Степень с натуральным и целым показателем. Корень n-ой степени.

Степень с натуральным показателем

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$$

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n* называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

Свойства степени

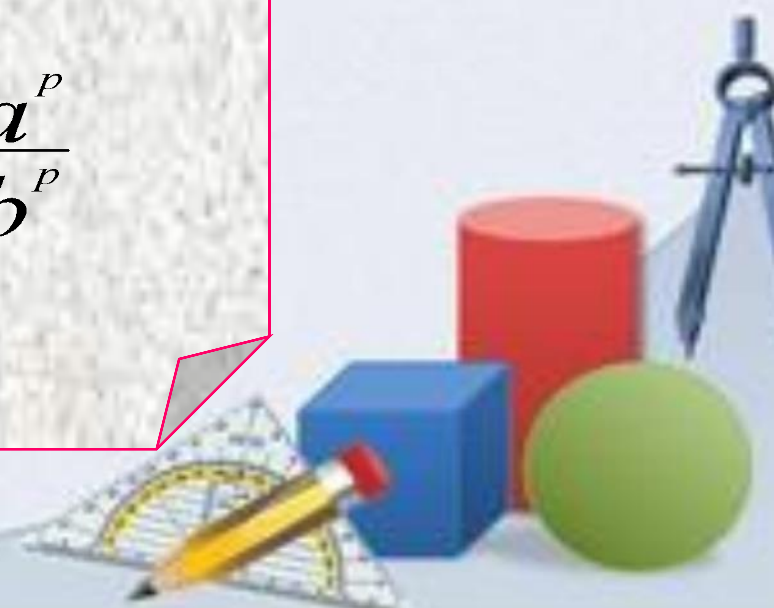
$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}$$

$$\left(ab\right)^p = a^p b^p$$

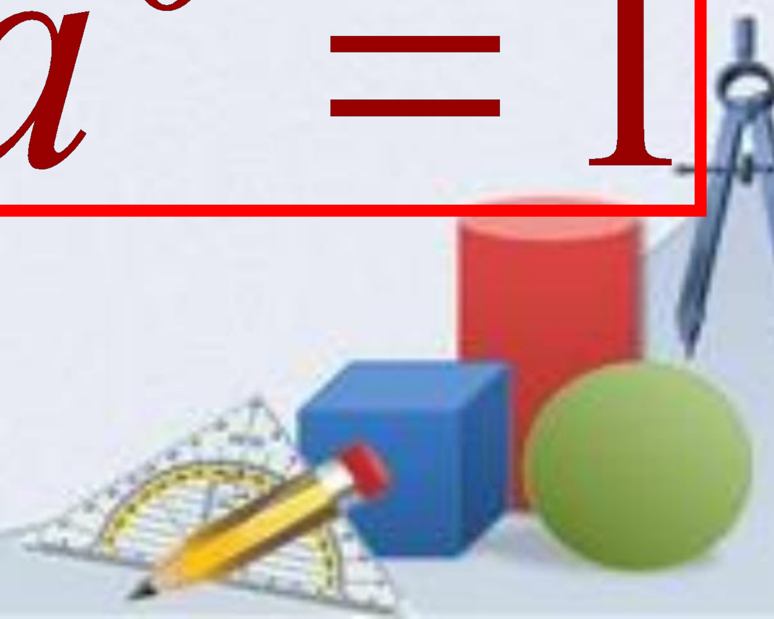
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$



Определение степени с нулевым показателем

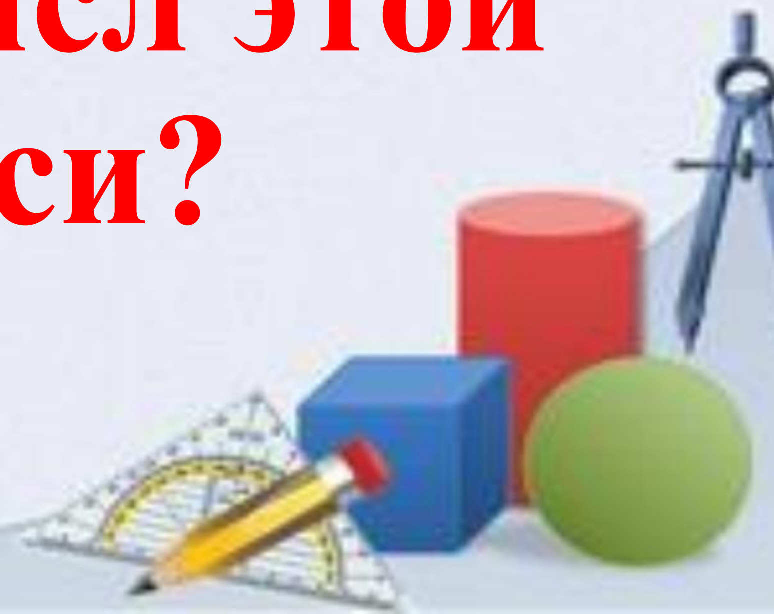
вногонулю,снулевымп

$$\boxed{a^0 = 1}$$



$$1{,}674 \cdot 10^{-24}$$

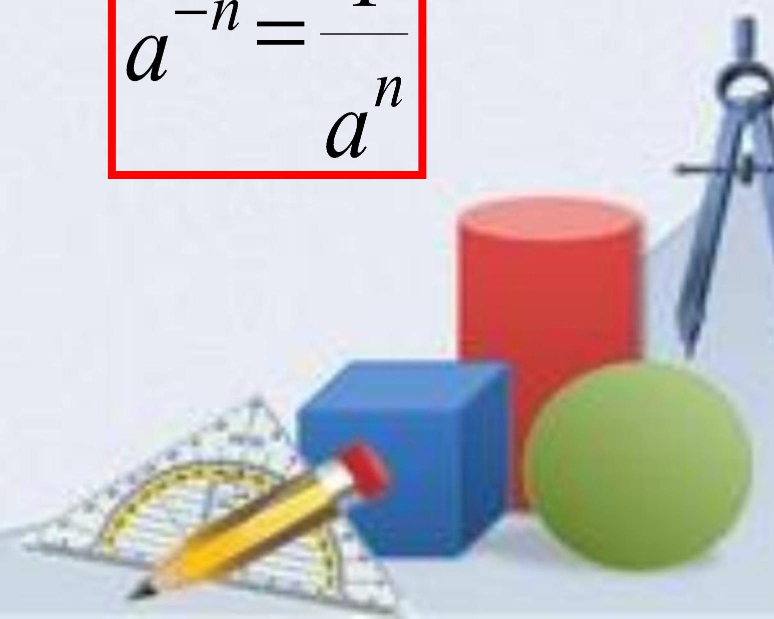
В чём смысл этой записи?



Определение степени с целым отрицательным показателем

Если $a \neq 0$ и $n \in N$, то

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$



ВЫЧИСЛИТЕ:

$3^2 \;=\qquad ;\; 0{,}01^3 =$

$4^2 = \qquad ;\; (-6)^2 \;=$

$5^{\circ} = \qquad ;\; 1^{23} \;=$

$O^6 \;= \qquad ;\; 0^{\circ} =$

Представьте число в виде произведения двух одинаковых множителей двумя способами:

25

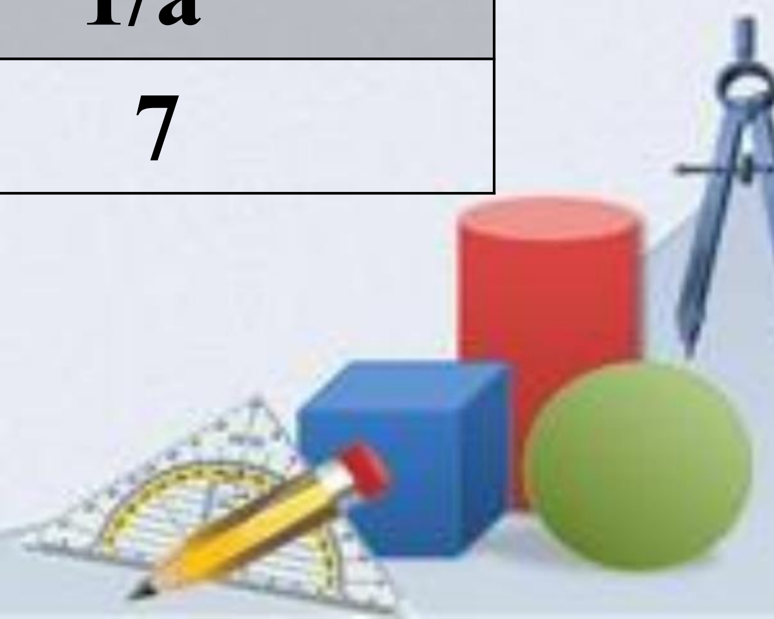
1/81

1/25

$1/a^2$

Найдите число, обратное данному:

6	0
1/7	x^2
0	1/6
a^2	$1/a^2$
$1/x^2$ ($x\neq0$)	7



Взгляните на число

10^{-24}

Как вы думаете, это положительное или отрицательное число?

Выполните задание

1) **Уловите закономерность и продолжите ряд чисел**

...1000,100, 10,...

(1, 1/10, 1/100, 1/1000...)

2) Представим каждое из этих чисел в виде степени числа 10:

...1000, 100, 10, 1, 1/10, 1/100,1/1000...

... 10^3, 10^2, 10^1, 10°, $1/10^1$, $1/10^2$, $1/10^3$...

Представьте степени в виде дробей с положительными показателями

№1 вариант		Ответ	2 вариант	Ответ	баллы
1	3^{-4}		5^{-3}		
2	y^{-1}		x^{-1}		
3	$(m-n)^{-2}$		$(c-d)^{-2}$		
3	$(m-n)^{-2}$	$1/(m-n)^2$	$(c-d)^{-2}$	$1/(c-d)^2$	2

Заменить дробь степенью

№	1 вариант	Ответ	2 вариант	Ответ	баллы
1	$1/5^8$	5^{-8}	$1/8^5$	8^{-5}	1
2	$1/(b + c)^{10}$	$(b + c)^{10}$	$1/(b-c)^9$	$(b-c)^{-9}$	1
3	$1/(x - y)$	$(x - y)^{-1}$	$1/(x + y)$	$(x + y)^{-1}$	2

Вычислите

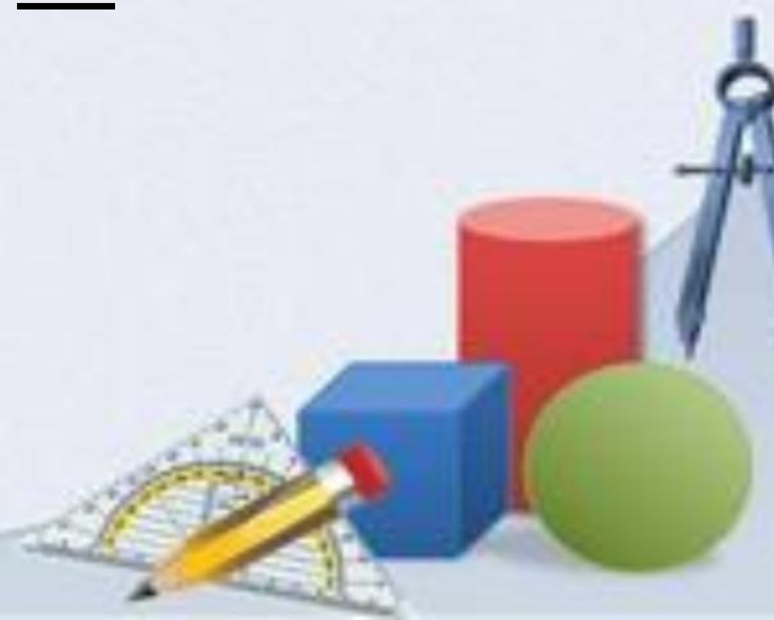
	№1 вариант	Ответ	2 вариант	Ответ	баллы
1	3^{-2}	1/9	2^{-4}	1/16	**1**
2	$(-1/4)^{-3}$	-64	$(-1/6)^{-2}$	36	**1**
3	$0{,}001^{-1}$	1000	$0{,}0001^{-1}$	10000	**2**

Вписать такие основания и показатели степени, чтобы получились верные равенства

а) $\mathbf{a^{-6} \cdot a^{\underline{4}} = a^{-2}}$ б) $\mathbf{a^{-2} \cdot a^{\underline{7}} = a^{5}}$

в) $\mathbf{a^{-2} \cdot a^{\underline{-3}} = a^{-5}}$ г) $\mathbf{a^{\underline{8}} \cdot a^{-3} = a^{5}}$

д) $\mathbf{(a^{\underline{4}})^{-2} = a^{-8}}$ е) $\mathbf{3^{-5} \cdot \underline{\ 5\ }^{-5} = 15^{-5}}$



1. Выполнить действия

а) $a^{-6}\cdot a\cdot a^{-4} = \underline{a^{-11}}$;

б) $a^{-8} : a^{-5} = \underline{a^{-3}}$;

в) $(a^{-4})^{-2} = \underline{a^{8}}$;

г) $a^{-15} : a^{-15} = \underline{1}$;

е) $a^{-3}\cdot a = \underline{a^{-2}}$.

д) $(2a^{3})^{-3} = \underline{\frac{1}{8}a^{-9}}$;

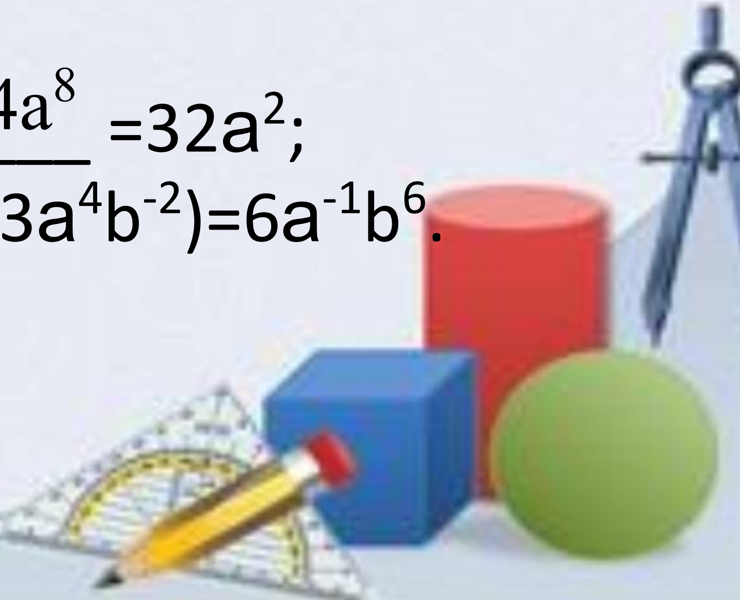
2. Вписать недостающий множитель

а) $3a^{-5}\cdot \underline{4a^{-5}} = 12a^{-10}$;

б) $(2a^{-2})^{3}\cdot \underline{4a^{8}} = 32a^{2}$;

в) $\underline{6a^{-2}b^{-4}}\cdot 4a^{-7}b = 24a^{-9}b^{-3}$;

г) $\underline{-2a^{-5}b^{8}}\cdot(-3a^{4}b^{-2}) = 6a^{-1}b^{6}$.

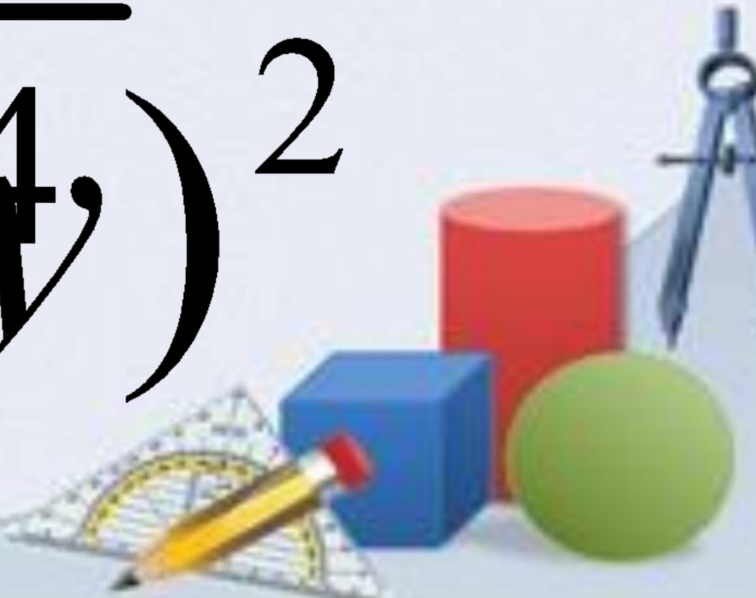


Представьте выражение в виде степени

$$\frac{1}{y^{6}}$$

$$\frac{1}{(x^{-4}y)^{2}}$$

$$\frac{1}{3a}$$



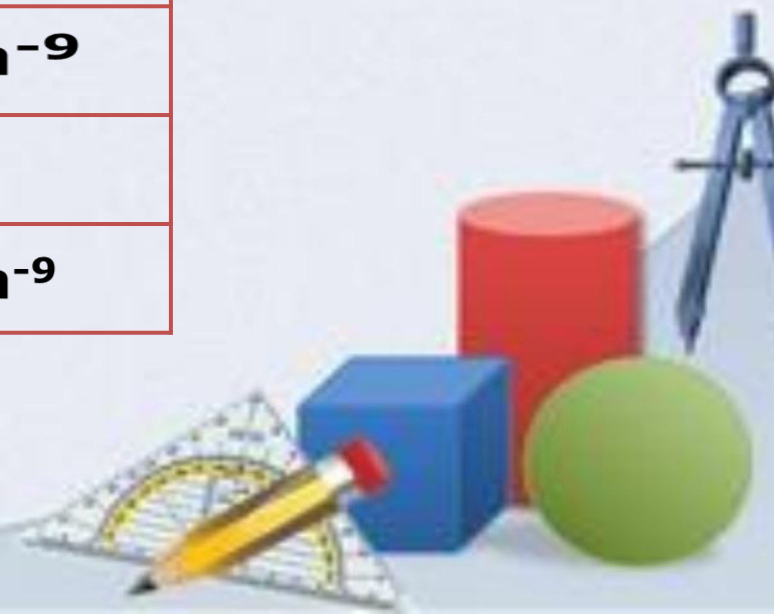
Упростите

$$x^8 \cdot x^{-6}$$

Представьте выражение x^{-12} в виде произведения двух степеней с основанием x, если один множитель известен.

x^{-12}

x^{-2}	$\frac{1}{8}a^{-9}$
$\frac{1}{8}a^{-9}$	x^{5}
x^{14}	$\frac{1}{8}a^{-9}$
$\frac{1}{8}a^{-9}$	x
x^{-18}	$\frac{1}{8}a^{-9}$



Вычислите

$$2^{-18}\cdot\left(2^{-2}\right)^{3} : 2^{-32}$$

$$(0,2)^{-4}$$

$$\frac{5^{-10}\cdot 7^{-12}}{5^{-3}\cdot 7^{-4}\cdot 5^{-5}}$$

Расположите в порядке убывания

$$0{,}2^{-6};\ 0{,}2^{0};\ 0{,}2;\ (0{,}2)^{-4};\ 0{,}2^{3}$$

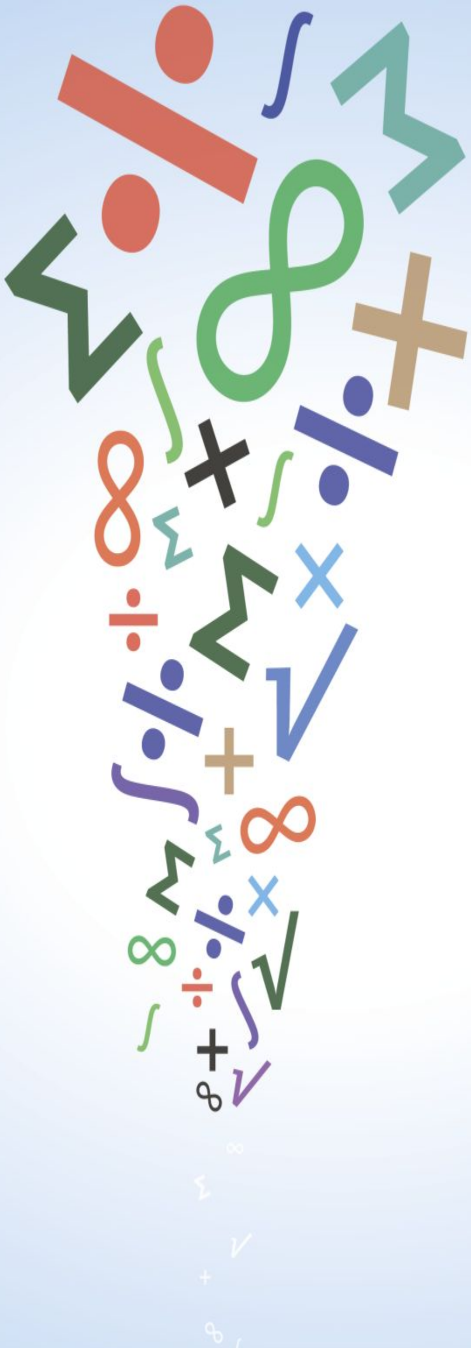
При каких значениях х верно равенство

$$3^x = 27$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$$

$$10^x = 0{,}001$$

$$5^x = 625$$



Корень n-ой степени

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

Корнем n – ой степени из числа a называется такое число, n – ая степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a}$$

подкоренное выражение

показатель корня

$\frac{1}{8}a^{-9}$ $\frac{1}{8}a^{-9}$

$$\boxed{\frac{1}{8}a^{-9}}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\boxed{\frac{1}{8}a^{-9}}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9} \Rightarrow \frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень.

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

Свойства корней

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot k]{a^k}, k > 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}, k > 0$$

$$0 < a < b, \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Покажем на примерах, как используются свойства корней и рациональных степеней в вычислениях.

- **Пример 1.** Вычислить

$$\boxed{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\;\sqrt[12]{4}}$$

Решение. 1) Упростим сначала первую часть выражения.

Используя свойство $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, получим $\sqrt[3]{4\sqrt{2}}=\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

Теперь применим свойства $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}, k>0$ и $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}, k>0$:

$$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{4^2}\sqrt[6]{2}$$

Применим теперь свойство $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$:

$$\sqrt[6]{4^2}\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{4^2\cdot 2}=\sqrt[6]{16\cdot 2}=\sqrt[6]{32}$$

В итоге мы получили:

$$\sqrt[3]{4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{32}$$

2) По свойству $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}, k>0$:

$$\sqrt[12]{4}=\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[6]{2}$$

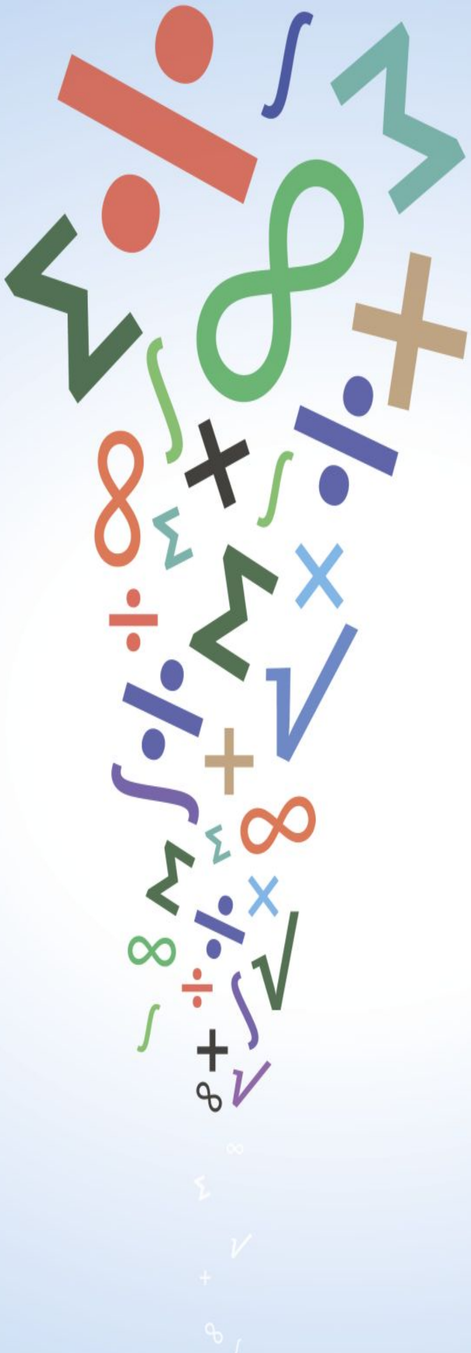
Подставим результаты вычислений из 1) и 2) в выражение

$$\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\,\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{32}\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{32\cdot 2}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$$

Здесь мы использовали свойства $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ арифметических корней.

Ответ: 2.

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$



Степень с рациональным показателем

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$\frac{1}{8}a^{-9}$ $\frac{1}{8}a^{-9}$ $\frac{1}{8}a^{-9}$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$\frac{1}{8}a^{-9}$

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя:

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

Для отрицательных оснований степень
с дробным показателем не рассматривается.

$$\cancel{\frac{1}{8}a^{-9}}$$

Свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем.

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a-9$$

Решение

:

- *Упростим выражение:*

$$\frac{1}{8}a-9$$

$$\frac{1}{8}a-9$$

$$\frac{1}{8}a-9$$

Ответ: 50.

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

Решение

:

- *Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:*

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$

$$\frac{1}{8}a^{-9}$$