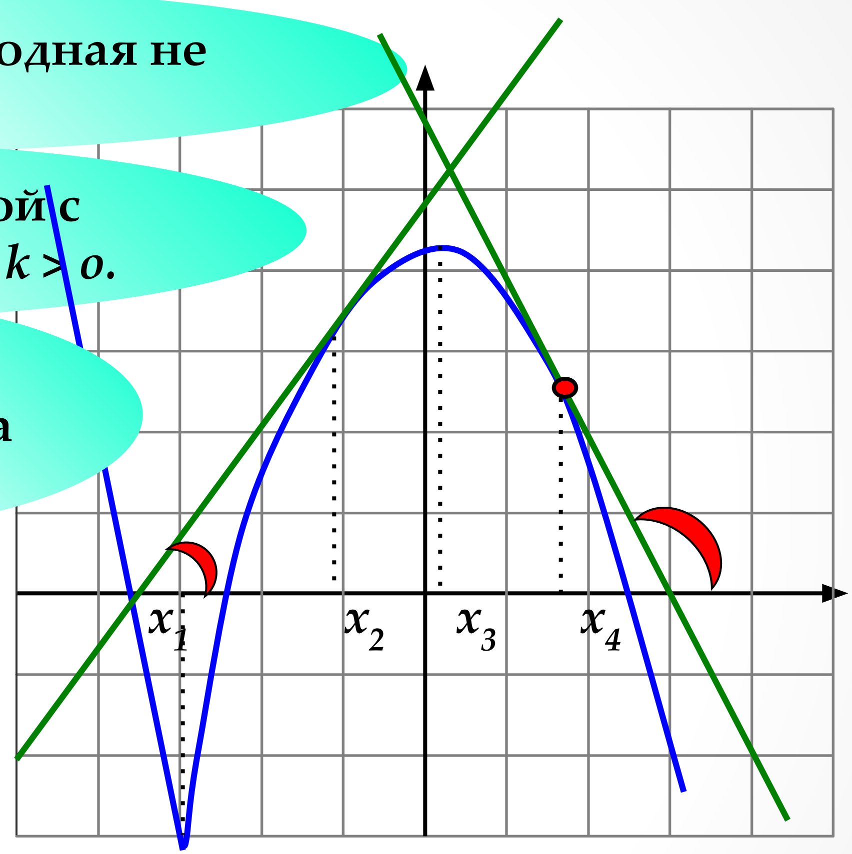
Геометрический смысл производной: **k = tg** α
Угол наклона касательной с осью Ох равен 0 (касательная параллельна оси Ох, значит tg$0^0 = 0$

На рисунке изображен график функции y =f(x).
Укажите в какой точке значение производной отрицатально.

В этой точке производная не существует

Угол наклона касательной с осью Ох острый, значит *k* > *о*.

В этой точке производная равна нулю!



1 x_1

2 x_2

3 x_3

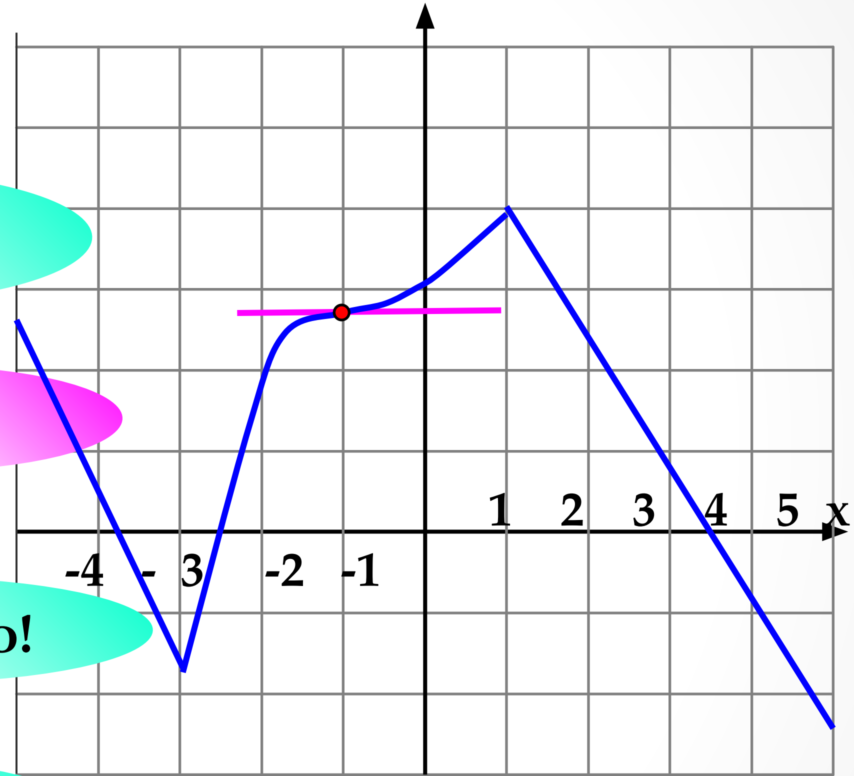
4 x_4 ☒

5 ☐

Верно!

Угол наклона касательной с осью Ох тупой, значит $k < 0$.

На рисунке изображен график функции y =f(x), заданной на промежутке [-5;5]. Укажите точку, в которой производная равна 0.



Не верно!

Верно!

Не верно!

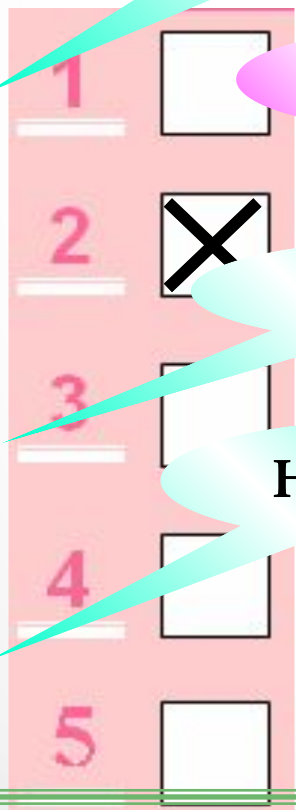
Не верно

1 1

2 -1

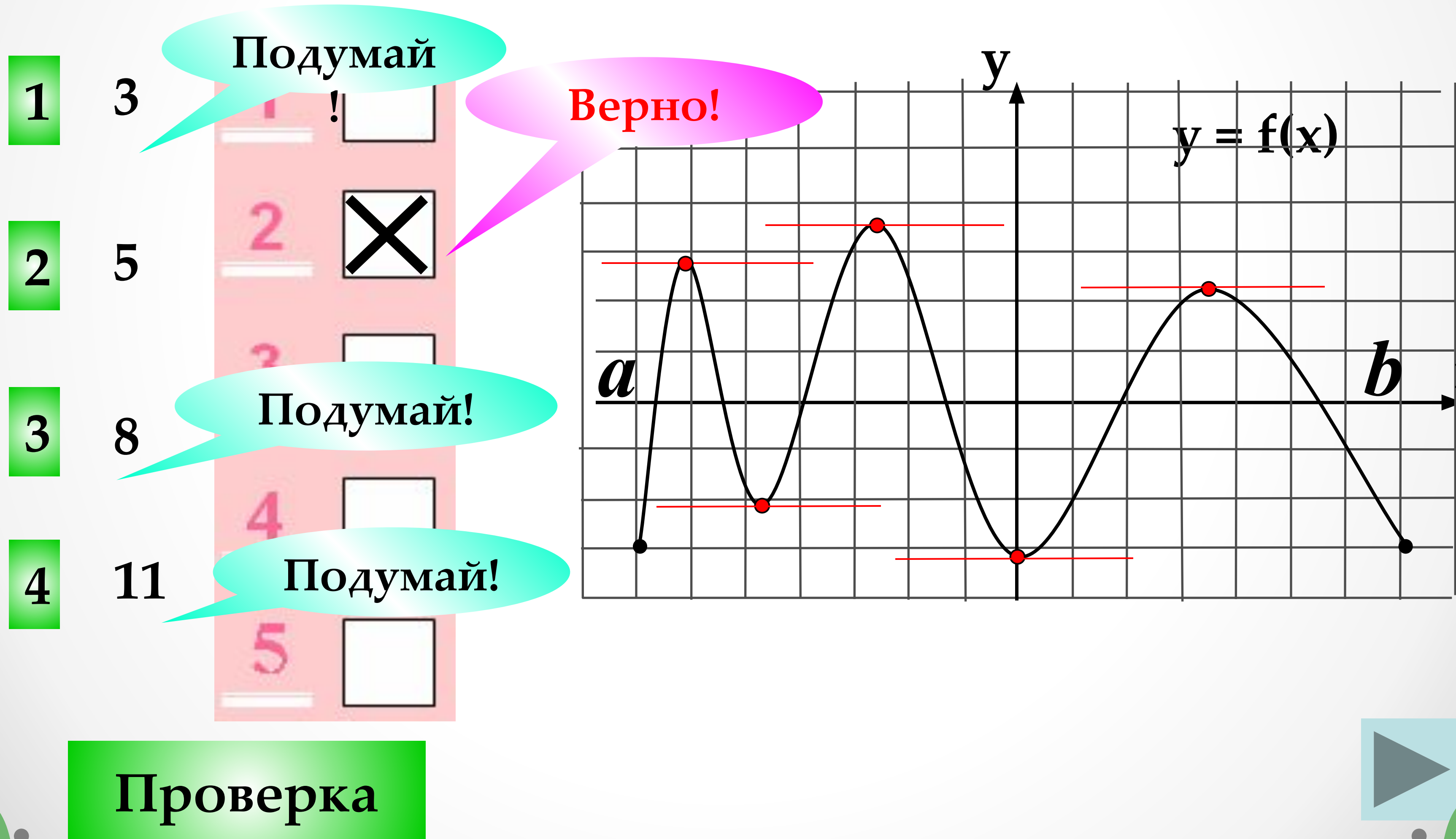
3 1

4 -3



Непрерывная функция y = f(x) задана на отрезке $[a;b]$

На рисунке изображен ее график. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ох.



На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной в точке x_0.

1 –5

2 –1

3 5

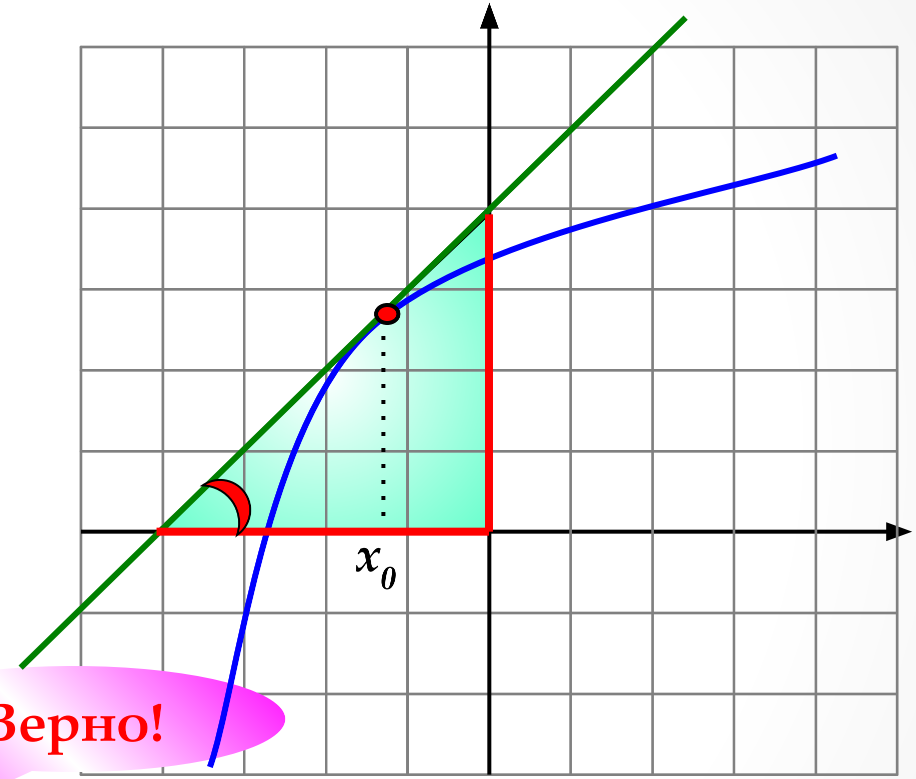
4 1

Подумай!

Подумай!

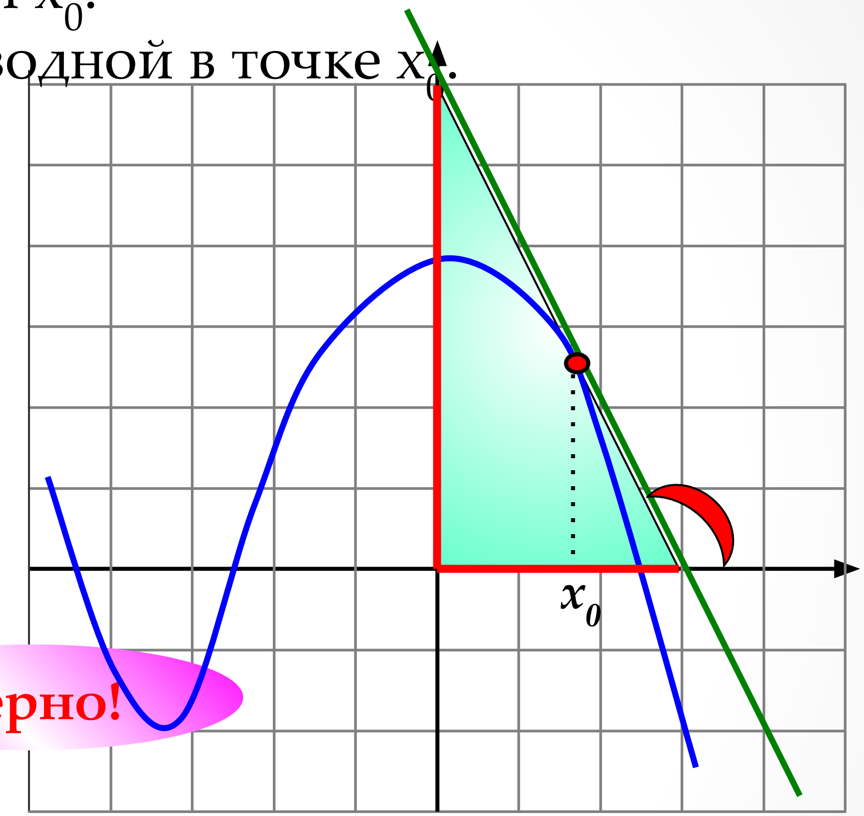
Подумай!

Верно!



Геометрический смысл производной: **k = tg** α
Угол наклона касательной с осью Ox острый, значит ***k >o.***
Из прямоугольного треугольника находим tgα = 4 : 4 =1

На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная
к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной в точке x_0.



Подумай!

1 0,5

Подумай!

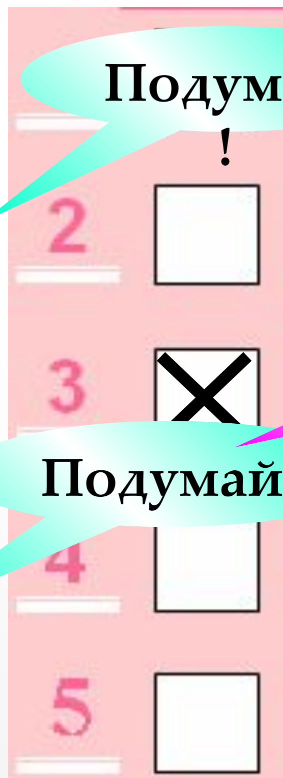
2 –0,5

3 –2

Верно!

Подумай!

4 2

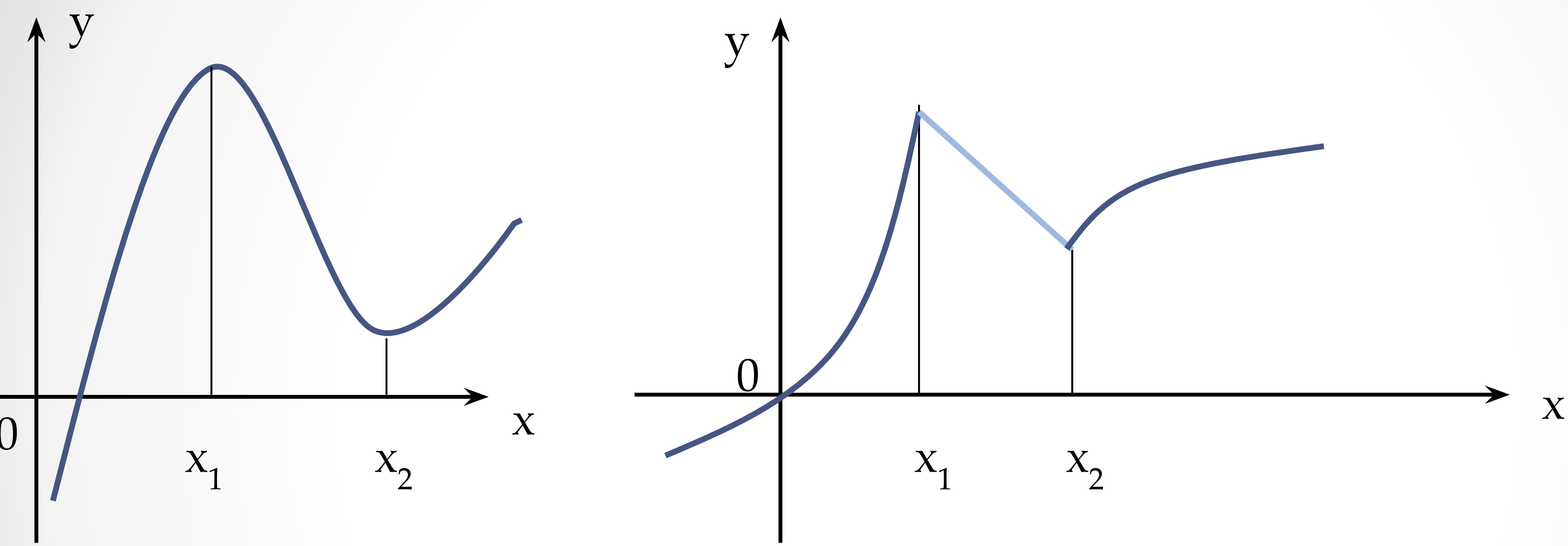


Геометрический смысл производной: **k = tg** α
Угол наклона касательной с осью Ox тупой,
значит ***k < o.***
Из прямоугольного треугольника
находим tgα = 6 : 3 =2. Значит, k= -2

Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!

Критические точки функции, максимумы и минимумы.

Определение: Внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называются критическими точками этой функции.



Теорема Ферма (необходимое условие экстремума)

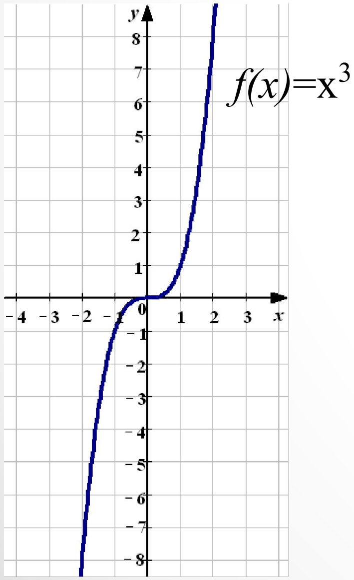
Если точка x_0 является точкой экстремума функции *f* и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$. По определению производной отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, а следовательно, и само будет положительно при всех x, достаточно близких к x_0. Для таких x $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, и значит $f(x) > f(x_0)$ для всех $x > x_0$ из некоторой окрестности точки x_0. Поэтому x_0 не является точкой максимума.

Если же $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, и, следовательно, x_0 не может быть и точкой минимума f.

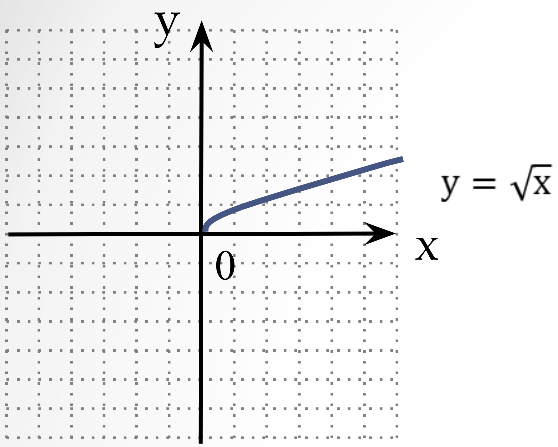
Случай $f'(x_0)<0$ разбирается аналогично.

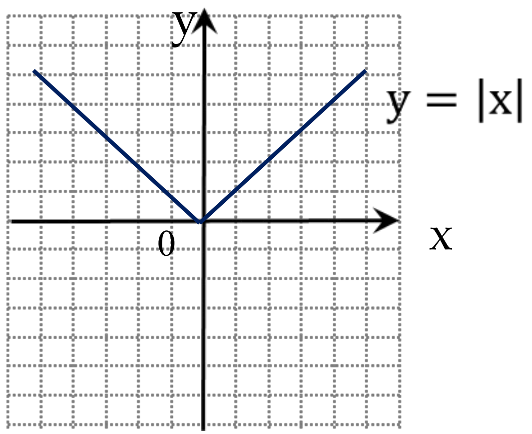


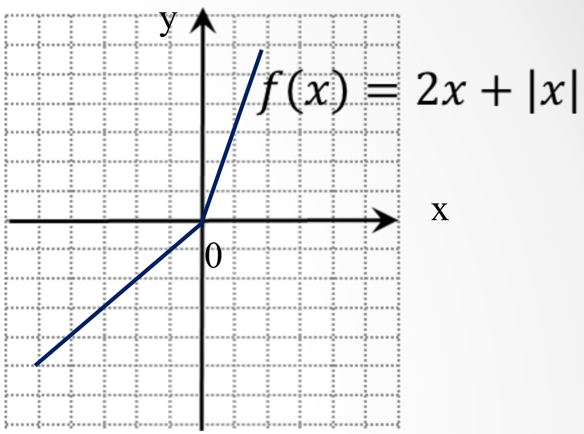
Важно! Теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.

Например, производная $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.

Рассмотрим критические точки, в которых производная не существует. Точка 0 для функции $y = \sqrt{x}$ не является критической; в ней производная не существует, но она не является внутренней точкой области определения функции.







Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0. Значит, 0 – критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + |x|$. По графику видно, что в точке 0 эта функция не имеет экстремума. В этой точке функция не имеет и производной.

Достаточные условия существования экстремума в точке.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$, а $f'(x_0) > 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x_0) < 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума.

Доказательство.

Производная $f'(x_0) > 0$ на интервале $(a;x_0)$, а функция f непрерывна в точке x_0, следовательно функция f возрастает на промежутке $(a;x_0]$, и потому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a;x_0)$.
На промежутке $[x_0;b)$ функция f убывает, и потому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0;b)$

Итак, $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a;b)$, то есть x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x_0) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x_0) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 есть точка минимума.

Пример. Найдем точки экстремума функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение.

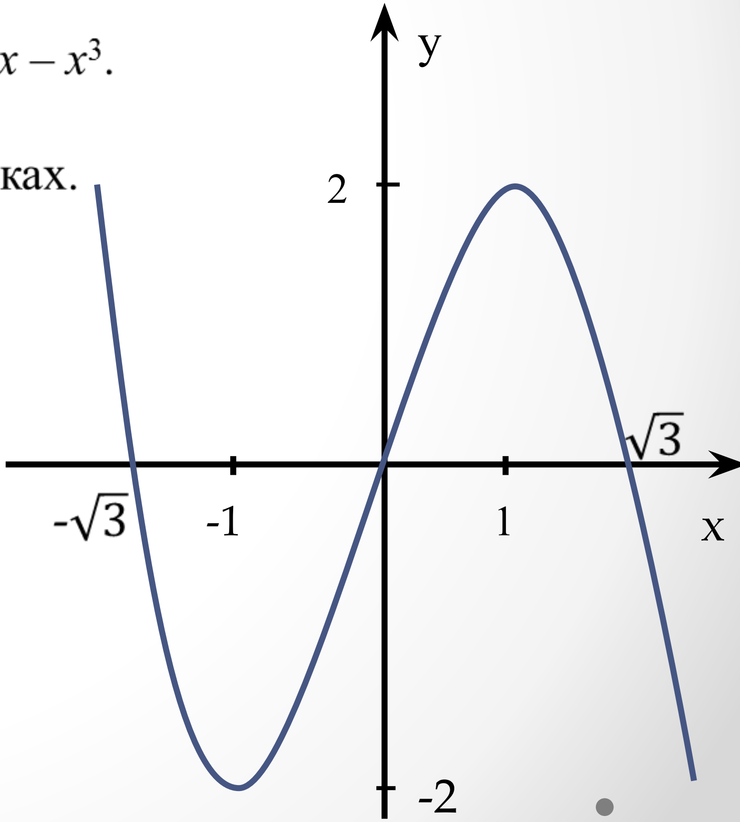
$f'(x) = 3 - 3x^2$. Производная определена во всех точках.

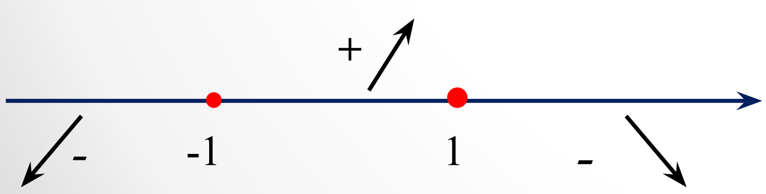
$f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$

$3x - x^3 = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$

$x = -1$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума,

$f(1) = 2$, $f(-1) = -2$





Закрепление изученного*:*

Решить № 292

Задание на дом*:* п.*23,* № *288, 290*

СПАСИБО ЗА УРОК!

Математический диктант -автор Савченко Е.М.

http://www.it-n.ru/profil.aspx?cat_no=692&d_no=9658