

Доказать, что $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cos\beta$

Решение

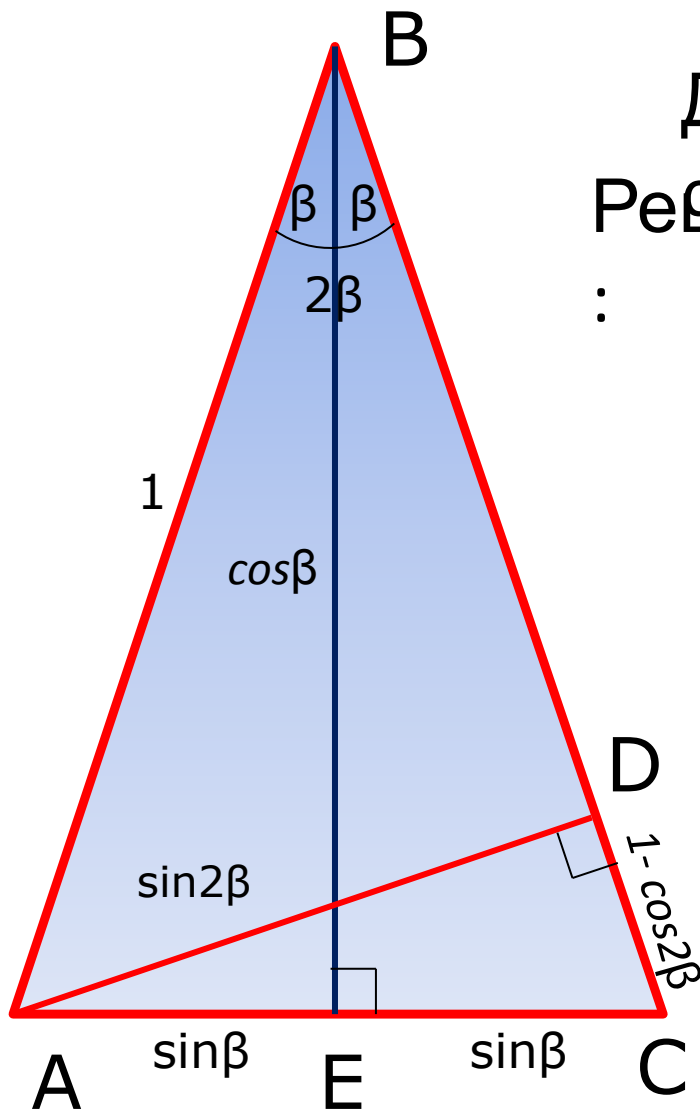
: Пусть $AB=1$, тогда $AD=\sin 2\beta$,

$AE=EC=\sin\beta$, $BE=\cos\beta$

$\triangle ADC \sim \triangle BEA$ по двум углам

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AD} \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin 2\beta}$$

откуда $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cos\beta$



Доказать, что $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cos\beta$

Решение

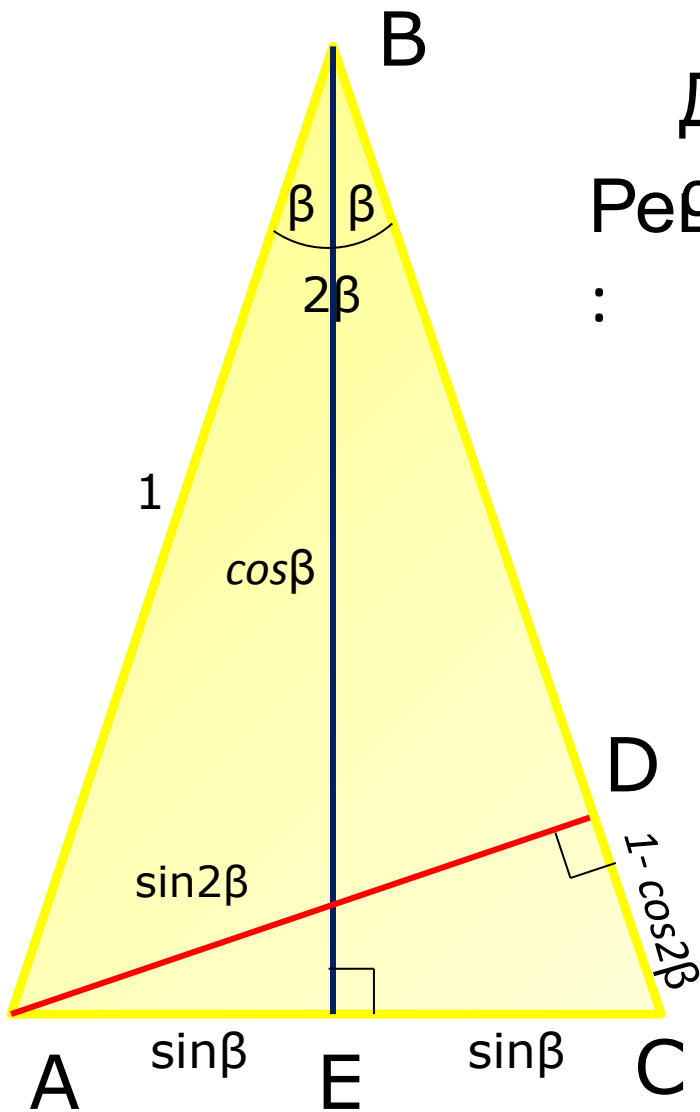
: Пусть $AB=1$, тогда $AD = \sin 2\beta$,

$AE = EC = \sin\beta$, $CD = 1 - \cos 2\beta$
 $\triangle ADC \sim \triangle BEA$ по двум

углам

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{CD} \quad \text{т.е.} \quad \frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{1 - \cos 2\beta}$$

откуда $1 - \cos 2\beta = 2\sin^2\beta$



Доказать, что $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cos\beta$

Решение

: Пусть $AB=1$, тогда $AD=\sin 2\beta$,

$AE=EC=\sin\beta$, $CD=1-\cos 2\beta$
 $\triangle ADC \sim \triangle BEA$ по двум

углам
 Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AD}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Доказать, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

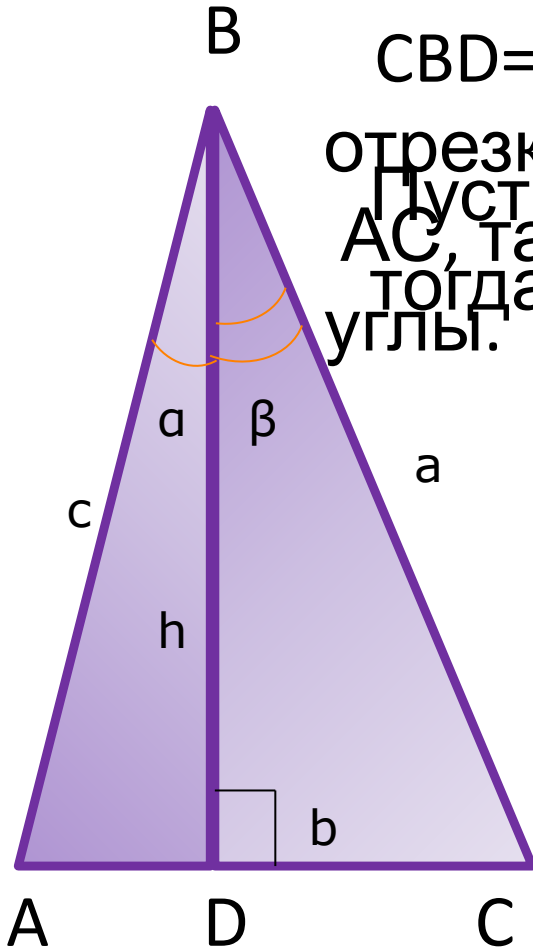
Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $BD \perp AC$

$\angle ABD = \alpha$,

$\angle CBD = \beta$. Точка D – внутренняя точка

отрезка

AC. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, и $BD = h$,
тогда углы α и β – острые



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} ch \sin \alpha = \frac{1}{2} c \sin \alpha \cdot a \cos \beta =$$

$$\frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta$$

$$S_{\nabla CBD} = \frac{1}{2} ah \sin \beta = \frac{1}{2} a \sin \beta \cdot c \cos \alpha = \frac{1}{2} ac \cos \alpha \sin \beta$$

Значит, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

Вычислить tg

15°

Решени

е:

$$tg15^\circ = tg(60^\circ - 45^\circ) = \frac{tg60^\circ - tg45^\circ}{1 + tg60^\circ \cdot tg45^\circ} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Решени

Проведем высоты AD и BE
 $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ по двум

углам $\angle CAD = \angle CBE = 15^\circ$

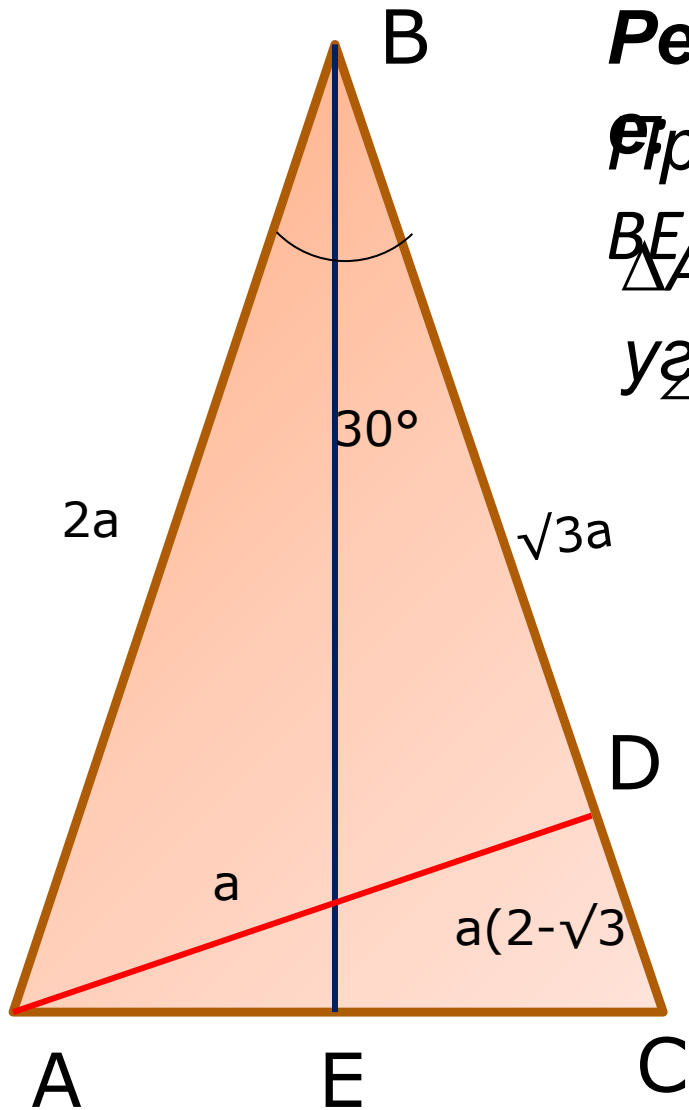
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CD}{AD}$$

Пусть $AD = a$, тогда

$$AB = BC = 2a, \quad BD = \sqrt{3}a$$

$$CD = BC - BD = 2a - \sqrt{3}a = a(2 - \sqrt{3})$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{a} = 2 - \sqrt{3}$$



Ответ: $2 - \sqrt{3}$

Решени

Проведем высоты AD и BE
 $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ по двум

углам $\angle CAD = \angle CBE = 15^\circ$

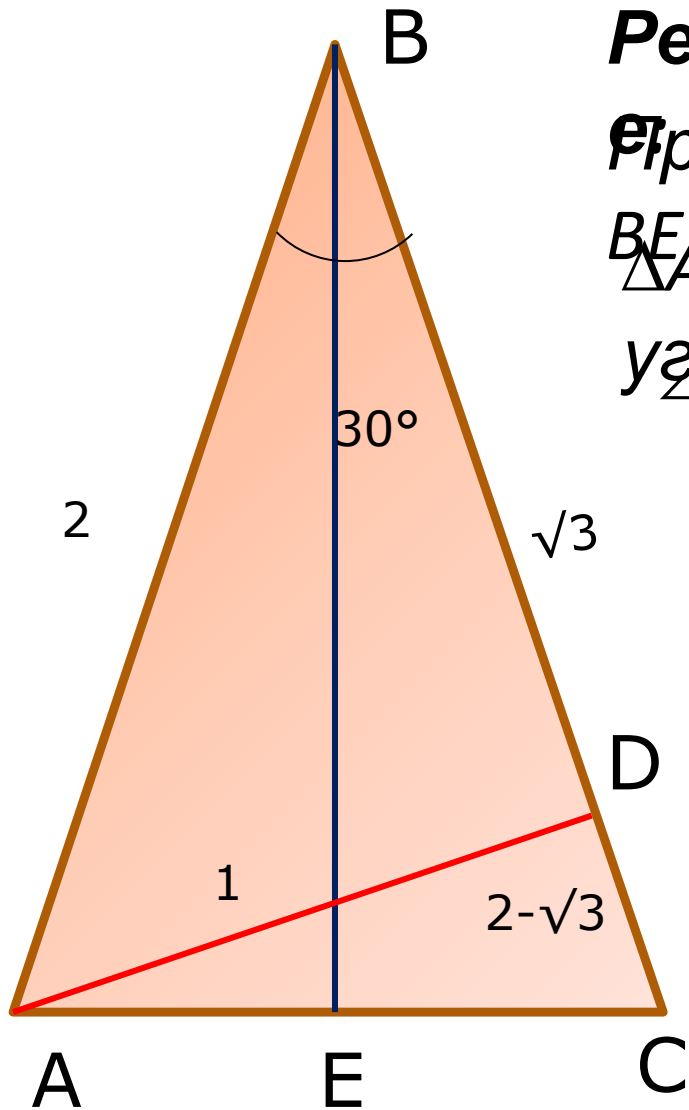
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CD}{AD}$$

Пусть $AD = a$, тогда

$$AB = BC = 2a, \quad BD = \sqrt{3}a$$

$$CD = BC - BD = 2a - \sqrt{3}a = a(2 - \sqrt{3})$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{a} = 2 - \sqrt{3}$$



Ответ: $2 - \sqrt{3}$

Задача. Вычислить $\operatorname{tg} 22^\circ$

$30'$

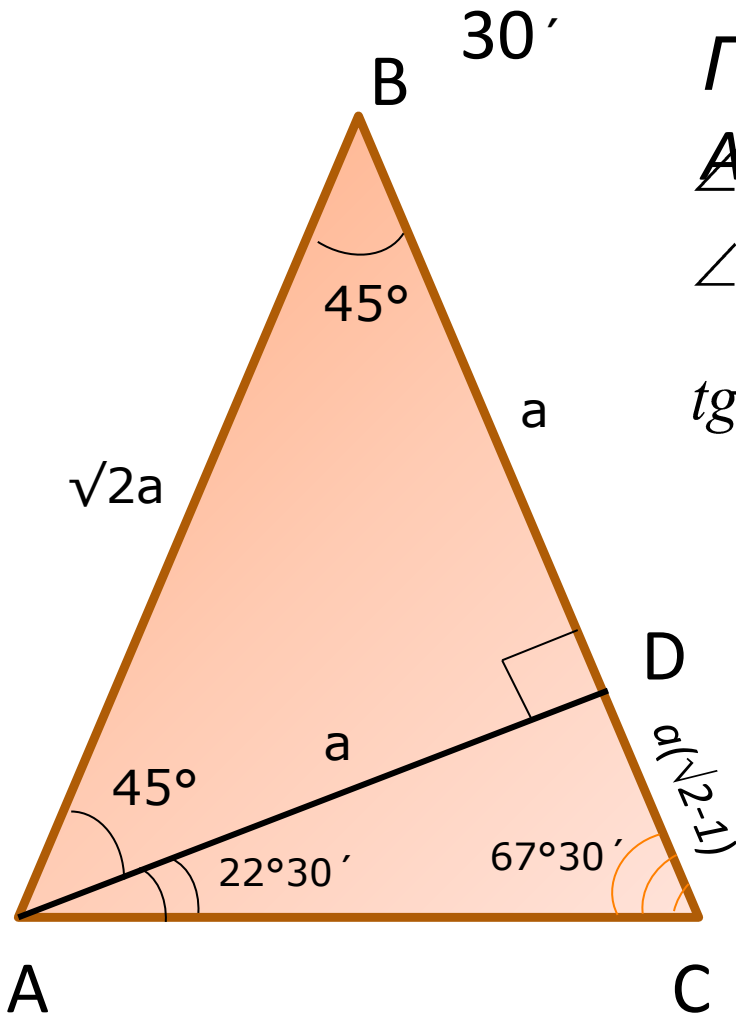
$$|\operatorname{tg} \alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Задача. Вычислить $\operatorname{tg} 22^\circ$



Проведем высоту

$$\angle BSA = (180^\circ - 45^\circ) : 2 = 67^\circ 30',$$

$$\angle CAD = 22^\circ 30'$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{CD}{AD}$$

Пусть $AD=a$, тогда

$$BD=a,$$

$$AB=BC=\sqrt{2}a, DC=a(\sqrt{2}-1)$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{CD}{AD} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a} = \sqrt{2}-1$$

Ответ:

$$\sqrt{2}-1$$

Доказать тождество $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 0,5$

Решение:

Пусть $\angle C = x$,

Суммы внутренних углов
треугольников

$\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и $\triangle BDC$ равны по $5x$, т.е.

$x = 36^\circ$. $BC = BD + DC$

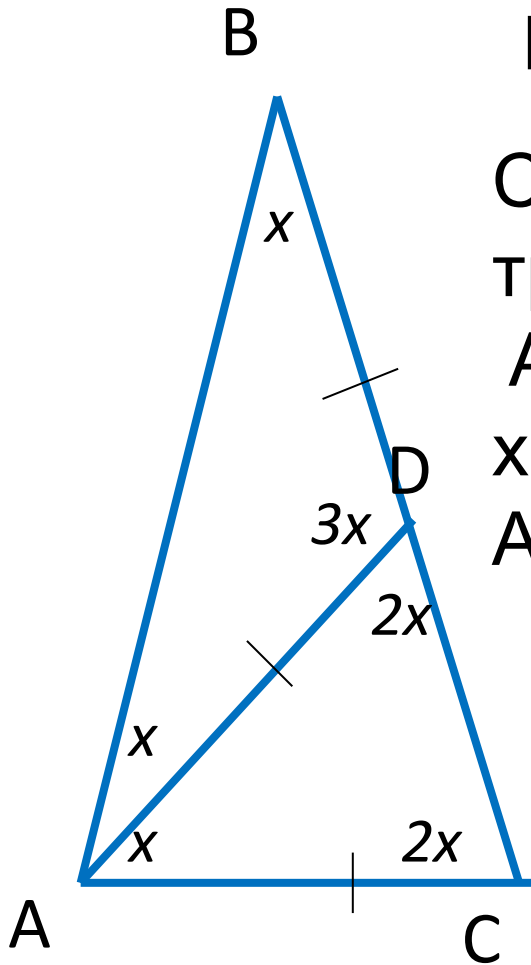
$\angle ABC = 36^\circ$, $\angle ADB = 72^\circ$;
Если $BD = 1$; то

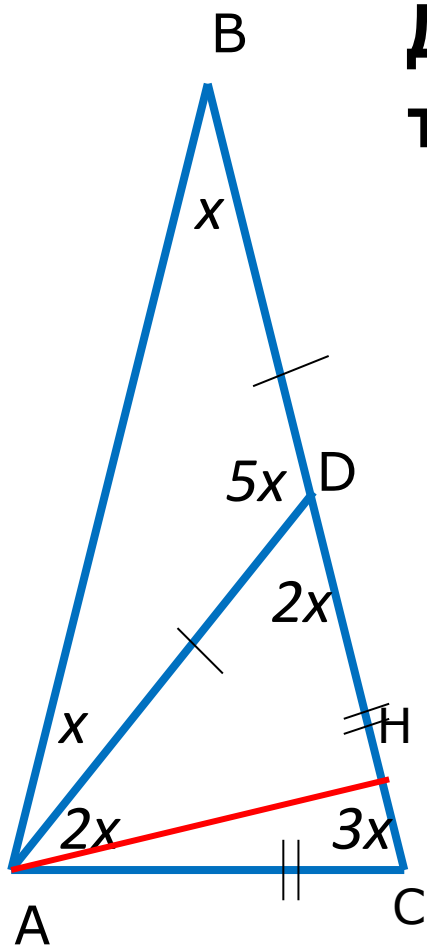
$$AB = 2 \cos 36^\circ$$

$$AB = BC, \text{ тогда}$$

$$2 \cos 36^\circ = 1 + 2 \cos 72^\circ$$

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 0,5$$





Доказать тождество

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}}$$

Решение:

$$BC = BD + DC$$

Пусть $\angle ABC = x$. Т.к. треугольники ABC, ABD,

ACD – равнобедренные, то $7x = 180^{\circ}$,

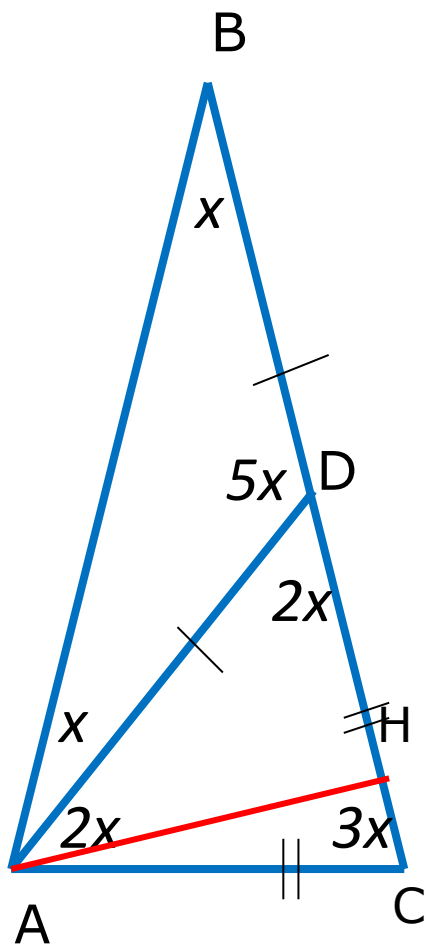
$$\left(25\frac{5}{7}\right)$$

т.е. $x =$

Проведем высоту AN. Она является общей

высотой для треугольников ABD, ADC и ABC.

Пусть AN = 1



$$\text{ИЗ } \nabla ABH : AB = BC = \frac{AH}{\sin \angle ABH} = \frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}$$

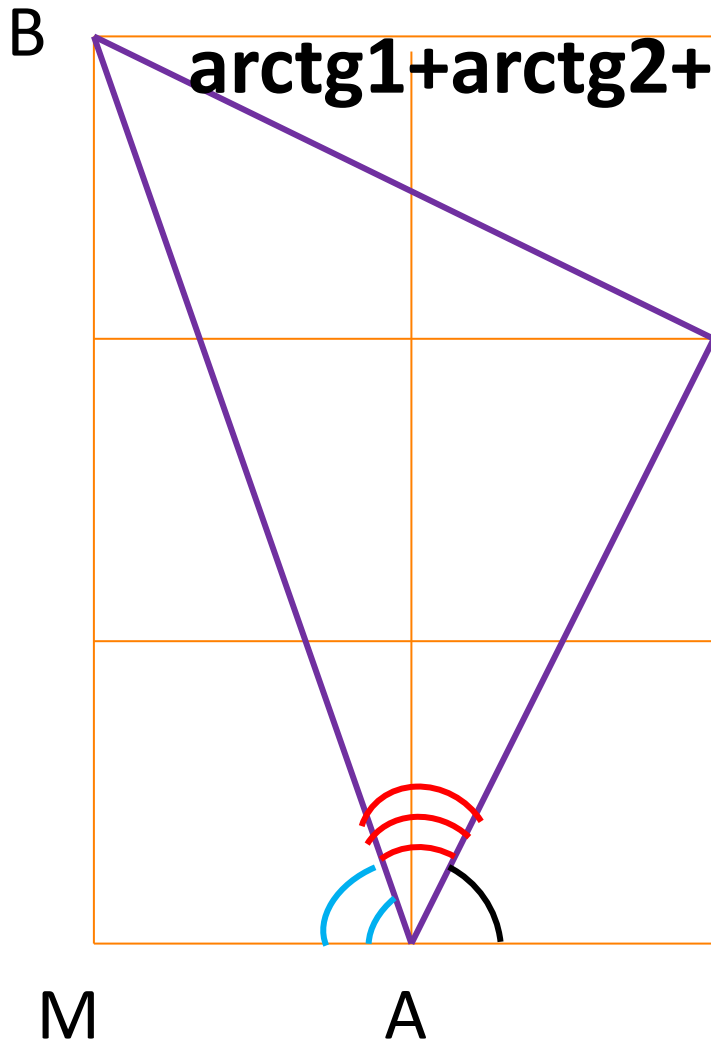
$$\text{ИЗ } \nabla ADH : BD = AD = \frac{AH}{\sin \angle ADH} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}$$

$$\text{ИЗ } \nabla ACH : DC = AC = \frac{AH}{\sin \angle ACH} = \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$$

Т.к $BC = BD + DC$, то

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$$

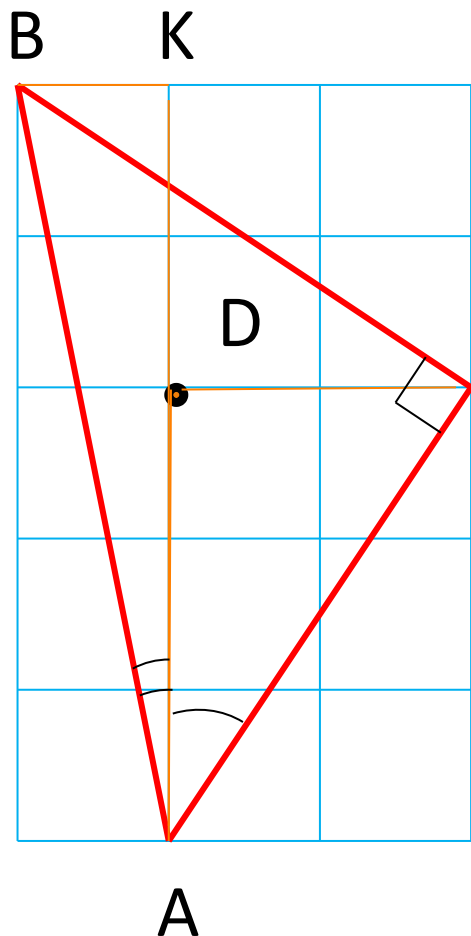
Вычислить



Используя
клеточный
фон, получим
 $\arctg 3 = \angle BAM$
 $\arctg 2 = \angle CAN$
 $\arctg 1 = \angle BAC$
($\angle BAC$ – острый угол
прямоугольного
равнобедренного
треугольника ABC)

$$\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$$

Вычислить $\arctg \frac{2}{3} + \text{arcctg } 5$



Из $\triangle CAD$: $\arctg \frac{2}{3} = \angle CAD$

Из $\triangle ABK$: $\text{arcctg } 5 = \angle BAK$

$\angle BAC$ – острый угол
 прямого равнобедренного треугольника ABC, $\frac{\pi}{4}$
 поэтому

$\arctg \frac{2}{3} + \text{arcctg } 5 =$

Вычислите \cos

$(\arccos 3 + \arccos 0,5)$

$\operatorname{ctg} \angle DAB = 3, \operatorname{tg} \angle$

$DAC = 0,5$

Треугольник ABC –
равнобедренный с
прямым
углом ACB.

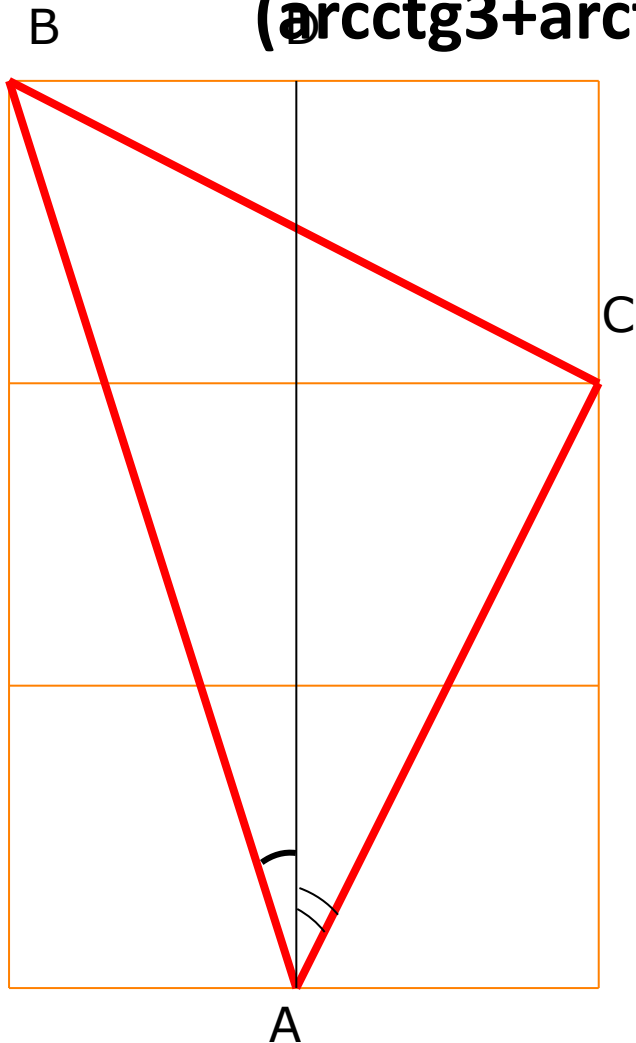
Значит

$$\arccos 3 + \arccos 0,5 = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(\arccos 3 + \arccos 0,5) = \sqrt{2}/2$$

Ответ:

$$\sqrt{2}/2$$



Вычислить $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$

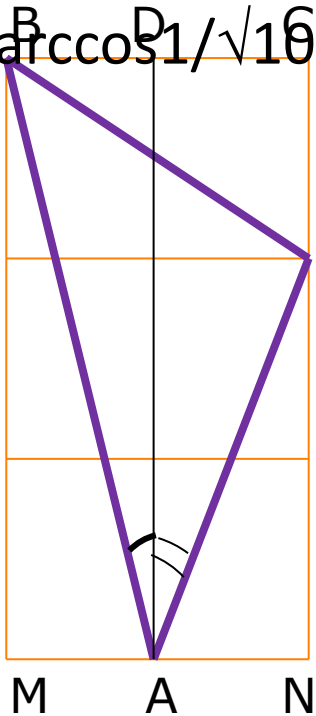
Т.к. $2/\sqrt{5} > 0$, то можно считать, что $\arcsin 2/\sqrt{5}$ - это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов

равно 1:2. Тогда величину этого угла можно рассматривать как $\operatorname{arctg} 2$. Аналогично рассуждая, получим

$\arccos 1/\sqrt{10} = \operatorname{arctg} 3$. $\angle MAB = \operatorname{arctg} 3$, $\angle NAC = \operatorname{arctg} 2$,

а их сумма равна $\pi - \frac{\pi}{4}$

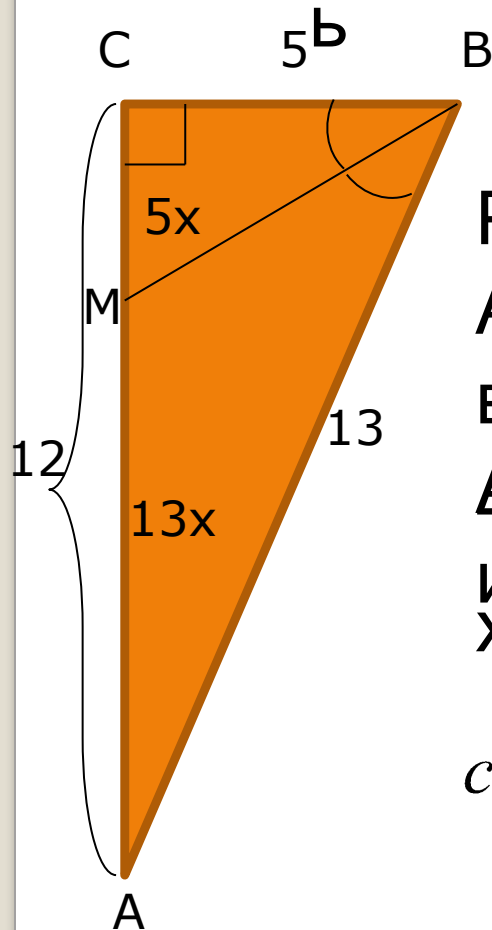
$$\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1$$



Ответ:

-1

Вычислит $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$



Решени

Рассмотрим треугольник ABC,

в котором $\angle C = 90^\circ$, $BC = 5$,

$AB = 13$.

Тогда $MC = 5x$, $AM = 13x$, $AC = 12$, т.е. и BM - биссектриса $\angle B$.

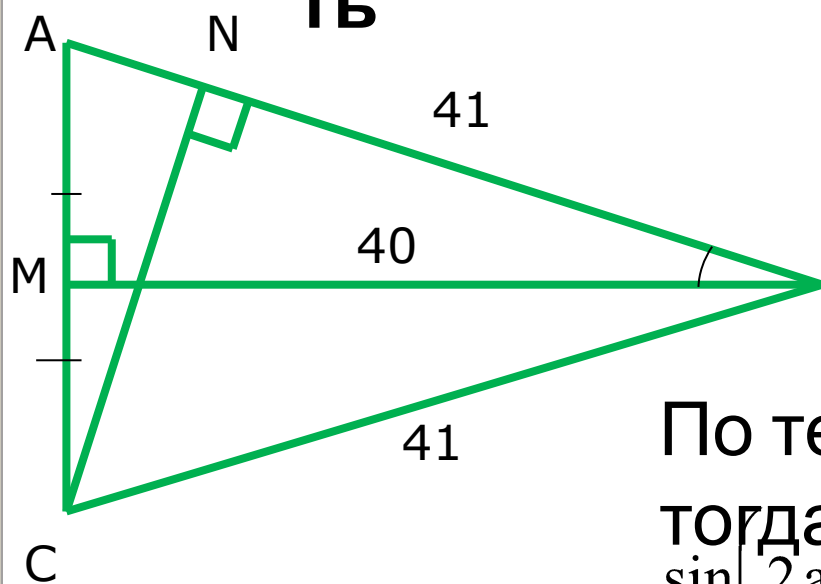
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

Ответ:

1,5

Вычисли $\sin\left(2 \arccos \frac{40}{41}\right)$

ТЬ



Рассмотрим
равнобедренный
треугольник ABC
($AB=BC=41$),

По теореме Пифагора $AM=9$,

тогда

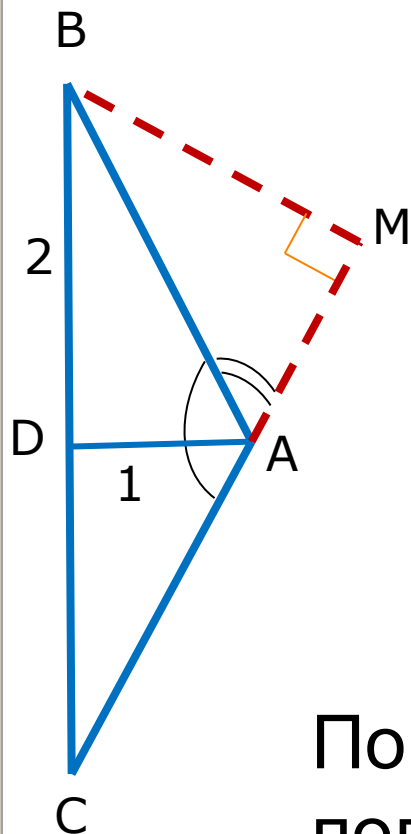
$$\sin\left(2 \arccos \frac{40}{41}\right) = \frac{CN}{BC}$$

$$BC = 41, CN = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 40}{41} = \frac{720}{41}$$

$$\sin\left(2 \arccos \frac{40}{41}\right) = \frac{720}{1681}$$

Ответ $\frac{720}{1681}$

:



Вычислить \cos

$(2\arctg 2)$

В треугольнике $\triangle BAM$ $\angle BAC = 2\arctg 2$.

Этот угол тупой. Т.к. $\arctg 2 > \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\cos \angle BAM = \frac{AM}{AB}$$

По теореме Пифагора из $\triangle BAM$

получаем: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$, а из $\triangle ABD$

$$BM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{5}, \quad AM = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(2\arctg 2) = -\cos \angle BAM = -\frac{3}{\sqrt{5}} : \sqrt{5} = -\frac{3}{5}$$

Ответ:

-3/5