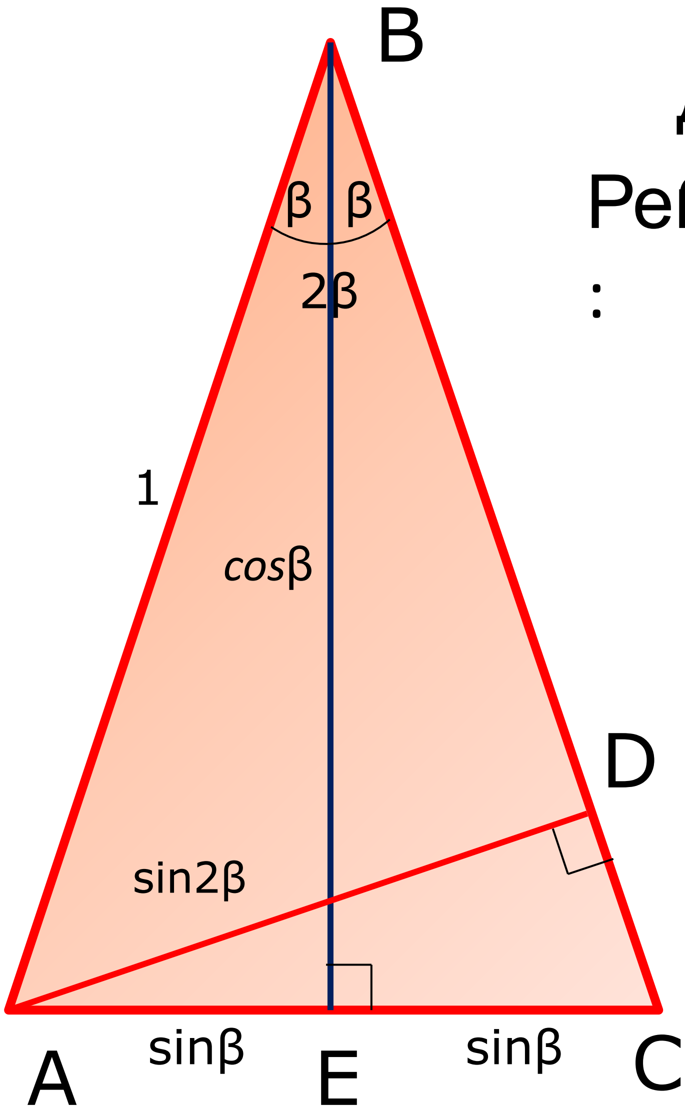


Доказать, что sin2β=2sinβ cosβ

Решение:

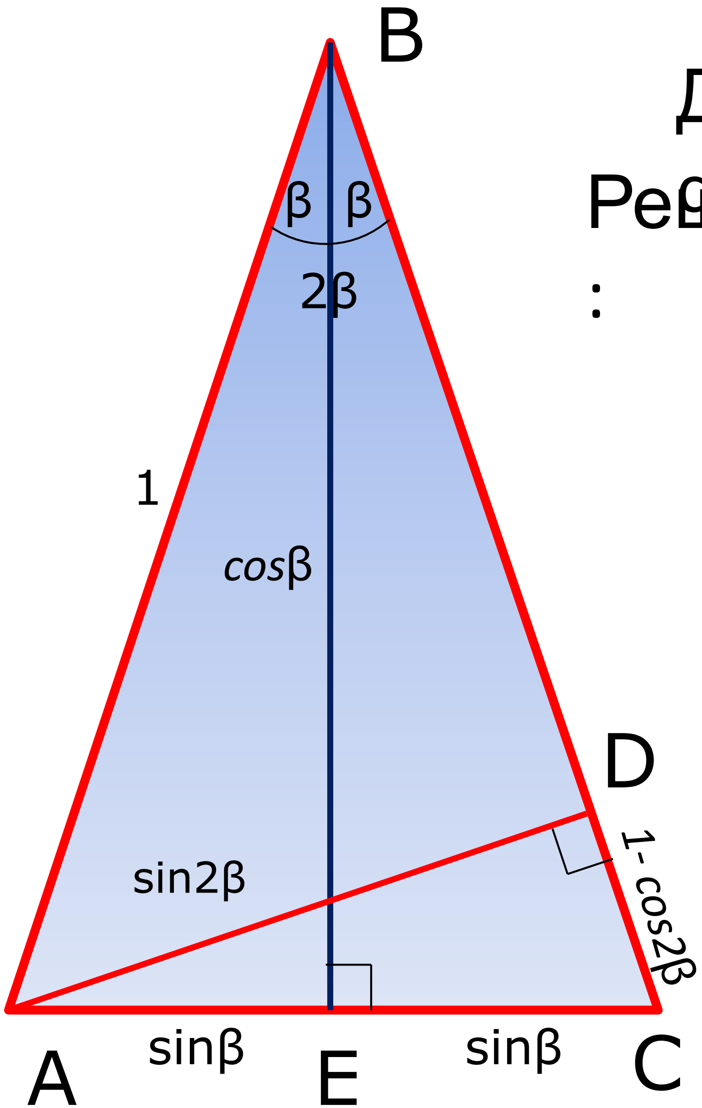
Пусть AB=1, тогда AD=sin 2β,

AE=EC=sinβ, BE= cosβ

ΔADC ~ΔBEA по двум углам

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{AD}\quad \text{т.е.}\quad \frac{1}{2\sin\beta}=\frac{\cos\beta}{\sin 2\beta}$$

откуда sin2β=2sinβ cosβ



Доказать, что sin2β=2sinβ cosβ

Решение:

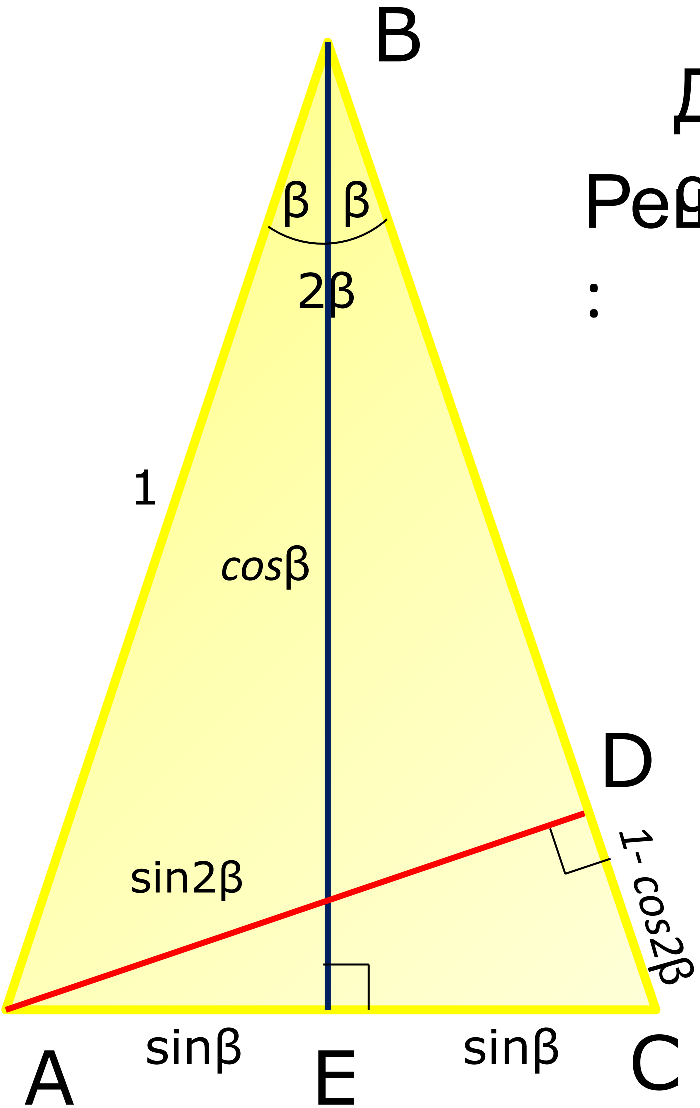
Пусть AB=1, тогда AD=sin 2β,

AE=EC=sinβ, CD=1–cos2β

ΔADC ~ΔBEA по двум углам

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{CD} \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2\sin\beta}=\frac{\sin\beta}{1-\cos 2\beta}$$

откуда 1-cos2β=2sin²β



Доказать, что sin2β=2sinβ cosβ

Решение:

Пусть AB=1, тогда AD=sin 2β,

AE=EC=sinβ, CD=1−cos2β

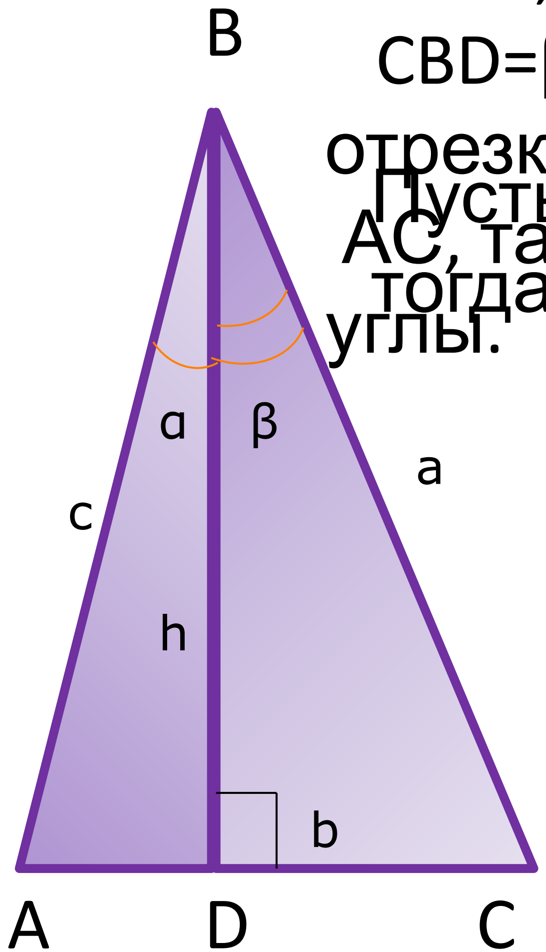
ΔADC ~ΔBEA по двум углам

Так как $tg\alpha = \frac{CD}{AD}$ *, то*

$$tg\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Доказать, что sin(α+β)=sinα cosβ+cosα sinβ

Рассмотрим ΔABC , в котором BD ⊥ AC ABD=α,
CBD=β. Точка D –внутренняя точка отрезка AC, так как по условию α и β – острые углы.



Пусть AB=c BC =a, AC=b, и BD=h, тогда

$$S_{\nabla ABC} = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_{\nabla ABC} = S_{\nabla ABD} + S_{\nabla CBD}$$

$$S_{\nabla ABD} = \frac{1}{2} ch \sin\alpha = \frac{1}{2} c \sin\alpha \cdot a\cos\beta = \frac{1}{2} ac \sin\alpha \cos\beta$$

$$S_{\nabla CBD}=\frac{1}{2}ah\sin\beta=\frac{1}{2}a\sin\beta\cdot c\cos\alpha=\frac{1}{2}ac\cos\alpha\sin\beta$$

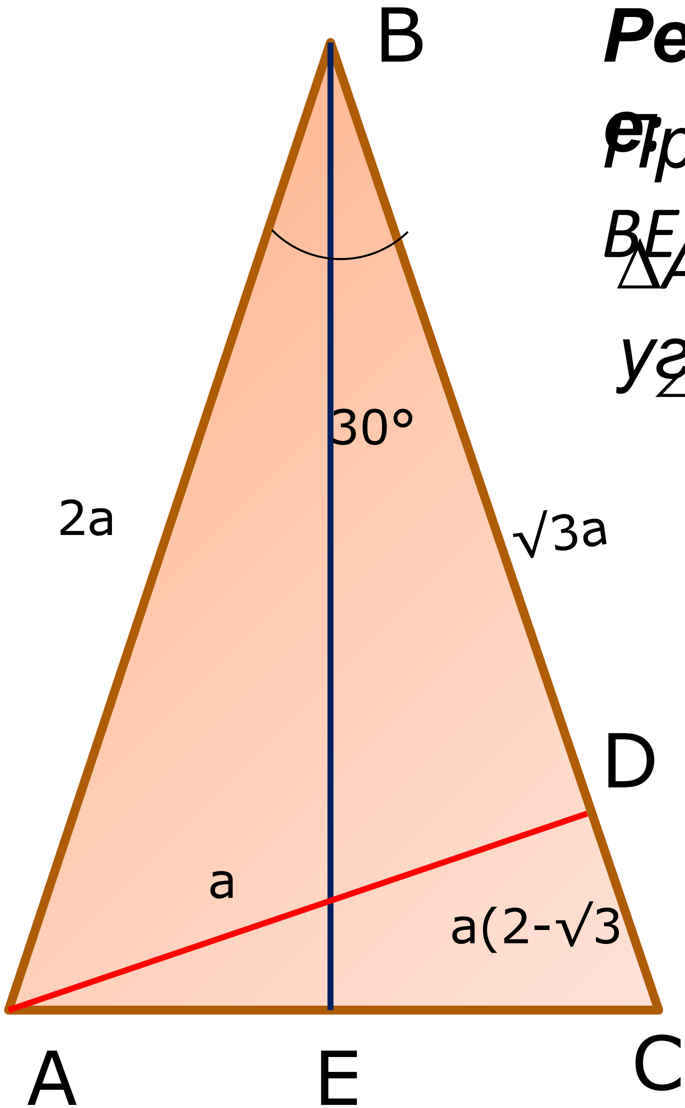
Значит, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Вычислить tg 15°

Решение:

$$tg15^\circ = tg(60^\circ - 45^\circ) = \frac{tg60^\circ - tg45^\circ}{1 + tg60^\circ \cdot tg45^\circ} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$



Решение

Проведем высоты AD и BE

$\Delta ADC \sim \Delta BEC$ по двум углам

$$\angle CAD = \angle CBE = 15^\circ$$

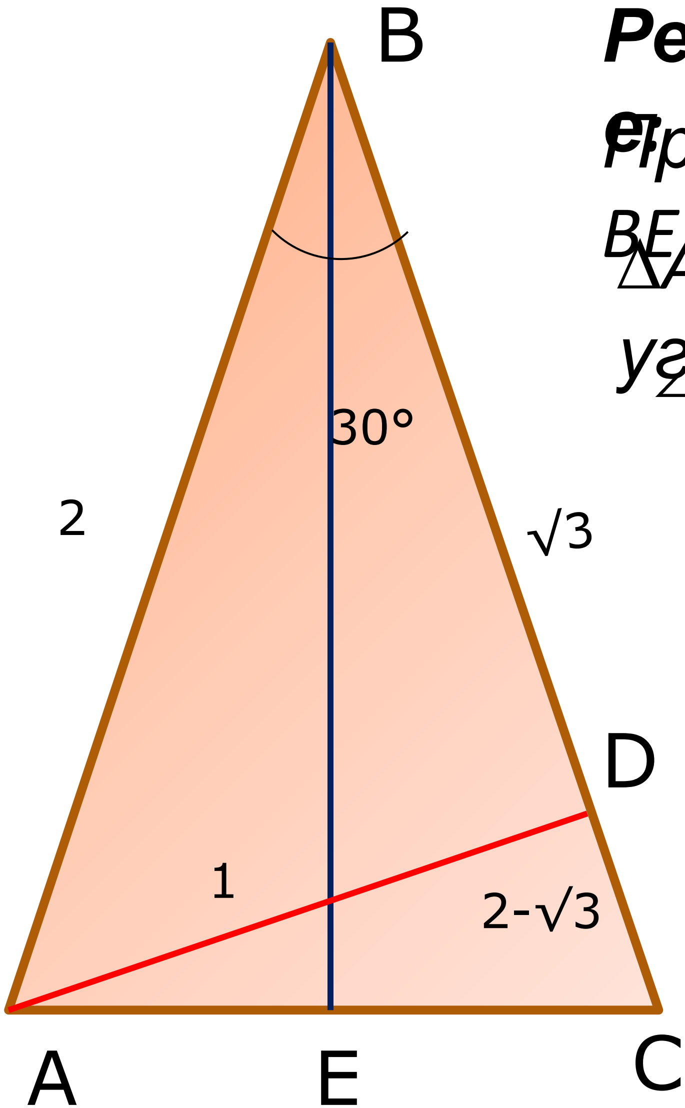
$$tg15^\circ = \frac{CD}{AD}$$

Пусть AD =a, тогда AB=BC=2a, BD=√3a

CD=BC-BD=2a-√3a=a(2-√3)

$$tg15^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{a} = 2-\sqrt{3}$$

Ответ: 2-√3



Решение:

Проведем высоты AD и BE

$\Delta ADC \sim \Delta BEC$ *по двум углам*

$$\angle CAD = \angle CBE = 15°$$

$$tg15° = \frac{CD}{AD}$$

Пусть AD =a, тогда AB=BC=2a, BD=√3a

CD=BC-BD=2a-√3a=a(2-√3)

$$tg15° = \frac{CD}{AD} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{a} = 2-\sqrt{3}$$

Ответ: 2-√3

Задача. *Вычислить tg 22° 30´*

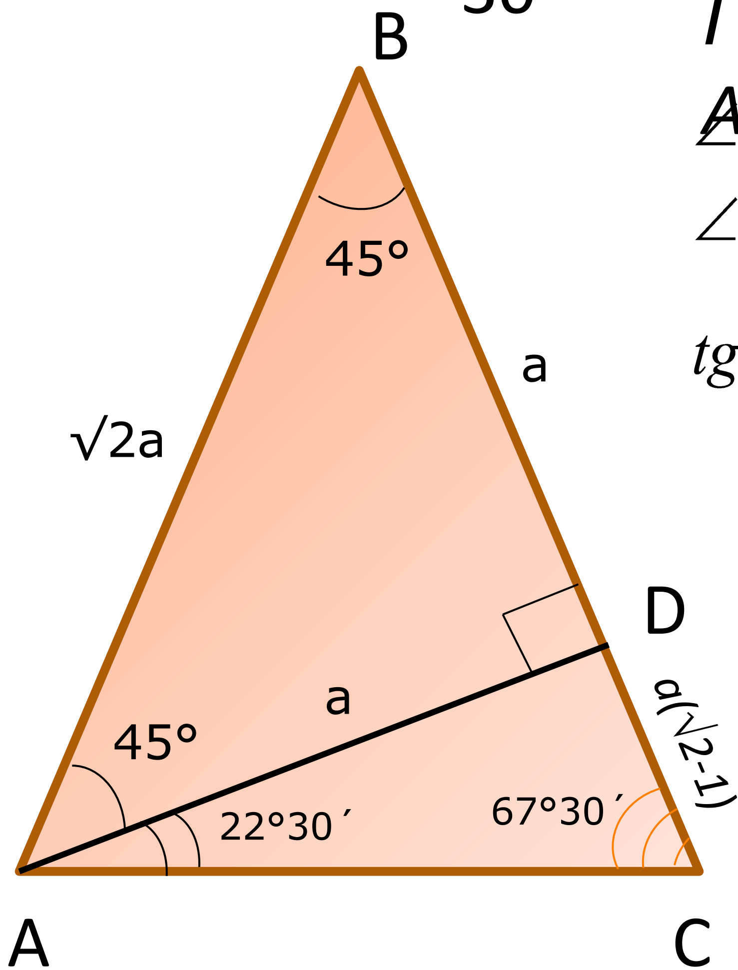
$$|tg\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$tg22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}-1$$

$$tg\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$tg22°30' = \frac{1-\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

Задача. Вычислить tg 22° 30´



Проведем высоту AD

$$\angle BCA = (180° - 45°) : 2 = 67°30',$$

$$\angle CAD = 22°30'$$

$$tg\,22°30' = \frac{CD}{AD}$$

Пусть AD=a, тогда BD=a,
AB=BC=√2a, DC=a(√2-1)

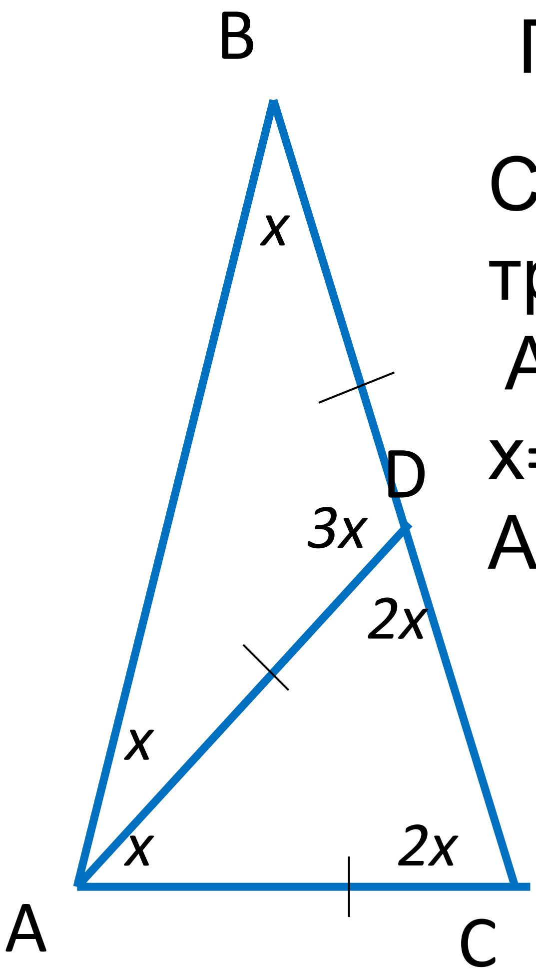
$$tg\,22°30' = \frac{CD}{AD} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a} = \sqrt{2}-1$$

Ответ: √2-1

Доказать тождество cos 36°-cos72° =0,5

Решение:

Пусть ABC=x,



Суммы внутренних углов треугольников

ABC, ACD и ABC равны по 5x, т.е

x=36°. BC=BD+D

ABC=36°, ADC=72°

Если BD=1, то

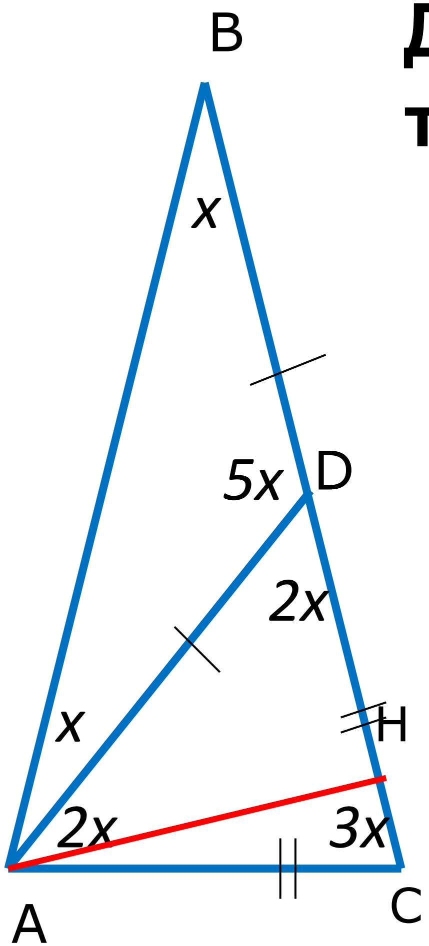
AB=2cos36°

и CD=2cos 72°

AB=BC, тогда

2cos 36°=1+2cos 72°

cos36°-cos72°= 0,5



Доказать тождество

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}=\frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}+\frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$$

Решение:

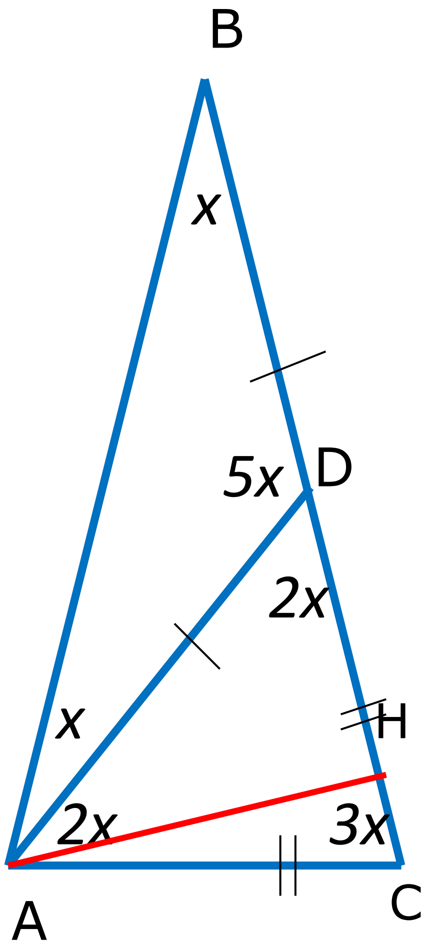
BC=BD+DC

Пусть $\angle$ ABC = x. Т.к.треугольники ABC, ABD, ACD –равнобедренные, то 7x =180°,

т.е. x= $\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$

Проведем высоту AH. Она является общей высотой для треугольников ABD, ADC и ABC.

Пусть AH=1



$$Из\nabla ABH : AB = BC = \frac{AH}{\sin\angle ABH} = \frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}}$$

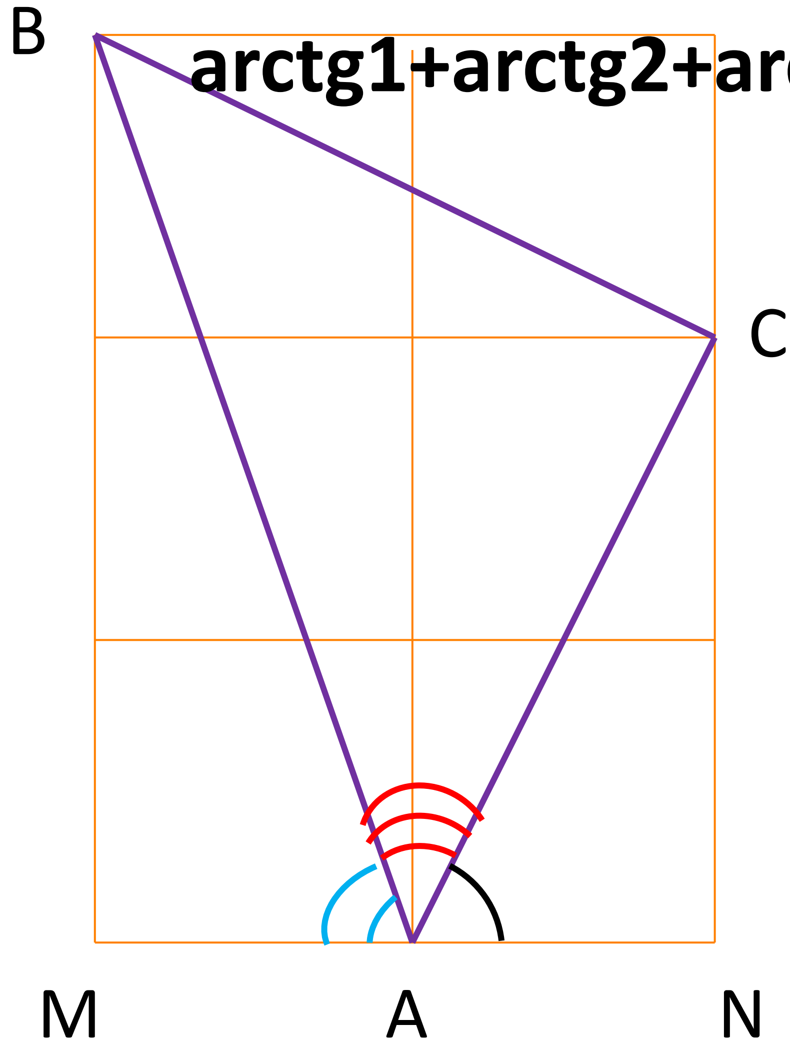
$$Из\nabla ADH : BD = AD = \frac{AH}{\sin\angle ADH} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}}$$

$$Из\nabla ACH : DC = AC = \frac{AH}{\sin\angle ACH} = \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}}$$

Т.к BC=BD+DC,то

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}}$$

Вычислить arctg1+arctg2+arctg3



Используя клеточный фон, получим

arctg3= BAM

Arctg2= CAN

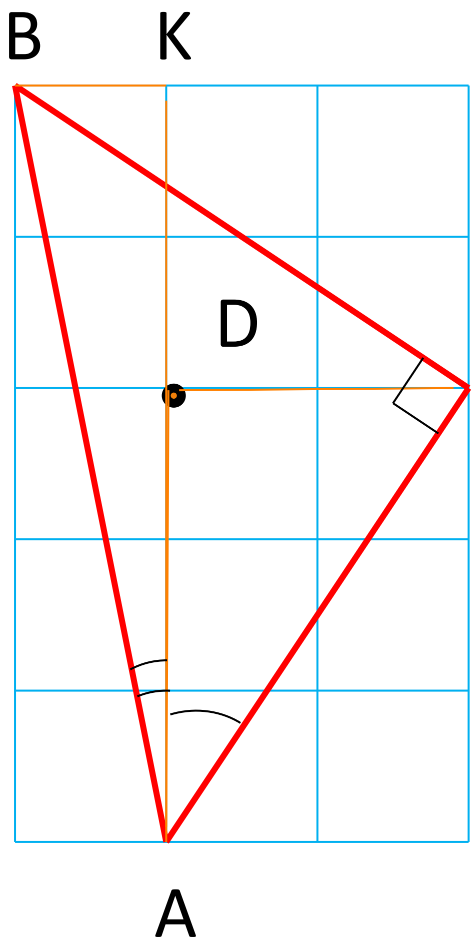
Arctg1= BAC

(BAC – острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC

Итак,

arctg1+arctg2+arctg3 = π

Вычислить arctg $\frac{2}{3}$ + arcctg 5



Из ΔCAD: arctg = $\angle$CAD

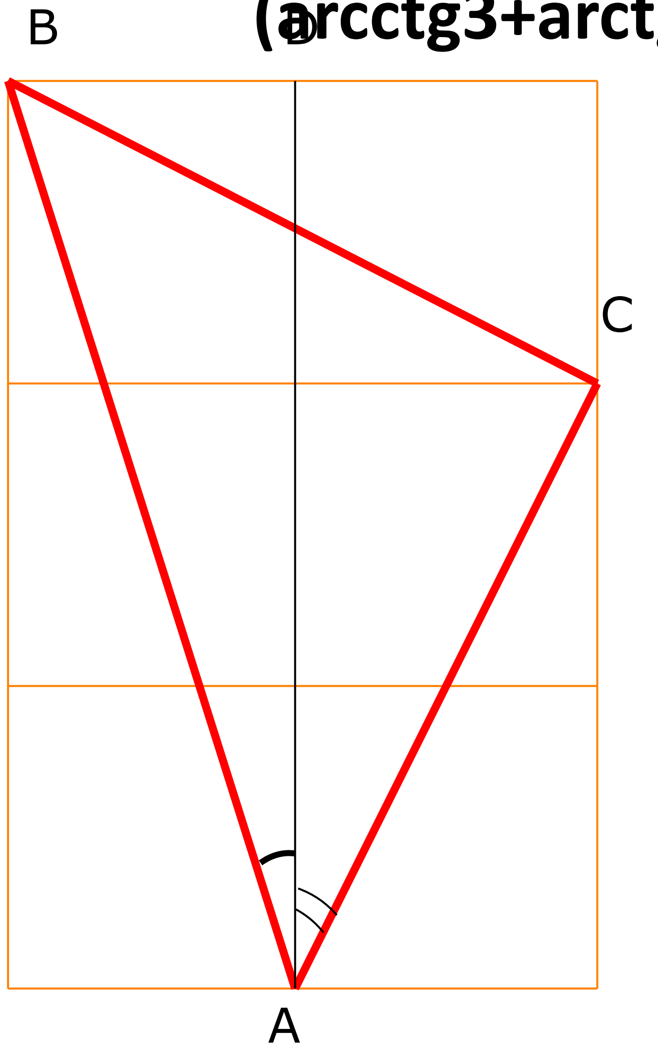
Из ΔABK: arcctg5= $\angle$BAD

$\angle$BAC – острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, $\frac{2}{3}$ $\angle$ $\frac{\pi}{4}$

поэтому

arctg + arcctg 5 =

Вычислите cos (arcctg3+arctg0,5)



ctg∠ DAB=3, tg∠ DAC=0,5

Треугольник ABC – равнобедренный с прямым углом ACB.

Значит

arcctg 3+arctg0,5 = $\frac{\pi}{4}$

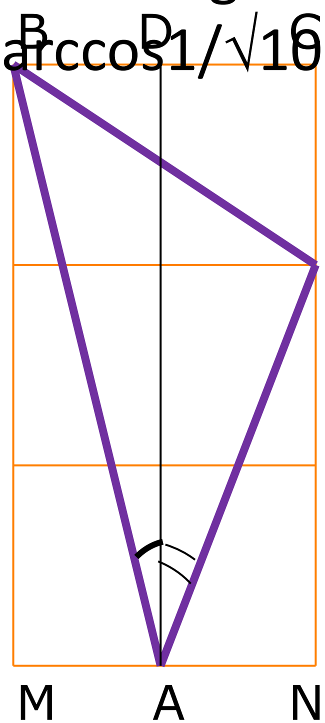
cos(arcctg3+arctg0,5)=√2/2

Ответ: √2/2

Вычислить tg (arcsin $\frac{2}{\sqrt{5}}$ + arccos $\frac{1}{\sqrt{10}}$)

Т.к. 2/√5>0, то можно считать, что arcsin2/√5 - это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов
равно 1:2. Тогда величину этого угла можно рассматривать как arctg 2. Аналогично рассуждая, получим
arccos1/√10=arctg3. $\angle$MAB = arctg3, $\angle$ NAC=arctg2,

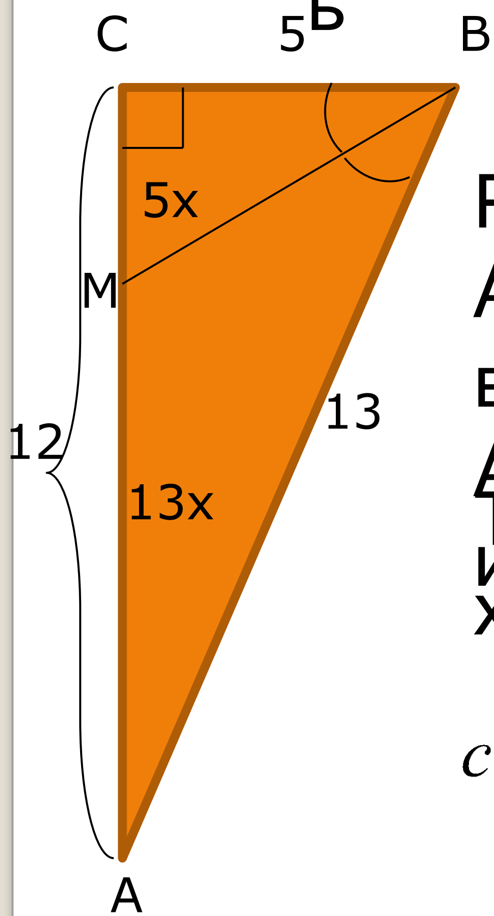
а их сумма равна $\pi - \frac{\pi}{4}$



$$tg\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + arr\cos\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

Ответ: -1

Вычислить $ctg\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$



Решение.

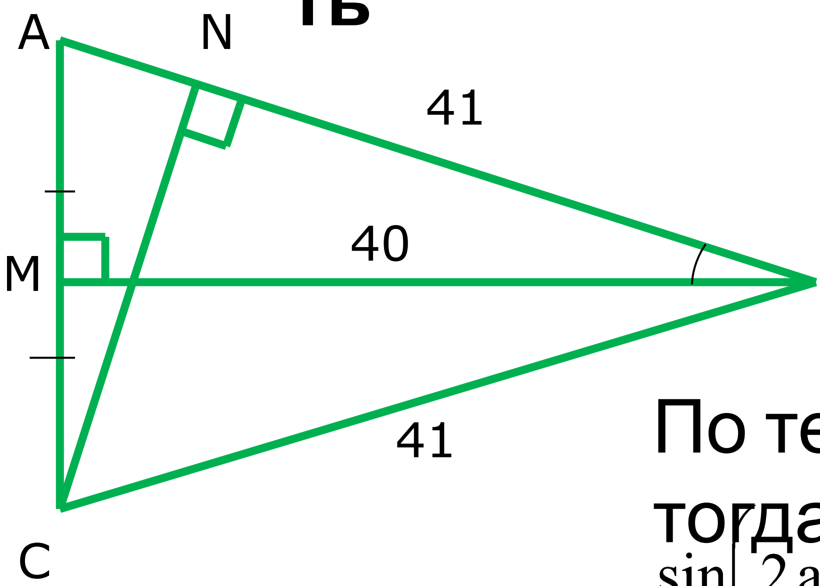
Рассмотрим треугольник ABC,
в котором ACB=90°,BC=5, AB=13
и BM- биссектриса ABC.

Тогда MC=5x, AM=13x, AC=12, т.е x=2/3

$$ctg\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)=\frac{BC}{MC}=\frac{5}{5x}=\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

Ответ: 1,5

Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right)$



Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (AB=BC=41),

BM ⊥ AC, CN ⊥ AB.

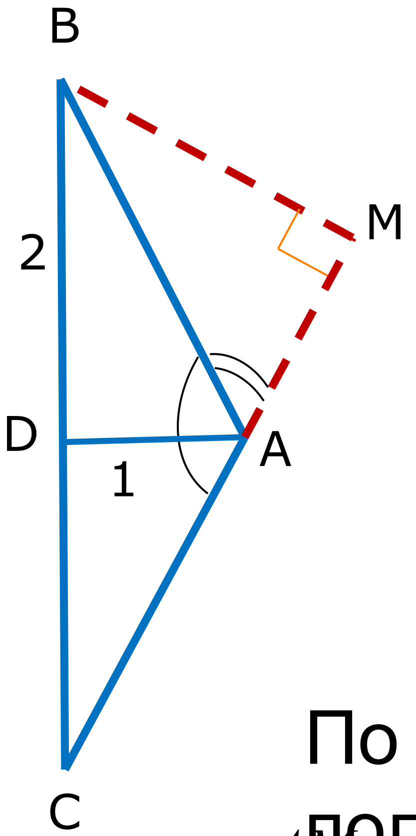
По теореме Пифагора AM=9, тогда

$$\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right)=\frac{CN}{BC}$$

$$BC=41, CN=\frac{AC\cdot BM}{AB}=\frac{2\cdot 9\cdot 40}{41}=\frac{720}{41}$$

$$\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right)=\frac{720}{1681}$$

Ответ: $\frac{720}{1681}$



Вычислить cos (2arctg 2)

В треугольнике BAC $\angle$ BAC =2arctg2.

Этот угол тупой, т.к. arctg2>arctg1= $\frac{\pi}{4}$.

Значит $\cos(2arctg2) = -\cos\angle BAM$

$$\cos\angle BAM = \frac{AM}{AB}$$

По теореме Пифагора из ΔBAM получаем: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$, а из Δ ABD AB=√5.

$$BM = \frac{2S_{\nabla ABC}}{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$AM = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(2arctg2) = -\cos\angle BAM = -\frac{3}{\sqrt{5}} : \sqrt{5} = -\frac{3}{5}$$

Ответ: -3/5